ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 122, № 3
март, 2000

В. Р. Халилов*

ФЕРМИОНЫ В СИЛЬНЫХ ВНЕШНИХ ПОЛЯХ В $2+1$ И $1+1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Эффект образования электрон-позитронных пар из вакуума внешним кулоновским полем изучается в $(2+1)$-мерной квантовой электродинамике. Показано, что если электромагнитная константа связи $Z\alpha$ превышает значение 0.62 ($Z=85$), то для простой модели протяженного источника (ядра) низший электронный уровень энергии пересекает границу нижнего континуума (дираковского моря) и в нижнем континууме появляется дырка (положительно заряженный фермион-позитрон). Получено уравнение, определяющее уровни энергии основного и возбужденных электронных состояний вблизи границы нижнего континуума в сильном кулоновском поле ядра. Критический заряд ядра найден для нескольких низших электронных состояний. Показано, что величина критического заряда в $2+1$ измерениях существенно меньше его значения для той же модели в $3+1$ измерениях. Изучено влияние внешнего сверхсильного постоянного магнитного поля на спектр энергий электрона в кулоновском поле и величину критического заряда ядра в $3{+}1$ измерениях. Проблема сведена к решению задачи в ограниченном кулоновском поле в $1{+}1$ измерениях, но без магнитного поля. Рассмотрено взаимодействие фермиона со скалярным внешним полем в $2+1$ и $1+1$ измерениях.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительно возрос интерес к изучению поведения квантовых систем фермионов в присутствии интенсивных внешних полей в пространствах пониженных размерностей. Этот интерес можно связать с двумя причинами. Так, например, ряд эффектов в конденсированных средах указывает на существование квантовых систем со спектром энергий, определяемым гамильтонианом уравнения Дирака в $2+1$ измерениях [1, 2]. Другой пример связан с поведением электронов в сверхсильном магнитном поле. В частности, можно показать, что в сверхсильном однородном магнитном поле напряженности $B > B_{\text{cr}} \equiv m^2/|e|$ электрон в перпендикулярной полю плоскости локализован в области с линейным размером порядка так называемой "магнитной длины" $a = \sqrt{2/|eB|}$, т.е. линейный размер области локализации в этой плоскости оказывается меньше комптоновской длины волны электрона [3]. Такое "вымораживание" двух пространственных степеней свободы фактически позволяет свести ряд задач $(3{+}1)$-мерной квантовой электродинамики (КЭД_{3+1}) к задачам КЭД_{1+1}.

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: khalilov@thc.phys.msu.su

В связи с этим изучение поведения заряженных квантовых частиц в присутствии сильных внешних полей в области релятивистских энергий в пространствах пониженных размерностей, а также исследование обусловливаемых присутствием сильного поля физических эффектов актуально в настоящее время и с точки зрения возможных практических приложений. Одним из таких эффектов является эффект образования электрон-позитронной пары из вакуума кулоновским полем, который для случая кулоновского поля протяженного источника в трех пространственных измерениях был предсказан в статье [4] и затем исследован во многих работах [5–11]. Точные решения уравнения Дирака в сильном кулоновском поле для электрона обсуждались недавно в работах [12].

В данный работе рассматривается эффект рождения электрон-позитронных пар из вакуума в КЭД$_{2+1}$ и КЭД$_{1+1}$ сильным кулоновским полем. Исследуются решения уравнения Дирака и спектр энергий электронных состояний в сильном кулоновском поле протяженного ядра вблизи границы нижнего континуума, а также изучается вопрос о влиянии внешнего сверхсильного постоянного однородного магнитного поля на спектр энергий электрона в кулоновском поле, на критический заряд и на вероятность рождения электрон-позитронной пары из вакуума сильным кулоновским полем в $3{+}1$ измерениях. Рождение позитронов сверхкритическим кулоновским полем рассмотрено в предположении, что в нижний континуум погружаются несколько связанных состояний.

Кроме взаимодействия фермиона с внешним (векторным) электромагнитным полем, рассматривается модель, в которой массивные фермионы взаимодействуют с внешним скалярным полем. В трех пространственных измерениях взаимодействие массивного дираковского поля со скалярным внешним полем, как полагают [11], моделирует самосогласованное поле кварковой системы. Ниже найдены решения и спектры энергий уравнения Дирака во внешнем скалярном поле кулоновского типа $U(r) = -q/r$ в $2+1$ измерениях, а также в скалярном внешнем поле $U(x) = -q/(|x| + a)$ в $1+1$ измерениях. Модель с таким взаимодействием в $1{+}1$ измерениях интересна потому, что она приводит к существованию фермионного состояния с нулевой энергией, значение которого кратко обсуждается.

В статье используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

2. СПЕКТР ЭНЕРГИЙ ЭЛЕКТРОНА В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ В $2+1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Поскольку [2] в $2+1$ измерениях алгебра матриц Дирака может быть выражена через матрицы Паули как $\gamma^0 = \sigma_3$, $\gamma^k = i\sigma_k$, уравнение Дирака для электрона массы m и заряда $e = -e_0$, $e_0 > 0$, взаимодействие которого с внешним полем удовлетворяет принципу "минимальности" в двух пространственных измерениях, можно записать в виде

$$(i\partial_t - H_{\mathrm{D}})\Psi = 0, \tag{1}$$

где

$$H_{\mathrm{D}} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{P} + \beta m + eA^0 \equiv \sigma_1 P_2 - \sigma_2 P_1 + \sigma_3 m + eA^0 \tag{2}$$

$-$гамильтониан, $P_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$ $-$оператор обобщенного импульса электрона, A_μ $-$вектор-потенциал внешнего электромагнитного поля, а полный момент импульса электрона имеет только одну компоненту $J_z = L_z + S_z$, где $L_z = -i\partial/\partial\varphi$ и $S_z = \sigma_3/2$.

Решение уравнения Дирака во внешнем кулоновском поле, описываемом вектором-потенциалом

$$A^0(r) = -\frac{Ze_0}{r}, \qquad A^x = A^y = 0, \tag{3}$$

удобно искать в полярных координатах r, φ. Положим

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-iEt + il\varphi)\psi(r, \varphi), \tag{4}$$

где E $-$энергия, l $-$целое число и

$$\psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Заметим, что волновая функция (4) является собственной функцией операторов Гамильтона H_{D} и полного момента J_z с собственными значениями E и $l + 1/2$ соответственно.

Подставляя соотношения (4) и (5) в уравнение (1) и учитывая равенства

$$P_x \pm iP_y = -ie^{\pm i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{6}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} - \frac{l}{r}f + \left(E + m + \frac{Z\alpha}{r}\right)g = 0, \\ \frac{dg}{dr} + \frac{1+l}{r}g - \left(E - m + \frac{Z\alpha}{r}\right)f = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\alpha \equiv e^2 = 1/137$ $-$постоянная тонкой структуры.

В кулоновском поле точечного ядра решения и дискретный спектр энергий $E < m$ уравнения Дирака были найдены в работах [12]. В частности, дискретный спектр энергий электрона в поле (3) имеет вид

$$E = m\left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n_r + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2}\right)^2}\right]^{-1/2}, \tag{8}$$

причем оказывается, что допустимы следующие значения квантового числа n_r: $0, 1, 2, \ldots$ при $l \geqslant 0$ и $1, 2, 3, \ldots$ при $l < 0$.

Энергия электрона на низшем уровне ($l = n_r = 0$)

$$E_0 = m\sqrt{1 - (2Z\alpha)^2} \tag{9}$$

и обращается в нуль при $Z\alpha = 1/2$. Заметим, что т.к. рассматриваемое здесь кулоновское поле притягивает электроны и отталкивает позитроны, то спектры энергий для частиц (электронов) и античастиц (позитронов) несимметричны.

Спектры энергий для частиц и античастиц будут симметричны в случае взаимодействия массивных фермионов со скалярным внешним полем кулоновского типа $U(r) = -q/r$. Гамильтониан уравнения Дирака (1) для такого взаимодействия имеет вид

$$H_{\mathrm{D}} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta(m + U(r)) \equiv \sigma_1 p_2 - \sigma_2 p_1 + \sigma_3(m + U(r)), \tag{10}$$

где $p_k = i\partial_k$ – пространственные компоненты оператора импульса. Уравнения движения массивного фермиона, взаимодействующего со скалярным внешним полем $U(r) = -q/r$, получаются из (7) при изменении знака перед последним членом во второй строке и замене $Z\alpha$ на q. Мы приведем здесь только формулу для спектра энергий фермиона во внешнем скалярном поле

$$E_{\pm} = \pm m \left[1 - \frac{q^2}{\left(n_r + \sqrt{\left(l + 1/2\right)^2 + q^2} \right)^2} \right]^{1/2}. \tag{11}$$

Величина $E_{\pm}$ для $l = n_r = 0$ лишь стремится к нулю при $q \to \infty$:

$$E_{(0)\pm} = \pm \frac{m}{\sqrt{1 + 4q^2}} \to 0. \tag{12}$$

3. ПРОТЯЖЕННЫЙ КУЛОНОВСКИЙ ЦЕНТР. КРИТИЧЕСКИЙ ЗАРЯД

Энергетический спектр электрона в кулоновском поле ядра с $Z\alpha \geqslant 1/2$ имеет физический смысл только с учетом конечных размеров ядра, создающего кулоновский потенциал [13], т.е. следует рассматривать потенциал, обрезанный на некотором расстоянии R. В случае трех пространственных измерений спектр энергий электрона в сильном поле обрезанного (на малых расстояниях) кулоновского потенциала впервые был исследован в статье [13]. С ростом Z в области $Z > 137$ уровни энергии электрона становятся отрицательными и продолжают опускаться до границы нижнего континуума $-m$. Значение $Z = Z_{\mathrm{cr}}$, при котором нижний уровень энергии электрона достигает границы нижнего континуума, называют критическим для основного состояния [9–11]. Как показано в работах [12], в случае двух пространственных измерений поведение уровней энергии электрона аналогично трехмерному случаю, однако пересечение границы нижнего континуума $-m$ имеет место при значительно меньших значениях Z.

Рассмотрим решения и спектр энергий уравнения Дирака в области $2Z \approx 137$ и определим соответствующие значения Z_{cr}. Исключая из системы (7) функцию $g(r)$, получим

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr} + \left(E^2 - m^2 + \frac{2EZ\alpha}{r} + \frac{(Z\alpha)^2 - l^2}{r^2} \right) f(r) + \\ + \frac{Z\alpha}{r^2}\left(E + m + \frac{Z\alpha}{r} \right)^{-1} \left(\frac{df(r)}{dr} - \frac{l}{r} f(r) \right) = 0. \tag{13}$$

Отметим, что последний член этого уравнения пропорционален $\hbar$. Этот член мал при достаточно больших r, однако он влияет на асимптотический вид решений при малых $r \sim \hbar/mc$.

Так как для определения $Z_{\rm cr}$ достаточно рассмотреть область значений энергий вблизи границы нижнего континуума $-m$, то для функции $F(r) = rf(r)$ из уравнения (13) нетрудно получить уравнение при $E \approx -m$ в виде

$$\frac{d^2F(r)}{dr^2} + \left(E^2 - m^2 + \frac{2EZ\alpha}{r} + \frac{(Z\alpha)^2 - l(l+1)}{r^2}\right)F(r) = 0. \tag{14}$$

Решение уравнения (14), убывающее при $r \to \infty$, выражается через функцию Уиттекера вида

$$F(r) = W_{\beta,i\theta}(2\lambda r), \tag{15}$$

где

$$\beta = \frac{EZ\alpha}{\lambda}, \qquad \theta = \sqrt{(Z\alpha)^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}, \qquad \lambda = \sqrt{m^2 - E^2}. \tag{16}$$

Решение для $G(r) = rg(r)$ вблизи значения $E = -m$ находится из равенства

$$G(r) = \frac{1}{Z\alpha}\left((1+l)F - \frac{dF}{dr}\right) \tag{17}$$

с использованием уравнения Дирака и рекуррентных соотношений для функций Уиттекера.

Уравнение (14) можно интерпретировать как стационарное уравнение Шредингера, в котором $E' = (E^2 - m^2)/2m$ – энергия "частицы", а

$$U_{\rm eff}(r) = -\frac{EZ\alpha}{mr} - \frac{(Z\alpha)^2 - l(l+1)}{2mr^2} \tag{18}$$

– эффективная потенциальная энергия. Решение уравнения (14) с $E = -m$ можно выразить через функцию Макдональда мнимого индекса [14]

$$F(r) = \sqrt{r}K_{2i\theta}\left(\sqrt{8mZ\alpha r}\right). \tag{19}$$

Функция $G(r)$ при $E = -m$ определяется соотношением (17). Значение $Z_{\rm cr}$ найдем для простой модели, задавая потенциал в виде

$$A_0^Z(r) = \begin{cases} -\frac{Ze_0}{r}, & r \geqslant R, \\ -\frac{Ze_0}{R}, & r \leqslant R. \end{cases} \tag{20}$$

В области $r \leqslant R$ уравнение для функции $F(r)$ имеет вид

$$\frac{d^2F}{dr^2} - \frac{dF}{rdr} + \left(\left(E + \frac{Z\alpha}{R}\right)^2 - m^2 + \frac{1-l^2}{r^2}\right)F(r) = 0. \tag{21}$$

Его конечное (при $r = 0$) решение выражается через функцию Бесселя $J_n(z)$ целочисленного индекса n следующим образом [14]:

$$F(r) = rJ_{|l|}(\kappa r), \tag{22}$$

где

$$\kappa = \sqrt{\left(E + \frac{Z\alpha}{R}\right)^2 - m^2}. \tag{23}$$

Для нахождения спектра уравнения Дирака необходимо сшить решения в точке $r = R$:

$$\left(\frac{G(r)}{F(r)}\right)_{r=R-0} = \left(\frac{G(r)}{F(r)}\right)_{r=R+0}. \tag{24}$$

В частности, полагая $E = -m$ и учитывая, что параметр R мал по сравнению с комптоновской длиной волны электрона $1/m$, так что $\kappa \approx Z\alpha/R$, получим трансцендентное уравнение, определяющее (при фиксированном R) критический заряд для основного и возбужденных состояний с $l = 0$:

$$\frac{J_1(X)}{J_0(X)} = \left(1 - \frac{zW'_{\beta,i\nu}(x)}{W_{\beta,i\nu}(x)}\right) \tag{25}$$

или

$$J_0(X) = K_{2i\nu}(z), \tag{26}$$

где $X = Z_{\mathrm{cr}}\alpha$, $\nu = \sqrt{X^2 - 1/4}$, $\beta = -mZ\alpha/\lambda$, $x = \lambda R$, $z = \sqrt{8mRX}$ и штрих означает производную по аргументу функции Уиттекера x.

Полученные уравнения удается решить лишь численно. Например, для того чтобы решить уравнение (26), используем представление для функций Макдональда при малых значениях аргумента в виде [12]

$$K_\mu(z) = \frac{\pi}{2\sin(\pi\mu)}\left\{\frac{z^{-\mu}}{2^{-\mu}\Gamma(1-\mu)}\left[1 + \frac{z^2}{4(1-\mu)} + \cdots\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{z^{\mu}}{2^{\mu}\Gamma(1+\mu)}\left[1 + \frac{z^2}{4(1+\mu)} + \cdots\right]\right\}. \tag{27}$$

Далее, после несложных преобразований нетрудно получить следующую формулу:

$$K_{i\nu}(z) = -\left(\frac{\pi}{\nu\,\mathrm{sh}(\pi\nu)}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(1 + \frac{z^2}{4(1+\nu^2)}\right)\sin P - \frac{\nu z^2}{4(1+\nu^2)}\cos P\right], \tag{28}$$

где

$$P = \nu \ln\frac{|z|}{2} + \arg\Gamma(1 - i\nu).$$

Значения критического заряда Z_{cr} для состояний с $l = 0$, $n_r = 1, 2, 3$ (эти значения получаются при численном решении уравнения (26), в котором функция Макдональда учтена в виде разложения (28) при $Rm = 0.03$) примерно равны соответственно $85, 111, 148$.

Отметим, что $Z_{\rm cr} \approx 170, 230$ при $Rm = 0.03$ в состояниях $1s_{1/2}$, $2s_{1/2}$ для аналогичной модели в трех пространственных измерениях [9–11]. Отметим также, что с уменьшением R уменьшается и $Z_{\rm cr}$. Следовательно, вакуум КЭД$_{2+1}$ в сильном кулоновском поле должен проявлять неустойчивость по отношению к образованию электрон-позитронных пар при существенно меньших значениях критического заряда, чем в КЭД$_{3+1}$.

Получим теперь уравнение, которое определяет спектр энергий электрона вблизи границы нижнего континуума, но для произвольных (целых) значений l. Вблизи границы нижнего континуума $E \simeq -m$ при условии $Rm \ll 1$ уравнение (24) можно существенно упростить. Для этого используем представление для функций Уиттекера при малых значениях аргумента в виде [14]

$$W_{\beta,i\theta}(z) = \left\{ \frac{\Gamma(2i\theta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + i\theta\right)} z^{\frac{1}{2} - i\theta} + \frac{\Gamma(-2i\theta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta - i\theta\right)} z^{\frac{1}{2} + i\theta} \right\}. \tag{29}$$

Далее, после несложных преобразований нетрудно получить формулу

$$W_{\beta,i\theta}(z) = \frac{|\Gamma(2i\theta)|}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + i\theta\right)\right|} 2z^{\frac{1}{2}} \cos(\Phi), \tag{30}$$

где

$$\Phi = -\theta \ln(2\lambda r) + \arg\Gamma(2i\theta) - \arg\Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + i\theta\right).$$

Вычислив производную по аргументу z в соотношении (30) и подставляя полученный результат и функцию (30) в равенство (24), получим трансцендентное уравнение, неявно определяющее спектр энергий как для основного, так и для возбужденных состояний с учетом конечности ядра:

$$\frac{\kappa R J_{l+1}(\kappa R)}{J_l(\kappa R)} = l + \frac{1}{2} - \theta \operatorname{tg}(\Phi) \tag{31}$$

или эквивалентно

$$\Phi = \operatorname{arctg} \Pi + \pi n_r, \tag{32}$$

где

$$\Pi = -\left(\frac{\kappa R J_{l+1}(\kappa R)}{J_l(\kappa R)} - l - \frac{1}{2} \right) \theta^{-1}.$$

Из уравнения (31) можно также найти критический заряд протяженного ядра при произвольных значениях l, причем как для основного, так и для возбужденных состояний. Решение уравнения (31) численно дает $Z_{\rm cr} \approx 108$ при $Rm = 0.03$ для состояния $l = -1$, $n_r = 1$. Отметим, что $Z_{\rm cr} \approx 185$ при $Rm = 0.03$ в случае состояния $2p_{1/2}$ для аналогичной модели в КЭД$_{3+1}$ [11].

4. ВЛИЯНИЕ СВЕРХСИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СПЕКТР ЭНЕРГИЙ ЭЛЕКТРОНА

В сверхсильном магнитном поле область движения электрона в перпендикулярной полю плоскости имеет линейный размер порядка $a = \sqrt{2/|eB|}$, а кулоновский потенциал точечного ядра эффективно обрезается в направлении магнитного поля на расстояниях порядка a [3]. Это позволяет свести задачу о влиянии внешнего магнитного поля на критический заряд в 3+1 измерениях к эффективной задаче о спектре энергий электрона в ограниченном кулоновском поле в $1 + 1$ измерениях. В $1 + 1$ измерениях имеются только две γ-матрицы Дирака. Здесь мы будем использовать представление

$$\gamma^0 = \sigma_3, \qquad \gamma^1 = i\sigma_1 \tag{33}$$

(эквивалентно для матриц β, α_1: $\beta = \sigma_3,\ \alpha_1 = -\sigma_2$).

Гамильтониан уравнения Дирака (1) во внешнем кулоновском поле (магнитное поле в 3+1 измерениях направлено по x) имеет вид

$$H_{\mathrm{D}} = \alpha_1 P_1 + \beta m + eA^0 \equiv i\sigma_2\partial_x + \sigma_3 m + eA^0. \tag{34}$$

Решение уравнения Дирака с гамильтонианом (34) во внешнем поле

$$A^0(x, a) = -\frac{Ze_0}{|x| + a} \tag{35}$$

(a – параметр обрезания) ищем в виде

$$\Psi(t, x) = \exp(-iEt)\Psi(x), \tag{36}$$

причем

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \tag{37}$$

– двухкомпонентная функция (спинор).

В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{d\psi_1}{dx} - \left(E + m + \frac{Z\alpha}{|x| + a}\right)\psi_2 = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dx} + \left(E - m + \frac{Z\alpha}{|x| + a}\right)\psi_1 = 0. \tag{38}$$

Решения следует искать отдельно для областей положительных и отрицательных значений x.

Введем обозначения $b_+ = \sqrt{m + E},\ b_- = \sqrt{m - E},\ \lambda = b_+ b_- \equiv \sqrt{m^2 - E^2}$ и перейдем к переменной $z = 2\lambda(|x| + a)$. Вводя функции

$$\psi_1 = \frac{u + v}{b_-}, \qquad \psi_2 = \frac{u - v}{b_+}, \tag{39}$$

после простых преобразований приходим к следующим уравнениям для u и v:

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{2EZ\alpha-\lambda}{2\lambda z}+\frac{(Z\alpha)^2}{z^2}\right)u=0, \tag{40}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dv}{dz}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{2EZ\alpha+\lambda}{2\lambda z}+\frac{(Z\alpha)^2}{z^2}\right)v=0. \tag{41}$$

Решения уравнений (40) и (41) в области положительных x, убывающие при $x\to\infty$, выражаются через функции Уиттекера

$$u=\frac{AW_{\beta-\frac{1}{2},i\rho}(z)}{\sqrt{z}},\qquad v=\frac{BW_{\beta+\frac{1}{2},i\rho}(z)}{\sqrt{z}}, \tag{42}$$

здесь

$$\beta=\frac{EZ\alpha}{\lambda},\quad \rho=Z\alpha. \tag{43}$$

Решение системы уравнений (38) имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_1&=\frac{AW_{\beta-\frac{1}{2},i\rho}(z)+BW_{\beta+\frac{1}{2},i\rho}(z)}{b_-\sqrt{z}},\\ \psi_2&=-\frac{AW_{\beta-\frac{1}{2},i\rho}(z)-BW_{\beta+\frac{1}{2},i\rho}(z)}{b_+\sqrt{z}},\end{aligned} \tag{44}$$

а связь между постоянными A и B определяется соотношением $A\lambda=BZ\alpha m$. Волновые функции в области $-\infty<x<0$ получаются аналогично. Решения можно классифицировать по четности: 1) четные ψ_1, нечетные ψ_2; 2) четные ψ_2, нечетные ψ_1.

Уравнения для определения спектра энергий фермиона в поле (35), очевидно, можно получить из условий $\psi_2(0)=0$ для случая 1 и $\psi_1(0)=0$ для случая 2. При малых $am\ll 1$ с учетом разложения функций Уиттекера вблизи нуля (29) и формулы (30) нетрудно получить трансцендентное уравнение, неявно определяющее спектр энергий фермиона в виде

$$\rho\ln(2\lambda a)+\arg\Gamma(-\beta+i\rho)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\rho}{\beta}-\arg\Gamma(2i\rho)=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right), \tag{45}$$

где n – целое число, нумерующее уровни энергии. Низшему уровню энергии соответствует значение $n=-1$.

Критический заряд существенно зависит от параметра a, т.е. от величины магнитного поля. При $am\ll 1$, что соответствует сверхсильным магнитным полям $B\gg B_{\rm cr}$, величина критического заряда существенно меньше его значения в отсутствие магнитного поля. Так, решив уравнение (45) численно для $am=0.1$ ($B\sim 10^2B_{\rm cr}$), мы получили $Z_{\rm cr}\approx 93$. С уменьшением a (т.е. увеличением B) $Z_{\rm cr}$ также уменьшается, однако минимальное значение параметра a, разумеется, ограничено величиной радиуса реального ядра.

Любое из уравнений (40) и (41) можно записать и затем интерпретировать как стационарное одномерное уравнение Шредингера. Например, вводя функцию

$$u(z) = \frac{F(z)}{\sqrt{z}},$$

мы легко придем от уравнения (40) к уравнению (для $x > 0$)

$$\frac{1}{2m}\frac{d^2F}{dX^2} + \left(\frac{E^2 - m^2}{2m} + \frac{2Z\alpha E - \lambda}{2mX} + \frac{(2Z\alpha)^2 + 1}{8mX^2}\right)F = 0, \tag{46}$$

где $X = x + a$.

Уравнения (32) и (45) при $Z < Z_{\rm cr}$ определяют неявно спектр энергий связанных электронных состояний с $m > E > -m$. Можно показать, что решения этих уравнений при $Z < Z_{\rm cr}$ вещественны, однако при $Z > Z_{\rm cr}$ для низшего электронного состояния появляется формальное комплексное решение $E = E_0 - iw$, в котором

$$E_0 = -m - c_1\alpha(Z - Z_{\rm cr})$$

(c_1 – число порядка единицы), а мнимая часть (при $Z - Z_{\rm cr} \ll Z_{\rm cr}$) экспоненциально мала. Такое решение можно найти из формул (32) и (45), выполняя аналитическое продолжение E как функции от Z в (32) и (45) в область $Z > Z_{\rm cr}$. Однако при $Z - Z_{\rm cr} \ll Z_{\rm cr}$ величину мнимой части с точностью до предэкспоненциального множителя проще оценить другим способом. А именно появление мнимой части означает, что при $Z > Z_{\rm cr}$ соответствующее уравнение Дирака имеет лишь формальное решение с $E = E_0 - iw$ для электронных состояний. Однако то же уравнение при $Z > Z_{\rm cr}$ описывает и позитрон с энергией $E = m + c_1\alpha(Z - Z_{\rm cr})$. Очевидно, что уравнение Дирака, описывающее позитронные состояния при $Z > Z_{\rm cr}$, можно получить из уравнения Дирака для электронных состояний, заменив в нем E на $-E$ и Z на $-Z$. Поэтому позитронные состояния при $Z > Z_{\rm cr}$ являются квазистационарными.

При $Z - Z_{\rm cr} \equiv \Delta Z \ll Z_{\rm cr}$ ширину квазистационарного уровня w с точностью до предэкспоненциального множителя можно оценить в квазиклассическом приближении, вычисляя коэффициент прохождения через потенциальный барьер в уравнении (14) (для случая чисто кулоновского поля в $2 + 1$ измерениях) или в уравнении (46) (для случая внешних сверхсильного магнитного и кулоновского полей в 3+1 измерениях). Отметим, что ширина w равна половине обратного времени жизни позитрона в потенциальном барьере или удвоенной вероятности рождения пары кулоновским полем. При $\Delta Z \ll Z_{\rm cr}$ рождаемые полем позитроны очень медленные и кулоновский барьер для таких позитронов малопроницаем, вследствие чего вероятность рождения пары экспоненциально мала, т.е.

$$w \sim m\exp\left(-2\pi Z\alpha\left(\frac{m}{\sqrt{E^2 - m^2}} - 1\right)\right) \sim m\exp\left(-c_2\sqrt{\frac{Z_{\rm cr}}{\Delta Z}}\right),$$

где c_2 – численный множитель порядка единицы. Следует подчеркнуть, что экспоненциальная малость вероятности рождения пары имеет место только при $\Delta Z \ll Z_{\rm cr}$.

5. О РЕШЕНИИ С НУЛЕВОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Спектры энергий для частиц и античастиц будут симметричны для случая взаимодействия массивных фермионов со скалярным внешним полем $U(x) = -q/(|x| + a)$. Заметим, что теперь параметр a, хотя и является параметром обрезания, но не имеет смысла "магнитной длины". Соответствующие уравнения движения можно получить из системы (38) при изменении знака перед последним членом во втором уравнении этой системы и замены $Z\alpha$ на q. Однако решения уравнения Дирака в таком поле можно найти несколько проще, если использовать представление

$$\gamma^0 = \beta = \sigma_1, \quad \gamma^1 = i\sigma_3, \quad \alpha_1 = \sigma_2. \tag{47}$$

В этом представлении стационарное уравнение Дирака во внешнем скалярном поле $U(x)$ имеет вид

$$\left(-i\sigma_2 \frac{d}{dx} + \sigma_1(m + U(x))\right) \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Модель с таким взаимодействием представляет интерес прежде всего потому, что она приводит к существованию фермионного состояния с нулевой энергией. Покажем, что уравнение Дирака

$$\frac{d\psi_1}{dx} + \left(m - \frac{q}{|x| + a}\right)\psi_1 = E\psi_2, \qquad -\frac{d\psi_2}{dx} + \left(m - \frac{q}{|x| + a}\right)\psi_2 = E\psi_1 \tag{49}$$

имеет решение с нулевой энергией.

Связанные уравнения (49) легко привести к паре одномерных уравнений Шредингера для функций ψ_1 и ψ_2:

$$\frac{d^2\psi_1}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{qm}{\lambda z} + \frac{q(1-q)}{z^2}\right)\psi_1 = 0, \tag{50}$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{qm}{\lambda z} - \frac{q(1+q)}{z^2}\right)\psi_2 = 0. \tag{51}$$

Решения уравнений (50) и (51) в области положительных x, убывающие при $x \to \infty$, выражаются через функции Уиттекера

$$\psi_1(x) = AW_{g,q-1/2}(z), \qquad \psi_2(x) = BW_{g,q+1/2}(z) \tag{52}$$

с $g = qm/\lambda$.

Связь между постоянными A и B можно найти, подставляя (52) в (49) и используя рекуррентные соотношения для функций Уиттекера. В результате мы найдем, что $A(m - \lambda) = BE$. Волновые функции в области $-\infty < x < 0$ можно получить, заметив, что уравнения (49) инвариантны относительно преобразований $x \to -x$, $\psi_1(x) \to \psi_1(-x)$, $\psi_2(x) \to -\psi_2(-x)$, $E \to -E$ или преобразований $x \to -x$, $\psi_1(x) \to -\psi_1(-x)$, $\psi_2(x) \to$

$\psi_2(-x)$, $E \to -E$. Решения в полной области $-\infty < x < \infty$ можно классифицировать по четности: 1) четные ψ_1 и нечетные ψ_2, 2) четные ψ_2 и нечетные ψ_1.

Уравнения для определения спектра энергий фермиона в рассматриваемом внешнем скалярном поле, как и выше, можно получить из условия $\psi_2(0) = 0$ для случая 1 и условия $\psi_1(0) = 0$ для случая 2. Нетрудно показать, что в любом из этих случаев спектр энергий фермиона определяется уравнением

$$q - \frac{qm}{\lambda} = -n. \tag{53}$$

Следовательно, дискретный спектр энергий фермиона во внешнем скалярном поле $U(x) = -q/(|x| + a)$ имеет вид

$$E_n^2 = m^2\left[1 - \frac{q^2}{(q+n)^2}\right], \tag{54}$$

а соответствующее решение является изолированным. Энергия основного уровня $E_0 = 0$ как для частицы, так и для античастицы.

Для решения с нулевой энергией $B = 0$, а функция $\Psi_0(x)$ имеет вид (при положительных x)

$$\Psi_0(x) = W_{q,q-1/2}(2m(x+a))\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{55}$$

Покажем, что решение (55) описывает зарядово-сопряженное состояние. В $1+1$ измерениях при представлении (47) в качестве матрицы зарядового сопряжения (в области $x > 0$) можно использовать равенство $C = \sigma_3$. Действительно, если решение уравнения (49) Ψ_n с энергией E_n найдено, то очевидно, что $\Psi_n^c \equiv \sigma_3\Psi_n^*$ также является решением, но с энергией $-E_n$. В частности, для решения с нулевой энергией (64) легко проверить, что $\sigma_3\Psi_0 = \Psi_0$.

При квантовании энергетический спектр квантовых состояний в присутствии такой "нулевой моды" не должен изменяться, по крайней мере вплоть до порядка $\hbar$, однако, как показано в статье [15], другие свойства квантовых состояний, ассоциируемые с этими уровнями, оказываются измененными. Так, в присутствии зарядово-сопряженного состояния с нулевой энергией разложение операторов квантованного поля Дирака имеет вид

$$\widehat{\Psi}(t,x) = c_0\Psi_0(x) + \sum_{n\geqslant 1}\left(c_n e^{-iE_n t}\Psi_n^{(+)}(x) + d_n^+ e^{iE_n t}\Psi_n^{(-)}(x)\right), \tag{56}$$

где $\Psi_n^{(\pm)}$ – нормированные положительно- и отрицательно-частотные собственные функции, а $\pm E_n$ – собственные значения одночастичного гамильтониана Дирака во внешнем поле. Операторы c_0, c_n и d_n подчиняются стандартным антикоммутационным соотношениям $\{c_n, c_k^+\} = \delta_{nk}$, $n,k = 0,1,\ldots$, $\{d_n, d_k^+\} = \delta_{nk}$, $n,k = 1,2,\ldots$. Все остальные антикоммутаторы равны нулю.

Используя формулу (56), нетрудно установить, что имеются два независимых вырожденных состояния с нулевой энергией и фермионными зарядами $Q = \pm 1/2$ [15, 16]. Если бы можно было измерить электрический заряд фермионов этой двумерной модели в

присутствии зарядово-сопряженного состояния с нулевой энергией, например поместив модель в слабое внешнее электромагнитное поле A_μ, то электрический заряд фермионов, который обнаруживался бы полем A_μ, был бы равен eQ, т.е. был бы полуцелым. В отсутствие внешнего скалярного поля фермионы обладали бы целым электрическим зарядом.

Благодарности. В заключение я хотел бы поблагодарить Чон Лин Хо (Choon-Lin Ho) за ценные замечания.

Список литературы

[1] *A. M. J. Schakel, G. W. Semenoff*. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2653.
[2] *A. Neagu, A. M. J. Schakel*. Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 1785.
[3] *V. R. Khalilov*. Electrons in Strong Electromagnetic Fields: an Advanced Classical and Quantum Treatment. Amsterdam: Gordon & Breach Sci. Publ., 1996.
[4] *С. С. Герштейн, Я. Б. Зельдович*. ЖЭТФ. 1969. Т. 57. С. 654.
[5] *J. Reinhardt, W. Greiner*. Rep. Progr. Phys. 1977. V. 40. P. 219.
[6] *J. Rafelski, L. P. Fulcher, A. Klein*. Phys. Rep. C. 1978. V. 38. P. 227.
[7] *M. Soffel, B. Müller, W. Greiner*. Phys. Rep. C. 1982. V. 85. P. 51.
[8] *В. С. Попов*. Электродинамика сверхсильных кулоновских полей ($Z > 137$). Препринт ИТЭФ-169. М.: ИТЭФ, 1980.
[9] *Я. Б. Зельдович, В. С. Попов*. УФН. 1971. Т. 105. С. 403.
[10] *А. Б. Мигдал*. Фермионы и бозоны в сильных полях. М.: Наука, 1978.
[11] *А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко*. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.
[12] *V. R. Khalilov, C. L. Ho*. Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 615; *В. Р. Халилов*. ТМФ. 1998. Т. 116. № 2. С. 277.
[13] *I. Pomeranchuk, Ya. Smorodinsky*. J. Phys. USSR. 1945. V. 9. P. 97.
[14] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963.
[15] *R. Jackiw, C. Rebbi*. Phys. Rev. D. 1976. V. 13. P. 3398.
[16] *Р. Раджараман*. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.

Поступила в редакцию 27.IV.1999 г.