G. M. Adel'son-Vel'skii, A. A. Leman, An algorithm for a rapid determination of the pseudo-maxima of a function given on an integer lattice in the case of bounded memory, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1966, Volume 167, Number 4, 772–774

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 519.95 *КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

Г. М. АДЕЛЬСОН-ВЕЛЬСКИЙ, А. А. ЛЕМАН

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ БЫСТРОГО ОТЫСКАНИЯ ПСЕВДОМАКСИМУМОВ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НА ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКЕ, ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ ПАМЯТИ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 1 VII 1965)

1. Рассмотрим множество M узлов $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ k-мерной целочисленной решетки, координаты которых удовлетворяют соотношениям $1 \leqslant x_k \leqslant \ldots \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant n$. Пусть на множестве M задана функция $f(X)$ такая, что $f(Y) \neq f(X)$, если $Y \neq X$. Один из алгоритмов узнавания, предложенный П. Е. Куниным, приводит к задаче о разбиении множества M, определяемом следующим образом. Пусть $X^{\mathrm{I}} = (x_1^{\mathrm{I}}, x_2^{\mathrm{I}}, \ldots, x_k^{\mathrm{I}})$ — точка множества M, в которой функция $f(X)$ достигает максимума. Исключим из рассмотрения все точки плоскостей $x_i = x_j^{\mathrm{I}}$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. На оставшемся множестве снова найдем точку максимума функции $f(X)$ и, обозначив ее через $X^{\mathrm{II}} = (x_1^{\mathrm{II}}, x_2^{\mathrm{II}}, \ldots, x_k^{\mathrm{II}})$, исключим из рассмотрения все точки плоскостей $x_i = x_j^{\mathrm{II}}$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Продолжая этот процесс, мы получим некоторое разбиение R_f множества M. Очевидно, что разбиение R_f полностью определяется последовательностью $\Xi = \{X^{\mathrm{I}}, X^{\mathrm{II}}, \ldots\}$; очевидно также, что последовательность Ξ состоит не более чем из n точек.

Понятно, что для определения разбиения R_f небходимо не менее чем Cn^k раз обратиться к вычислению функции $f(X)$, так как, например, все точки множества M должны быть просмотрены. Ясно также, что необходимый объем памяти не может быть меньше чем Cn, так как уже сама последовательность Ξ может содержать n точек.

Теорема 1. *Существует алгоритм отыскания разбиения R_f и последовательности Ξ, использующий $C_1 n^k$ обращений к вычислению функции $f(X)$ и требующий объема памяти $C_2 n$.*

2. Через $M(a)$ обозначим множество точек $X \in M$, хотя бы одна координата которых равна a.

Определение. Пусть N — некоторое подмножество множества M. Точка $\bar{X} \in N$ называется k-максимумом на множестве N, если $f(\bar{X}) > f(Y)$ при всех $Y \in N \cap \bigcup\limits_{i=1} M(\bar{x}_i)$.

Лемма 1. *Пусть неким способом найдены некоторые точки совокупности Ξ и точки соответствующих плоскостей исключены из рассмотрения. Тогда всякий k-максимум на оставшемся множестве M' принадлежит Ξ.*

В самом деле, k-максимум $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0)$ может быть исключен их множества M' только в том случае, если существует такое множество $M(x_s^0)$ и такая точка $Y \in M' \cap M(x_s^0)$, что $f(Y) > f(X^0)$. Последнее неравенство, однако, невозможно по определению k-максимума.

Предлагаемый алгоритм основан на последовательном отыскании k-максимумов.

Определение. Пусть N — некоторое подмножество множества M. Последовательность точек $U^1, U^2, \ldots, U^s$ множества N мы будем называть правильной, если выполнены следующие условия:

1. $f(U^1) < f(U^2) < \ldots < f(U^s)$.

2. $U^a \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{k} M(u_i^b)$; $a, b = 1, 2, \ldots, k$; $a < b-1$.

Правильная последовательность называется **полной**, если U^s есть k-максимум на множестве N.

Укажем способ построения полных правильных последовательностей. Пусть U^1 — любая точка множества N. Если уже построена правильная последовательность $U^1, U^2, \ldots, U^i$ и точка U^i есть k-максимум, то полная правильная последовательность построена. В противном случае в качестве U^{i+1} выберем точку, в которой достигается максимум функции $f(X)$ на множестве $N \cap \bigcup_{j=1}^{k} M(u_j^i)$. Очевидно, что всякая правильная последовательность не более чем через n шагов достраивается до полной.

Построим на множестве M полную последовательность, начиная с произвольной точки U^1 : $U^1, U^2, \ldots, U^s$. По определению, U^s есть k-максимум и, в силу леммы 1, $U^s \in \Xi$. Исключив из множества M все точки $X \in \bigcup_{i=1}^{k} M(u_i^s)$, мы получим некоторое множество M^1 с уже построенной в нем правильной последовательностью $U^1, U^2, \ldots, U^{s-2}$ (легко видеть, что все эти точки не попали в число исключенных). Если последовательность $U^1, U^2, \ldots, U^{s-2}$ уже полная, то $U^{s-2} \in \Xi$; исключив из множества M^1 все точки $X \in \bigcup_{i=1}^{k} M(u_i^{s-2})$, мы получим множество M^2 и правильную последовательность $U^1, U^2, \ldots, U^{s-4}$ в нем и т. д.

Пусть мы получили таким образом некоторое множество M^l с правильной, но неполной последовательностью $U^1, U^2, \ldots, U^{s-2l}$ в нем. Достроив эту последовательность до полной, мы получим новый k-максимум и т. д. Назовем объединение всех построенных таким способом правильных полных последовательностей с начальной точкой U^1 **деревом** U.

Пусть дерево U содержит m_u полных правильных последовательностей и, следовательно, m_u k-максимумов.

Лемма 2. *Общее количество вершин дерева U не превосходит $2m_u$.*

Действительно, пусть U^α — произвольная вершина дерева U, не являющаяся k-максимумом. Тогда точка U^α в некоторый момент была исключена из рассмотрения вместе с неким k-максимумом U^β. Однако в каждый момент в дереве присутствуют (и еще не являются исключенными) только вершины, принадлежащие одной правильной последовательности. Из определения правильной последовательности ясно, что вершина U^α может лишь непосредственно предшествовать k-максимуму U^β. Таким образом, все вершины дерева (кроме, быть может, вершины U^1) разбиваются на непересекающиеся пары, состоящие из k-максимумов и предшествующих им точек, что и доказывает лемму.

Следствие. *Построение дерева U, содержащего m_u k-максимумов, требует не более чем $Cm_u n^{k-1}$ обращений к вычислению функции $f(X)$.*

В самом деле, каждый шаг построения дерева связан с отысканием максимума функции $f(X)$ на некотором подмножестве одного из множеств $M(a)$. В каждой вершине U^i дерева U приходится привлекать в рассмотрение k таких множеств и притом столько раз, сколько существует k-максимумов вида U^{i+2}. Так как при этом число вершин дерева не превосходит $2m_u$, а количество точек решетки, содержащихся в множестве $M(a)$, равно C_{n+k-2}^{k-1}, то

$$C = \frac{3k}{(k-1)!}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{k-2}{n}\right) \leqslant \frac{3k}{(k-1)!}\, e^{2/3\, k^2/n}.$$

Пусть дерево U окажется полностью построенным до того, как все точки множества M будут исключены (и, следовательно, до того, как все точки совокупности Ξ будут получены). Обозначим множество исключенных точек через M_u. На множестве $M \setminus M_u$ можно с помощью описанного процесса построить новое дерево, начав с любой точки V^1,— дерево V. Если M_v — множество точек, исключенных при построении дерева V, и $M \neq \neq M_u \cup M_v$, то наш процесс можно продолжить, начав с произвольной точки W^1 множества $M \setminus (M_u \cup M_v)$.

Так как всего может быть построено не более n деревьев, то с построением некоторого дерева T все точки множества M будут исчерпаны: $M = M_u \cup M_v \cup \ldots \cup M_t$; при этом, очевидно, имеет место неравенство $m_u + m_v + \ldots + m_t \leqslant n$. Объединяя это неравенство со следствием леммы 2, мы получаем доказательство первого утверждения теоремы:

$$\frac{3k}{(k-1)!}e^{2/_3 k^2/n}(m_u + m_v + \ldots + m_t) \leqslant \frac{3k}{(k-1)!}e^{2/_3 k^2/n}n,$$

так что $C_1 \leqslant \frac{3k}{(k-1)!}e^{2/_3 k^2/n}$.

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно заметить, что общее количество точек во всех деревьях $U, V, \ldots, T$ не превосходит $2(m_u + m_v + \ldots + m_t)$, что, как показано выше, не более $2n$. Так как последовательность Ξ также состоит не более чем из n точек, то необходимый объем памяти не превосходит $3n$; $C_2 \leqslant 3$.

Замечание 1. Константу C_2 в действительности можно понизить до значения $C_2 = 2$, так как нам достаточно помнить только точки совокупности Ξ и той правильной последовательности, которую мы достраиваем до полной; при этом, если уже найдены l точек совокупности Ξ, то длина последовательности не более $2n - l$.

Замечание 2. Требование $f(X) \neq f(Y)$ при $X \neq Y$ можно отбросить. При этом разбиение R_f определяется неоднозначно, и задача ставится так: найти какое-нибудь разбиение R_f множества M, последовательность $\Xi = \{X^{\mathrm{I}}, X^{\mathrm{II}}, \ldots\}$, которого удовлетворяет условиям $f(X^{\mathrm{I}}) \geqslant \geqslant f(X^{\mathrm{II}}) \geqslant \ldots$. Теорема 1, очевидно, справедлива и для этого случая.

Замечание 3. Задачу, сформулированную в п. 1, можно обобщить следующим образом. Пусть дана функция $f(X)$, определенная на множества K вершин $X(x_1, \ldots, x_k)$ k-мерной целочисленной решетки, расположенных в кубе $1 \leqslant x_i \leqslant n$. Пусть G — некоторая подгруппа группы P_k перестановок из k элементов. Пусть, далее, известно, что $f(Y) = f(X)$ для всех тех и только тех точек Y, координаты которых получаются из координат точки X перестановками, принадлежащими подгруппе G.

Обозначим через M множество, получающееся из множества K после его факторизации по подгруппе G. Тогда разбиение R_f множества M и последовательность Ξ определяются совершенно аналогично тому, как это сделано в п. 1. Теорема 1 полностью переносится на этот случай. Отметим только, что вместо множеств $M(a)$ придется рассматривать множества, получающиеся после факторизации по подгруппе G из множеств точек плоскостей $x_i = a$.

Заметим также, что величина константы C_1 зависит, вообще говоря, от группы G; значение же C_2 не превосходит 2.

Поступило
9 VI 1965