В. В. Шокуров, Модулярные символы произвольного веса,
Функц. анализ и его прил., 1976, том 10, выпуск 1, 95–96

Функциональный анализ и его приложения,
т. 10, вып. 1, 1976, 95—96.

МОДУЛЯРНЫЕ СИМВОЛЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО ВЕСА

В. В. Шокуров

В работах Ю. И. Манина [3], Суинертона-Дайера [7], Б. Мазура [5] были введены модулярные символы, удобные для вычисления периодов модулярных форм веса 2. В этой заметке результаты работ [3], [5] обобщаются на модулярные формы произвольного веса, не меньшего 2.

Пусть Γ — подгруппа конечного индекса в $SL(2, \mathbf{Z})$, $-E \notin \Gamma$. Фиксируем натуральное число w. Обозначим через H' множество не эллиптических для $SL(2, \mathbf{Z})$ точек верхней полуплоскости, т. е. $H' = H - SL(2, \mathbf{Z})\{i, \rho\}$. Рассмотрим на многообразии $H' \times \mathbf{C}^w$ действие группы $\Gamma \times \mathbf{Z}^w \times \mathbf{Z}^w$ по следующему правилу:

$$(\gamma, n, m)\colon (z, \zeta) \mapsto (\gamma z, (cz+d)^{-1}(\zeta + zn + m)),$$

где $\gamma \in \Gamma$, $n, m \in \mathbf{Z}^w$, $z \in H'$, $\zeta \in \mathbf{C}^w$, $\gamma z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ для $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \subset SL(2, \mathbf{Z})$. Многообразие $\Gamma \times \mathbf{Z}^w \times \mathbf{Z}^w \diagdown H' \times \mathbf{C}^w$ обладает канонической гладкой проективной компактификацией B_Γ^w, которая здесь не описана из-за недостатка места. Пусть $\Sigma_\Pi = \{$параболические точки $\Gamma \diagdown \overline{H}\}$, а $B_\Pi^w = B_\Gamma^w|_{\Sigma_\Pi}$. Существует каноническое отображение

$$(\mathbf{Q} \cup i\infty) \times (\mathbf{Q} \cup i\infty) \times \mathbf{Z}^w \times \mathbf{Z}^w \to H_{w+1}(B_\Gamma^w, B_\Pi^w; \mathbf{Z}),$$
$$(\alpha, \beta, n, m) \mapsto \{\alpha, \beta, n, m\}_\Gamma.$$

α, β — точки из $\mathbf{Q} \cup i\infty$, n, m — векторы из $\mathbf{Z}^w$. Пусть $\widetilde{\alpha\beta}$ — путь, соединяющий α с β на H', — подходит к параболическим точкам α и β вертикально. Над каждой точкой $z \in \operatorname{Int} \widetilde{\alpha\beta}$ рассмотрим клетку

$$\{\zeta \in \mathbf{C}^w \mid \forall i = 1, \ldots, w;\ \exists t_i \in [0, 1] \subset \mathbf{R};\ \zeta_i = t_i(zn_i + m_i)\}.$$

Симметризация по ζ_i замыкания объединения этих клеток определяет элемент из $H_{w+1}(B_\Gamma^w, B_\Pi^w; \mathbf{Z})$, который и обозначается через $\{\alpha, \beta, n, m\}_\Gamma$. Обозначим через $\widetilde{H}_{w+1}(B_\Gamma^w, B_\Pi^w; \mathbf{Q})$ подпространство $H_{w+1}(B_\Gamma^w, B_\Pi^w; \mathbf{Q})$, порожденное образами точек множества $(\mathbf{Q} \cup i\infty) \times (\mathbf{Q} \cup i\infty) \times \mathbf{Z}^w \times \mathbf{Z}^w$ при отображении $\{,,\}_\Gamma$. Кроме того, положим $\widetilde{H}_{w+1}(B_\Gamma^w, \mathbf{Q}) = \operatorname{Im}(H_{1+w}(B_\Gamma^w, \mathbf{Q}) \to H_{1+w}(B_\Gamma^w, B_\Pi^w; \mathbf{Q})) \cap \widetilde{H}_{w+1}(B_\Gamma^w, B_\Pi^w, \mathbf{Q})$. Классы $\{\alpha, \beta, n, m\}_\Gamma$ называются *модулярными символами веса* $w+2$. Пусть $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL^+(2, \mathbf{Z})$. Введем на модулярных символах следующую операцию:

$$\gamma \mid \{\alpha, \beta, n, m\}_\Gamma = \{\gamma\alpha, \gamma\beta, Dn - Cm, -Bn + Am\}_\Gamma.$$

Определим понятие *отмеченного класса* $\xi(j, k)$, где $j \in J = \Gamma \diagdown SL(2, \mathbf{Z})$, $k \in \{0, 1, \ldots, w\}$; оно является обобщением отмеченного класса, рассмотренного в работе Ю. И. Манина [3],

$$\xi(j, k) = \gamma \mid \{0, i\infty, (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, 0, \ldots, 0), (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 1, \ldots, 1)\}_\Gamma, \quad \gamma \in j.$$

Теорема 1. *Пространство* $\widetilde{H}_{w+1}(B_\Gamma^w, B_\Pi^w; \mathbf{Q})$ *порождено отмеченными классами.*

Пусть $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Обозначим через $\mathscr{C}$ векторное пространство над $\mathbf{Q}$, порожденное парами (j, k) для всех $j \in J$, $k \in \{0, 1, \ldots, w\}$. По линейности определим отображение $\xi\colon \mathscr{C} \to \widetilde{H}_{w+1}(B_\Gamma^w, B_\Pi^w; \mathbf{Q})$.

Теорема 2. *Ядро отображения* ξ *порождено векторами*

$$(j, k) + (-1)^k (js, w-k),$$

$$(j, k) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+k} (jt, w-k+i) + \sum_{i=0}^{w-k} \binom{w-k}{i} (-1)^{i+w} (jt^2, i).$$

Пользуясь действием $\gamma \in GL^{+}(2, \mathbf{Z})$ на классах $\{\alpha, \beta, n, m\}_{\Gamma}$, по аналогии с оператором $T'(n)$ (см. [8], § 3) на $S_{w+2}\,\Gamma(N))$ определим оператор $T'(n)$ на $\widetilde{H}_{w+1}(B^{w}_{\Gamma(N)}, B^{w}_{\Pi}, \mathbf{Q})$. Идея доказательства следующей теоремы почерпнута из [2].

Теорема 3. *Для каждой параболической точки v определен цикл $c_v \in H_{w+1}(B^{w}_{\Gamma(N)}, B^{w}_{\Gamma(N)}|_v; \mathbf{Z})$ такой, что образ $\widetilde{c}_v$ этого цикла при естественном отображении лежит в $\widetilde{H}_{w+1}(B^{w}_{\Gamma(N)}, B^{w}_{\Pi}; \mathbf{Q})$ и $T'(p)\,\widetilde{c}_v = (1 + p^{w+1})\,\widetilde{c}_v$ при простых $p \equiv 1 \pmod N$. c_v определяется однозначно с точностью до умножения на константу.*

Теорема 4. *Существуют канонические изоморфизмы $H^0(B^{w}_{\Gamma}, \Omega^{w+1}) \cong S_{w+2}(\Gamma)$, $H^{w+1}(B^{w}_{\Gamma}, \mathscr{C}) \cong H^0(B^{w}_{\Gamma}, \overline{\Omega}^{w+1}) \cong S_{w+2}(\Gamma)$.*

Пусть форме ω_1 по теореме 4 соответствует параболическая форма $\Phi_1 \in S_{w+2}(\Gamma)$, а форме ω_2 соответствует форма $\overline{\Phi}_2 \in \overline{S_{w+2}(\Gamma)}$, тогда

$$\int\limits_{\xi(j,\,k)} \omega_1 + \overline{\omega}_2 = \int\limits_{0}^{i\infty} (\Phi_1 \,|\, \gamma)\, z^k\, dz + \int\limits_{0}^{i\infty} \overline{(\Phi_2 \,|\, \gamma)}\, \overline{z}^k\, d\overline{z}, \quad \gamma \in j. \tag{1}$$

Периодом автоморфной формы $\Phi \in S_{w+2}(\Gamma)$ называется конечный набор комплексных чисел $r(j, k, \Phi) = \int\limits_{0}^{i\infty} (\Phi \,|\, \gamma)\, z^k\, dz$. Периоды удовлетворяют системе соотношений Эйхлера — Шимуры [4]

$$r(j, k, \Phi) + (-1)^k\, r(js, w - k, \Phi) = 0;$$
$$r(j, k, \Phi) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{i+k}\, r(jt, w - k + i, \Phi) + \sum_{i=0}^{w-k} \binom{w-k}{i} (-1)^{i+w}\, r(jt^2, i, \Phi) = 0. \tag{2}$$

Обозначим через S пространство, заданное соотношениями (2) в $\mathbf{C}$-пространстве с базисом $r(j, k)$. S называется *пространством периодов*. Отображение (1) определяет $\mathbf{R}$-линейный оператор $r\colon S_{w+2}(\Gamma) \oplus \overline{S_{w+2}(\Gamma)} \to S$.

Теорема 5. *r — вложение*, $\operatorname{codim}_{\mathbf{C}}(\operatorname{Im}(r)) = t_1 + t_2\delta(w)$, *где $\delta(w) = 1$, если w четное, $\delta(w) = 0$ в противном случае, t_i — число параболических точек рода i, $i = 1, 2$.*

Далее мы предполагаем, что Γ — конгруэнц-подгруппа.

Теорема 6. *Пусть $\omega \in H^0(B^{w}_{\Gamma}, \Omega^{w+1})$ соответствует форме $\Phi \in S_{w+2}(\Gamma)$, собственной для всех операторов $T'(n)$, $T'(n)\,\Phi = \lambda_n \Phi$. Положим $K = \mathbf{Q}(\lambda_1, \ldots)$. Пусть L — пространство, порожденное над K периодами $\int\limits_{c} \omega$, где $c \in H_{w+1}(B^{w}_{\Gamma}, B^{w}_{\Pi}; \mathbf{Q})$. Тогда $\dim_K L \leqslant 2$.*

Следствие. *В предположениях теоремы 6*

$$\dim_K \Bigl(\sum_{\substack{x \in \mathbf{Q} \\ k = 0, 1, \ldots, w}} K \int\limits_{x}^{i\infty} \Phi z^k\, dz \Bigr) \leqslant 2.$$

Всякая новая форма [6], [1] будет удовлетворять следствию.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 18 июня 1974 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Atkin A., Lehner J., Math. Ann. **185**, № 2 (1970), 134—160. **2.** Дринфельд В. Г., Функц. анализ **7**, вып. 2 (1973), 83—84. **3.** Манин Ю. И., Изв. АН СССР, серия матем. **36** (1972), 19—66. **4.** Манин Ю. И., Матем. сб. **92** (1973), 378—400. **5.** Mazur B., Séminair N. Bourbaki, 24-e année, 1971/1972, n. 414. **6.** Miyake T., Ann. Math. **94** (1971), 174—189. **7.** Swinnerton-Dyer H. P. F., Summer school on modular functions, Antwerp., 1972. **8.** Шимура Г., Введение в арифметическую теорию автоморфных функций, М., «Мир», 1973.