В. В. Арестов, О наилучшем равномерном приближении операторов дифференцирования,
Матем. заметки, 1969, том 5, выпуск 3, 273–284

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 5, № 3 (1969), 273—284

УДК 517.5

О НАИЛУЧШЕМ РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В. В. Арестов

Изучается существование и единственность экстремального оператора в задаче С. Б. Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования ограниченными операторами. Библ. 6 назв.

Пусть k, n $(0 \leqslant k < n)$ — целые числа; $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$; $L_p = L_p(-\infty, \infty)$ при $p < \infty$ есть пространство функций φ, интегрируемых с p-й степенью на всей числовой оси:

$$\|\varphi\|_{L_p} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^p\, dt\right\}^{1/p};$$

$L_\infty = C = C(-\infty, \infty)$ — пространство непрерывных ограниченных функций; L_p^n — множество дифференцируемых функций f, производная $(n-1)$-го порядка которых абсолютно непрерывна на каждом конечном интервале и $\|f^{(n)}\|_{L_p} < \infty$, величину $\|f^{(n)}\|_C$ понимаем в следующем смысле:

$$\|f^{(n)}\|_C = \sup_{x \neq y} \frac{|f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(y)|}{|x-y|}.$$

K_p^n — класс функций $f \in L_p^n$ таких, что $\|f^{(n)}\|_{L_p} \leqslant 1$; $\mathfrak{N}_{p,r}^n = L_r L_p^n$ и $\mathfrak{M}_{p,r}^n = L_r K_p^n$ есть пересечение пространства L_r соответственно с классами L_p^n и K_p^n; $\mathfrak{L}_{p,r}^n$ — множество функций вида $f^{(n)}$, когда $f \in \mathfrak{N}_{p,r}^n$.

Мы будем рассматривать задачу С. Б. Стечкина [1] о наилучшем приближении на классе $\mathfrak{M}_{p,r}^n$ оператора дифференцирования k-го порядка ограниченными операторами. Положим

$$E(N)_C = E_{p,r}^{n,k}(N)_C = \inf_{\|S\|_{L_r}^C \leqslant N} \sup_{f \in \mathfrak{M}_{p,r}^n} \|f^{(k)}(x) - S(x, f)\|_C, \quad (1)$$

где линейный оператор S отображает пространство L_r в пространство C и имеет норму, ограниченную числом $N > 0$. Задача состоит в том, чтобы вычислить $E(N)_C$ и исследовать вопрос о существовании и единственности экстремального оператора S_N, для которого

$$\|S_N\|_{L_r}^C \leqslant N, \quad E(N)_C = \sup \|f^{(k)}(x) - S_N(x, f)\|_C,$$

где верхняя грань берется по множеству $\mathfrak{M}_{p,r}^n$.

Впервые эта задача изучалась С. Б. Стечкиным [1]; в частности, он нашел экстремальные операторы и величину (1) для $p = r = \infty$, $n = 2,3$. Л. В. Тайков [2] вычислил величину (1) и выписал экстремальные операторы при $p = r = 2$ и всех $0 \leqslant k < n$. Для функций класса $\mathfrak{M}_{p,r}^n$ справедливо следующее неравенство (см. [3])

$$\|f^{(k)}\|_C \leqslant Q \|f\|_{L_r}^{\alpha} \|f^{(n)}\|_{L_p}^{\beta}, \quad (2)$$

где $\alpha = (n - k - p^{-1})/(n - p^{-1} + r^{-1})$, $\beta = 1 - \alpha$ и константа $Q = Q(p, r, k, n)$ не зависит от функции f.

В настоящей заметке исследуется вопрос о существовании и единственности экстремального оператора задачи (1) и экстремальной функции в наилучшем неравенстве (2).

Из дальнейших рассмотрений мы сразу исключим тривиальный случай, когда одновременно $k = 0$, $r = \infty$.

ТЕОРЕМА 1. *Величина $E(N)_C$ конечна для любых значений параметров $0 \leqslant k < n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $N > 0$, причем имеет место равенство*

$$E(N)_C = N^{-(n-k-p^{-1})/(k+r^{-1})} E(1)_C. \quad (3)$$

В случае $p = r = \infty$ это предложение доказано С. Б. Стечкиным [1]. Повторяя его рассуждения, можно показать, что если линейный оператор $S(x, f(t))$ имеет конечную норму из L_r в C и

$$\rho(S)_C = \sup_{f \in \mathfrak{M}_{p,r}^n} \|f^{(k)}(x) - S(x, f)\|_C < \infty,$$

то, положив $S'(x, f(t)) = h^{-k} S(xh^{-1}, f(ht))$, при любом $h > 0$ получим

$$\| S' \|_{L_r}^C = h^{-k-r^{-1}} \| S \|_{L_r}^C, \ \rho(S')_C = h^{n-k-p^{-1}} \rho(S)_C. \tag{4}$$

Из этого будут легко следовать все утверждения теоремы, если мы докажем конечность величины (1) при каком-либо конкретном значении N.

Выберем полином $\varphi(t)$ так, чтобы

$$\int_0^1 t^i \varphi(t)\,dt = \begin{cases} k!, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k, \quad 0 \leqslant i < n; \end{cases} \tag{5}$$

тогда оператор

$$T(x, f) = \int_0^1 f(x+t)\,\varphi(t)\,dt$$

является линейным из L_r в C при любом $1 \leqslant r \leqslant \infty$.

Если функция $f \in L_p^n$, то, разлагая ее в ряд Тейлора в окрестности точки x, согласно (5) имеем

$$f^{(k)}(x) - T(x, f) = \int_0^1 \psi(\xi) f^{(n)}(x+\xi)\,d\xi = \Delta(x, f^{(n)}),$$

где

$$\psi(\xi) = -\frac{1}{(n-1)!} \int_\xi^1 (t-\xi)^{n-1} \varphi(t)\,dt.$$

Отсюда $E(\| T \|_{L_r}^C)_C \leqslant \rho(T)_C \leqslant \| \psi \|_{L_{p'}(0,1)} < \infty$.

Теорема доказана.

Формула (4) позволяет утверждать, что при $n - k - p^{-1} > 0$ норма каждого экстремального оператора в точности равна N.

Мы будем рассматривать несколько иную задачу, а затем покажем, что из ее решения следует решение исходной. Пусть

$$E(N) = E_{p,r}^{n,k}(N) = \inf_{\|U\|_{L_r} \leqslant N} \ \sup_{f \in \mathfrak{M}_{p,r}^n} | f^{(k)}(0) - U(f) |, \tag{6}$$

где нижняя грань берется по всем линейным функционалам U в пространстве L_r, норма $\| U \| = \| U \|_{L_r}$ которых ограничена числом $N > 0$. Здесь возникают те же вопросы, что и в задаче (1). Положим

$$\rho(U) = \sup_{f \in \mathfrak{M}_{p,r}^n} | f^{(k)}(0) - U(f) |, \tag{7}$$

и будем называть функционал U_N *экстремальным* в задаче (6), если $\|U_N\| \leqslant N$, $\rho(U_N) = E(N)$.

Утверждения теоремы 1 без существенных изменений переносятся на эту задачу.

В дальнейшем мы считаем параметры k, n, p, r, N фиксированными.

Докажем несколько вспомогательных предложений.

ЛЕММА 1. *Пусть при* $1 < p < \infty$ *для некоторого линейного функционала* U *величина* $\rho(U) < \infty$; *тогда существует функция* $\eta \in L_q$ $(q = p/(p-1))$ *такая, что* $\|\eta\|_{L_q} = \rho(U)$ *и имеет место равенство*

$$U(f) = f^{(k)}(0) - \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) f^{(n)}(t)\,dt, \quad f \in \mathfrak{N}^n_{p,r}. \tag{8}$$

Каждая функция класса $\mathfrak{N}^n_{p,r}$ своей производной n-го порядка определяется однозначно при $r < \infty$ и с точностью до константы при $r = \infty$; в случае $r = \infty$ функционал U должен удовлетворять равенству $U(1) = 0$, поэтому всегда

$$f^{(k)}(0) - U(f) = D(f^{(n)}), \quad f \in \mathfrak{N}^n_{p,r}. \tag{9}$$

Линейное множество $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^n_{p,r}$ будем рассматривать как подмножество пространства L_p, функционал D, очевидно, будет на нем линеен и $\|D\|_{\mathfrak{L}} = \rho(U)$; продолжая его по теореме Хана — Банаха на все пространство L_p с сохранением нормы, получаем все утверждения леммы.

Произвольный линейный функционал U в пространстве C можно записать в виде суммы двух линейных функционалов:

$$U = U_0 + U_\infty, \tag{10}$$

где

$$U_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dg(t), \quad f \in C, \tag{11}$$

g — некоторая функция ограниченной вариации, а функционал U_∞ равен нулю на каждой финитной непрерывной функции; кроме того,

$$\|U\| = \|U_0\| + \|U_\infty\|. \tag{12}$$

Однако справедлива

ЛЕММА 2. *В случае* $r = \infty$, $1 < p < \infty$, *любой экстремальный функционал задачи* (6) *имеет вид* (11).

Пусть функция $\theta(t)$ по крайней мере n раз непрерывно дифференцируема, $|\theta(t)| \leqslant 1$ при всех t, $\theta(t) = 0$, если $|t| \geqslant 2$ и $\theta(t) = 1$, если $|t| \leqslant 1$.

Для функции $f \in \mathfrak{N} = CL_p^n$ положим $f_\delta(t) = \theta(t\delta^{-1}) \times f(t)$ и покажем, что

$$\lim_{\delta\to\infty} \| f_\delta^{(n)} - f^{(n)} \|_{L_p} = 0. \tag{13}$$

Действительно, применяя неравенство Минковского и формулу Лейбница, имеем

$$\| f_\delta^{(n)} - f^{(n)} \|_{L_p} \leqslant \left\{ \int_{|t|\geqslant\delta} | f^{(n)} |^p \, dt \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{|t|\geqslant\delta} | f_\delta^{(n)} |^p \, dt \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left\{ \int_{|t|\geqslant\delta} | f^{(n)} |^p \, dt \right\}^{1/p} + \sum_{i=1}^n C_n^i \delta^{-i} \| \theta^{(i)} (t\delta^{-1}) \, f^{(n-i)}(t) \|_{L_p}.$$

Из неравенства (2) вытекает существование константы $G > 0$, для которой $\|f^{(j)}\|_C \leqslant G$ при всех $0 \leqslant j < n$, поэтому

$$\| f_\delta^{(n)} - f^{(n)} \|_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left\{ \int_{|t|\geqslant\delta} | f^{(n)} |^p \, dt \right\}^{1/p} + G \sum_{i=1}^n C_n^i \delta^{-i+\frac{1}{p}} \| \theta^{(i)} \|_{L_p},$$

а из этого следует (13).

Норма каждого экстремального функционала U задачи (6) достигается на множестве $\mathfrak{N}$, так что найдется последовательность функций $f_m \in \mathfrak{N}$ со свойствами

$$\lim_{m\to\infty} U(f_m) = \| U \| = N, \quad \| f_m \|_C = 1.$$

Зададим произвольно числа $\varepsilon_m \downarrow 0$ и выберем последовательность $\{\delta_m\}$ так, чтобы функции $\varphi_m(t) = \theta(t\delta_m^{-1}) \, f_m(t)$ удовлетворяли неравенствам

$$0 \leqslant 1 - \| \varphi_m \|_C \leqslant \varepsilon_m, \quad \| \varphi_m^{(n)} - f_m^{(n)} \|_{L_p} \leqslant \varepsilon_m.$$

В силу леммы 1 имеем

$$U(\varphi_m) = U(f_m) + \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \, \{ f_m^{(n)}(t) - \varphi_m^{(n)}(t) \} \, dt$$

и, значит,

$$\lim_{m\to\infty} U(\varphi_m) = \lim_{m\to\infty} U(f_m) = \| U \|, \quad \lim_{m\to\infty} \| \varphi_m \|_C = 1.$$

Функционал U представим в форме (10); тогда из (12) получим $\lim_{m\to\infty} U_\infty(\varphi_m) = \|U_\infty\|$, но функции φ_m финитные, поэтому $U_\infty(\varphi_m) = 0$ и $\|U_\infty\| = 0$, т. е. $U = U_0$, ч. т. д.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $1 < p < \infty$ *или* $1 < r < \infty$, $n - k - p^{-1} > 0$, *то задача* (6) *имеет единственный экстремальный функционал.*

Обозначим через $\{U_m\}$ последовательность линейных функционалов со свойствами: $\|U_m\| \leqslant N$, $\rho(U_m) \to E(N)$, $m \to \infty$. Пространство L_r сепарабельно, поэтому любой шар в сопряженном пространстве слабо компактен, т. е. из последовательности $\{U_m\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому функционалу U. Очевидно, что $\|U\| \leqslant N$, $\rho(U) \leqslant E(N)$ и значит U — экстремальный функционал.

Допустим, что существуют два экстремальных функционала U_0 и U_1; положим

$$U_\tau = (1 - \tau)\ U_0 + \tau U_1, \quad \tau \in [0,\ 1].$$

Пусть $1 < p < \infty$, тогда из леммы 1 вытекает существование функций η_0, η_1 таких, что $\|\eta_0\|_{L_q} = \|\eta_1\|_{L_q} = E(N)$, и для $f \in \mathfrak{N}^n_{p,r}$ справедливо равенство

$$f^{(k)}(0) - U_\tau(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)\{(1-\tau)\eta_0(t) + \tau\eta_1(t)\}\,dt.$$

Очевидно, имеем

$$E(N) \leqslant \rho(U_\tau) \leqslant$$
$$\leqslant \|(1-\tau)\eta_0 + \tau\eta_1\|_{L_q} \leqslant (1-\tau)\|\eta_0\|_{L_q} + \tau\|\eta_1\|_{L_q} = E(N)$$

и поэтому $\|(1-\tau)\eta_0 + \tau\eta_1\|_{L_q} = (1-\tau)\|\eta_0\|_{L_q} + \tau\|\eta_1\|_{L_q}$, но в силу равномерной выпуклости пространства L_q из этого следует, что почти всюду $\eta_1 = \eta_0$; таким образом, $U_1(f) = U_0(f)$, $f \in \mathfrak{N}^n_{p,r}$.

Предположим, что U_0 и U_1 не совпадают в пространстве L_r, т. е. существует функция $f \in L_r$, на которой

$$|U_1(f) - U_0(f)| = \varepsilon > 0. \tag{14}$$

Обозначим через $\{\sigma_m(t)\}$ последовательность n раз непрерывно дифференцируемых функций, обладающих свойствами: $|\sigma_m(t)| \leqslant 1$ при любом t, $\sigma_m(t) = 0$ для $|t| \geqslant m$,

$\sigma_m(t) = 1$ при $|t| \leqslant m - 1$. При достаточно большом m

$$|U_1(f\sigma_m) - U_0(f\sigma_m)| \geqslant \frac{2}{3}\varepsilon;$$

для $r < \infty$ это очевидно, а для $r = \infty$ следует из леммы 2.

Но по теореме Вейерштрасса существует алгебраический полином $P(t)$ такой, что $\|f - P\|_{L_r[-m, m]} \leqslant \varepsilon/6N$, для него имеем

$$|U_1(P\sigma_m) - U_0(P\sigma_m)| \geqslant |U_1(f\sigma_m) - U_0(f\sigma_m)| - \\ - |U_1((f - P)\sigma_m)| - |U_0((f - P)\sigma_m)| \geqslant \varepsilon/3 > 0,$$

а это противоречит (14), так как $P\sigma_m \in \mathfrak{N}^n_{p,r}$, следовательно, $U_1 = U_0$ на всем пространстве L_r.

Поскольку в наших случаях норма любого экстремального функционала равна N, то

$$\|U_\tau\| = (1 - \tau)\|U_0\| + \tau\|U_1\|,$$

но при $1 < r < \infty$ (в силу общего вида линейного функционала в L_r и строгой выпуклости $L_{r'}$, $r' = r/(r - 1)$) из этого следует, что $U_0 = U_1$. Теорема доказана.

Сейчас мы возвратимся к исходной задаче и докажем следующее предложение.

ТЕОРЕМА 3. *При* $1 < p < \infty$ *или* $1 < r < \infty$, $n - k - p^{-1} > 0$ *задача* (1) *имеет единственный экстремальный оператор* S_N, *причем*

$$S_N(x, f) = U_N(f(t + x)), \quad f \in L_r, \tag{15}$$

где $U_N(f(t))$ — *экстремальный функционал задачи* (6).

Линейный оператор (15) отображает L_r в C; в случае $r = \infty$ это следует из леммы 2, а в случае $r < \infty$ это очевидно; но $\|S_N\|^C_{L_r} \leqslant N$, поэтому

$$E(N) \leqslant E(N)_C \leqslant \sup_{f \in \mathfrak{M}^n_{p,r}} \|f^{(k)}(x) - S_N(x, f)\|_C \leqslant E(N)$$

и, значит, $E(N) = E(N)_C$.

Пусть S^* — произвольный экстремальный оператор задачи (1); тогда в каждой точке x должно быть

$$E(N)_C = \sup_{f \in \mathfrak{M}^n_{p,r}} |f^{(k)}(x) - S^*(x, f)|,$$

следовательно, функционал $U_x(f) = S^*(x, f(t - x))$ является экстремальным в задаче (6), но тогда в силу теоремы 2 имеем $S^*(x, f(t-x))=U_N(f)$, а из этого следует (15) и теорема 3 доказана.

Ясно, что при $1<p<\infty$ на классе $\mathfrak{N}_{p,r}^n$ оператор S_N представим в форме

$$S_N(x, f) = f^{(k)}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) f^{(n)}(x+t)\, dt, \tag{16}$$

причем $\|\eta\|_{L_q} = E(N)_C$ и функция η, как элемент пространства L_q, определяется единственным образом.

Наряду с задачей (1) С. Б. Стечкин [1] поставил задачу об исследовании величины

$$\widetilde{E}(N)_C = \inf_{\|S\|_{L_r}^C \leqslant N} \sup_{f \in K_p^n} \| f^{(k)}(x) - S(x, f)\|_C; \tag{17}$$

здесь каждый оператор S является линейным из L_r в C и имеет норму, ограниченную числом $N>0$, кроме того, он задан, однороден и аддитивен на множестве L_p^n, причем отображает это множество в пространство непрерывных (не обязательно ограниченных) функций.

ТЕОРЕМА 4. *При* $1<p<\infty$ *значение величин* (1), (17) *совпадают и задача* (17) *имеет единственный экстремальный оператор.*

Пусть оператор $\widetilde{S}_N$ в пространстве L_r совпадает с экстремальным оператором задачи (1), а на множество L_p^n распространен формулой (16); тогда он удовлетворяет всем требованиям, наложенным на допустимые операторы задачи (17), поэтому имеем

$$E(N)_C \leqslant \widetilde{E}(N)_C \leqslant \sup_{f \in K_p^n} \| f^{(k)}(x) - \widetilde{S}_N(x, f)\|_C =$$

$$= \sup_{f \in K_p^n} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) f^{(n)}(x+t)\, dt \right\|_C = \|\eta\|_{L_q} = E(N)_C,$$

таким образом, первая часть теоремы доказана.

Из нее следует, что каждый экстремальный оператор $\widetilde{S}$ задачи (17) будет экстремальным и в задаче (1), а поэтому в пространстве L_r он совпадет с оператором S_N, но продолжение оператора $\widetilde{S}$ на множество L_p^n определяется единственным образом и задается формулой (16); этим теорема доказана полностью.

Если
$$Q^* = Q^*(p, r, k, n) = \sup \| f^{(k)} \|_C \| f \|_{L_r}^{-\alpha} \| f^{(n)} \|_{L_p}^{-\beta},$$
где верхняя грань берется по функциям класса $\mathfrak{N}_{p,r}^n$, отличным от нуля (и константы при $r = \infty$), то, как обычно, отличную от константы функцию, на которой неравенство
$$\| f^{(k)} \|_C \leqslant Q^* \| f \|_{L_r}^{\alpha} \| f^{(n)} \|_{L_p}^{\beta} \tag{18}$$
обращается в равенство, будем называть *экстремальной*.

Наименьшая константа Q^* в неравенстве (3) для всех значений k, n при $p = r = \infty$ выписана А. Н. Колмогоровым [5], а при $p = r = 2$ Л. В. Тайковым [2]; для некоторых значений параметров p, r при $n \leqslant 2$ она найдена в работах [4], [6], причем в [5], [4], [6] исследовано множество экстремальных функций соответствующего неравенства.

ТЕОРЕМА 5. *Если параметры p, r таковы, что $1 < p < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$ или $1 < p \leqslant \infty$, $1 < r < \infty$, то для любой пары положительных чисел μ_0, μ_n существует единственная экстремальная функция и неравенства* (18), *удовлетворяющая условиям*
$$\| u \|_{L_r} = \mu_0, \quad \| u^{(n)} \|_{L_p} = \mu_n, \quad \| u^{(k)} \|_C = u^{(k)}(0). \tag{19}$$

Положим $\mu_k = Q^* \mu_0^{\alpha} \mu_n^{\beta}$ и отметим сразу, что в наших случаях α, β положительны. Пусть, далее
$$\Phi(f) = \| f^{(k)} \|_C \| f \|_{L_r}^{-\alpha} \| f^{(n)} \|_{L_p}^{-\beta},$$
а $\{v_m\}$ — последовательность функций, обладающих свойством: $\Phi(v_m) \to Q^*$ при $m \to \infty$.

Если $f \in \mathfrak{N}_{p,r}^n$ и $1 < p < \infty$ или $1 < r < \infty$, то справедливо утверждение: $f^{(k)}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$; в случае $n = 1$ оно установлено Надем [6], а для произвольного n доказывается аналогично. С другой стороны, легко проверить, что если $F(t) = Hf(th + y)$, где $H \neq 0$, $h > 0$, y — произвольные числа, то $\Phi(F) = \Phi(f)$. Следовательно, константы H_m, h_m, y_m можно выбрать так, чтобы функции $u_m(t) = H_m v_m(th_m + y_m)$ удовлетворяли условиям
$$\| u_m^{(k)} \|_C = u_m^{(k)}(0) = \mu_k, \quad \| u_m^{(n)} \|_{L_p} = \mu_n,$$
$$\lambda_m = \| u_m \|_{L_p} \xrightarrow[m \to \infty]{} \mu_0, \tag{20}$$

и так как $\lambda_m \geqslant \mu_0$, то последовательность $\{\lambda_m\}$ можно считать не возрастающей.

Согласно (18), неравенству Минковского и выбору последовательности $\{u_m\}$, при любых $m, \nu > 0$ для функции $u_{m,\nu} = \{u_{m+\nu} + u_m\}/2$ имеем соотношения

$$\mu_k = u^{(k)}_{m,\nu}(0) = \| u^{(k)}_{m,\nu} \|_C \leqslant Q^* \| u_{m,\nu} \|^{\alpha}_{L_r} \| u^{(n)}_{m,\nu} \|^{\beta}_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant Q^* \mu_0^{\alpha} \left(\frac{1}{2} \| u^{(n)}_{m+\nu} + u^{(n)}_m \|_{L_p} \right)^{\beta} \leqslant Q^* \mu_0^{\alpha} \lambda_m^{\beta},$$

$$\mu_k \leqslant Q^* \left(\frac{1}{2} \| u_{m+\nu} + u_m \|_{L_r} \right)^{\alpha} \lambda_m^{\beta} \leqslant Q^* \mu_0^{\alpha} \lambda_m^{\beta},$$

из которых следует, что при $m \to \infty$ равномерно по $\nu > 0$

$$\| u^{(n)}_{m+\nu} + u^{(n)}_m \|_{L_p} \to 2\mu_n, \qquad \| u_{m+\nu} + u_m \|_{L_r} \to 2\mu_0. \qquad (21)$$

Рассмотрим вначале случай $1 < p < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. В силу равномерной выпуклости и полноты пространства $L_p (1 < p < \infty)$ из (20) и (21) следует, что последовательность функций $z_m = u^{(n)}_m$ сходится в пространстве L_p к некоторой функции z.

Неравенство (2) влечет ограниченность числовых последовательностей $\{ \| u^{(i)}_m \|_C \}$ для $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, поэтому, если нужно, переходя к подпоследовательности, можем считать что $u^{(i)}_m (0) \to \gamma_i < \infty$, и, очевидно, $\gamma_k = \mu_k$.

Покажем, что функция

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\gamma_i}{i!} t^i + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t - \xi)^{n-1} z(\xi)\, d\xi$$

является одной из экстремальных в (18) и удовлетворяет условиям (19). Очевидно, что $u_m(t) \to u(t)$ равномерно на каждом конечном интервале изменения аргумента t, поэтому, переходя в неравенстве

$$\| u \|_{L_r[-d,d]} \leqslant \| u - u_m \|_{L_r[-d,d]} + \lambda_m$$

к пределу при $m \to \infty$, а затем при $d \to \infty$, получаем $\|u\|_{L_r} \leqslant \mu_0$. Но $\|u^{(n)}\|_{L_r} = \|z\|_{L_r} = \mu_n$ и $\| u^{(k)} \|_C \geqslant u^k(0) = \mu_k$. Теперь из неравенства (18) следует, что на самом деле выполнены равенства (19) и функция u — экстремальная в (18).

Если $1 < r < \infty$, то из (21) в силу равномерной выпуклости пространства $L_r (1 < r < \infty)$ вытекает, что $\{u_m\}$—последовательность Коши в пространстве L_r,но согласно (2) последовательности производных $\{u_m^{(i)}\}$ при любом $0 \leqslant i \leqslant \leqslant n-1$ являются последовательностями Коши в пространстве C, поэтому найдется функция $u \in C$, которая $n-1$ раз непрерывно дифференцируема и $\|u_m^{(i)} - u^{(i)}\|_C \to 0$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Из этого, в частности, имеем $\|u^{(k)}\|_C = u^{(k)}(0) = \mu_k$ и, точно так же как в предыдущем случае, убеждаемся, что $\|u\|_{L_r} = \mu_0$.

Нужно рассмотреть лишь значение $p = \infty$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в соотношении

$$|u_m^{(n-1)}(x) - u_m^{(n-1)}(y)| \leqslant \mu_n |x-y|,$$

получаем $\|u^{(n)}\|_C \leqslant \mu_n$.

Теперь уже легко проверить, что функция u — экстремальная в неравенстве (18) и для нее выполнены условия (19).

Нам осталось доказать единственность экстремальной функции. Допустим, что существует еще одна функция $v \in \mathfrak{N}_{p,r}^n$, у которой

$$\|v\|_{L_r} = \mu_0, \quad \|v^{(k)}\|_C = v^{(k)}(0) = \mu_k, \quad \|v^{(n)}\|_{L_p} = \mu_n.$$

Записывая (18) для функции $w = \frac{1}{2}(u+v)$, а затем применяя неравенство Минковского, будем иметь

$$\mu_k = \|w^{(k)}\|_C \leqslant Q^* \|w\|_{L_r}^{\alpha} \|w^{(n)}\|_{L_p}^{\beta} \leqslant Q^* \mu_0^{\alpha} \mu_n^{\beta} = \mu_k,$$

но это влечет два следующих равенства:

$$\|u^{(n)} + v^{(n)}\|_{L_p} = \|u^{(n)}\|_{L_p} + \|v^{(n)}\|_{L_p} = 2\mu_n,$$
$$\|u+v\|_{L_r} = \|u\|_{L_r} + \|v\|_{L_r} = 2\mu_0.$$

В силу свойства равномерной выпуклости в случае $1 < r < \infty$ сразу получаем $v = u$; если же $1 < p < \infty$, то почти всюду $v^{(n)} = u^{(n)}$, но экстремальная функция своей n-й производной определяется однозначно; следовательно, во всех рассматриваемых нами случаях $v = u$. Теорема доказана.

Свердловское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
22.XI.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С т е ч к и н С. Б., Наилучшее приближение линейных операторов, Матем. заметки, **1**, № 2 (1967), 137—148.

[2] Т а й к о в Л. В., Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования, Матем. заметки, **4**, № 2 (1968), 233—238.

[3] Г а б у ш и н В. Н., Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p, Матем. заметки, **1**, № 3 (1967), 291—298.

[4] Г а б у ш и н В. Н., Точные константы в неравенствах между нормами производных функции, Матем. заметки, **4**, № 2 (1968), 221—232.

[5] К о л м о г о р о в А. Н., О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале, Уч. зап. Моск. ун-та, **30**. Математика, кн. 3 (1939), 3—16.

[6] S z.-N a g y B., Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung, Acta Univ. Szeged, sect. Sci. Math., **10** (1941), 64—74.