V. I. Korzhik, L. N. Smirnov, Error Probability in a Channel with Fading and Signallike Noise,
Probl. Peredachi Inf., 1977, Volume 13, Issue 1, 19–25

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XIII 1977 Вып. 1

УДК 621.391.16

ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ В КАНАЛЕ С ЗАМИРАНИЯМИ И ПОМЕХАМИ, ПОХОЖИМИ НА СИГНАЛ

В. И. Коржик, Л. Н. Смирнов

Доказывается, что для канала без замираний всегда существует такая аддитивная гауссовская помеха, для которой вероятность ошибки при оптимальном приеме многочастотных сигналов однозначно определяется отношением мощности сигнала к мощности помехи, а при появлении замираний в канале и любой гауссовской помехе – вероятность ошибки может быть сделана сколь угодно малой при увеличении числа гармонических составляющих сигналов; это объясняется случайным характером сигнала при замираниях.

Ранее уже отмечалось [1], что быстрые замирания, которые на первый взгляд кажутся худшими, чем медленные, дают в действительности при оптимальном приеме значительно меньшую вероятность ошибки. В работе [2] было также показано, что пропускная способность определенных каналов с замираниями совпадает с пропускной способностью каналов без замираний при тех же энергетических параметрах.

Однако значительно менее очевидным представляется тот факт, что при появлении замираний в канале связи может существенно уменьшиться вероятность ошибки при наличии определенных видов оптимизируемых гауссовских аддитивных помех. Докажем это на примере двоичных сигналов обобщенной частотной манипуляции *

$$S_1(t)=\frac{U_c}{\sqrt{l}}\sum_{k=0}^{l-1}\cos[(k_1+2k)\omega_0 t], \tag{1}$$

$$S_2(t)=\frac{U_c}{\sqrt{l}}\sum_{k=0}^{l-1}\cos[(k_1+1+2k)\omega_0 t],$$

где $\omega_0=2\pi/T$, T – длительность элемента сигнала, k_1, l – произвольные целые числа.

Рассмотрим сначала канал с гауссовскими замираниями. В этом случае принимаемые сигналы $u(t)$ имеют вид:

---

* Легко обобщить получаемый ниже результат на случай произвольной манипуляции и время-составных сигналов, когда l — число субэлементов.

$$u(t)=\begin{cases}\dfrac{U_c}{\sqrt{l}}\sum\limits_{k=0}^{l-1}\tilde{\mu}_{c(k_1+2k)}\cos[(k_1+2k)\omega_0 t]+\\ +\tilde{\mu}_{s(k_1+2k)}\sin[(k_1+2k)\omega_0 t]+n(t),\\ \text{если передается сигнал } S_1(t),\\ \dfrac{U_c}{\sqrt{l}}\sum\limits_{k=0}^{l-1}\tilde{\mu}_{c(k_1+1+2k)}\cos[(k_1+1+2k)\omega_0 t]+\\ +\tilde{\mu}_{s(k_1+1+2k)}\sin[(k_1+1+2k)\omega_0 t]+n(t),\\ \text{если передается сигнал } S_2(t),\end{cases}\tag{2}$$

где

$$n(t)=\frac{U_n}{\sqrt{2l}}\sum_{k=0}^{2l-1}\hat{\mu}_{c(k_1+k)}\cos[(k_1+k)\omega_0 t]+\hat{\mu}_{s(k_1+k)}\sin[(k_1+k)\omega_0 t],\tag{3}$$

$$\tilde{\mu}_1=\left(\tilde{\mu}_{ck_1},\ \tilde{\mu}_{c(k_1+2)},\ldots,\ \tilde{\mu}_{c(k_1+2l-2)},\ \tilde{\mu}_{sk_1},\ \tilde{\mu}_{s(k_1+2)},\ldots,\ \tilde{\mu}_{s(k_1+2l-2)}\right),$$
$$\tilde{\mu}_2=\left(\tilde{\mu}_{c(k_1+1)},\ \tilde{\mu}_{c(k_1+3)},\ldots,\ \tilde{\mu}_{c(k_1+2l-1)},\ \tilde{\mu}_{s(k_1+1)},\ \tilde{\mu}_{s(k_1+3)},\ldots\right.$$
$$\left.\ldots,\ \tilde{\mu}_{s(k_1+2l-1)}\right),$$
$$\hat{\mu}=\left(\hat{\mu}_{ck_1},\ldots,\ \hat{\mu}_{c(k_1+2l-1)},\ \hat{\mu}_{sk_1},\ldots,\ \hat{\mu}_{s(k_1+2l-1)}\right)\ -$$

гауссовские векторы с нулевыми средними значениями и корреляционными матрицами B_{c_1}, B_{c_2} и $B_п$. Предположим дополнительно, что $B_{c_1}=B_{c_2}=B_c$, а векторы $\tilde{\mu}_1$ и $\tilde{\mu}_2$ взаимно независимы с вектором $\hat{\mu}$.

Физически представление (2) при указанных выше условиях означает, что многочастотные сигналы и аддитивная помеха аналогичной структуры подвержены частотно-селективным однородным гауссовским замираниям.

Для сигнала вида (1) и помехи вида (3) достаточной статистикой относительно передаваемых двоичных сообщений при известном непрерывном сигнале $u(t)$ будут коэффициенты Фурье, соответствующие гармоникам сигнала, т. е. величины

$$\begin{aligned}X_k&=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cos k\omega_0 t\,dt,\\ Y_k&=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\sin k\omega_0 t\,dt,\quad k=k_1,\ldots,k_1+2l-1.\end{aligned}\tag{4}$$

Используя представления (2) и (3), получаем, что при передаче первого сигнала

$$X_k=\begin{cases}\tilde{X}_k+\hat{X}_k, & k=k_1,\ k_1+2,\ldots,k_1+2l-2\\ \hat{X}_k, & k=k_1+1,\ k_1+3,\ldots,\ k_1+2l-1\end{cases}$$

$$Y_k=\begin{cases}\tilde{Y}_k+\hat{Y}_k, & k=k_1,\ k_1+2,\ldots,k_1+2l-2,\\ \hat{Y}_k, & k=k_1+1,\ k_1+3,\ldots\ k_1+2l-1,\end{cases}$$

а при передаче второго сигнала

$$X_k=\begin{cases}\tilde{X}_k+\hat{X}_k, & k=k_1+1,\ k_1+3,\dots,k_1+2l-1,\\ \hat{X}_k, & k=k_1,\ k_1+2,\dots,k_1+2l-2,\end{cases}$$

$$Y_k=\begin{cases}\tilde{Y}_k+\hat{Y}_k, & k=k_1+1,\ k_1+3,\dots,k_1+2l-1,\\ \hat{Y}_k, & k=k_1,\ k_1+2,\dots,k_1+2l-2,\end{cases}$$

где

$$\tilde{X}_k=\tilde{\mu}_{ck}U_c/(2\sqrt{l}),\ \tilde{Y}_k=\tilde{\mu}_{sk}U_c/(2\sqrt{l}),$$
$$(5)\qquad \hat{X}_k=\hat{\mu}_{ck}U_п/(2\sqrt{2l}),\ \hat{Y}_k=\hat{\mu}_{sk}U_п/(2\sqrt{2l}).$$

Тогда корреляционные матрицы вектора $\bar{Z}=(X_{k_1},\dots,\ X_{k_1+2l-1},\ Y_{k_1},\dots$ $\dots,\ Y_{k_1+2l-1})$ соответственно при передаче первого и второго сигналов будут равны

$$(6)\qquad B_1=\frac{U_c^2}{4l}B_c\times E_1+\frac{U_п^2}{8l}B_п,\qquad B_2=\frac{U_c^2}{4l}B_c\times E_2+\frac{U_п^2}{8l}B_п,$$

$$\frac{B_1+B_2}{2}=\frac{U_c^2}{8l}B_c\times E+\frac{U_п^2}{8l}B_п,$$

где $\times$ — символ кронекеровского произведения, а E_1, E_2 и E — матрицы вида:

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad E_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Предположим дополнительно, что $\mathbf{D}\{\tilde{\mu}_{ck}\}=\mathbf{D}\{\tilde{\mu}_{sk}\}=\sigma_c^2$ и $\mathbf{D}\{\hat{\mu}_{ck}\}=$ $=\mathbf{D}\{\hat{\mu}_{sk}\}=\sigma_п^2$. Тогда из (5) получаем

$$(7)\qquad B_c=\sigma_c^2R_c,\ B_п=\sigma_п^2R_п,$$

где R_c и $R_п$ — нормированные матрицы корреляций векторов $\tilde{\mu}_{1(2)}$ и $\hat{\mu}$. Оптимальная решающая схема в этом случае легко находится как отношение гауссовских многомерных плотностей вероятностей, однозначно определяемых своими корреляционными матрицами B_1 и B_2. Значительно сложнее вычислить вероятность ошибки. Точное решение этой задачи сводится к нахождению собственных чисел определенным образом построенных корреляционных матриц и к подстановке этих чисел в довольно громоздкие выражения [1]. Проще найти оценки для вероятности ошибки p при оптимальном поэлементном приеме, используя коэффициент Бхаттачариа ρ ([3]):

$$(8)\qquad {}^1/_4\rho^2\leqslant p\leqslant {}^1/_2\rho.$$

Для многомерных гауссовских векторов $\bar{Z}$ с нулевыми средними коэффициент Бхаттачариа определяется известным выражением ([3]):

$$(9)\qquad \rho=\frac{\det^{1/4}B_1\det^{1/4}B_2}{\det^{1/2}{}^1/_2(B_1+B_2)}.$$

Подставляя (7) в (6), а (6) в (9) и производя элементарные преобразования, получаем

$$(10)\qquad \rho=\left[\frac{\det(2qR_c\times E_1+R_п)}{\det(qR_c\times E+R_п)}\right]^{1/2},$$

где q — отношение средней мощности принимаемых сигналов к средней мощности принимаемой помехи. Для дальнейшего упрощения предположим, что $\mathbf{M}\{\hat{\mu}_{ck}\hat{\mu}_{sk'}\}=\mathbf{M}\{\mu_{ck}\mu_{sk'}\}=0$ при любых $k\neq k'$, а также $\mathbf{M}\{\tilde{\mu}_{ck}\tilde{\mu}_{ck'}\}=$ $=\mathbf{M}\{\tilde{\mu}_{sk}\tilde{\mu}_{sk'}\}$ и $\mathbf{M}\{\hat{\mu}_{ck}\hat{\mu}_{ck'}\}=\mathbf{M}\{\hat{\mu}_{sk}\hat{\mu}_{sk'}\}$ для любых k, k', что физически означает некоррелированность синфазных и квадратурных составляющих коэффициентов передачи. Тогда из (10) будем иметь:

$$\rho=\frac{\det(2q\tilde{R}_c\times E_1+\tilde{R}_п)}{\det(q\tilde{R}_c\times E+\tilde{R}_п)}, \tag{11}$$

где теперь $\tilde{R}_c$ — нормированная $l\times l$-матрица корреляций коэффициентов передачи сигнала, а $\tilde{R}_п$ — нормированная $2l\times 2l$-матрица корреляций коэффициентов передачи помехи. Используя далее известные свойства положительно определенных корреляционных матриц [4], получаем неравенство для ρ

$$\rho\leqslant\frac{(2q+1)^l}{q^{2l}\det^2\tilde{R}_c}. \tag{12}$$

В частном случае, когда $\tilde{R}_c$ — единичная, получаем из (12)

$$\rho\leqslant((2q+1)/q^2)^l, \tag{13}$$

причем (13), очевидно, справедливо при любой матрице корреляций коэффициентов передачи помехи $\tilde{R}_п$.

Рассмотрим теперь случай, когда помеха остается прежней, а замирания сигналов отсутствуют, т. е.

$$u(t)=\mu S_i(t)+n(t),\ i=1,\ 2, \tag{14}$$

где $S_i(t)$ имеют вид (1), $n(t)$ — вид (3), а μ — постоянный и известный на приеме коэффициент передачи канала.

В случае взаимной независимости синфазных $\hat{\mu}_{ck}$ и квадратурных $\hat{\mu}_{sk}$ составляющих коэффициентов передачи помехи достаточную статистику будет давать вектор $\overline{X}=(X_{k_1},\ldots,X_{k_1+2l-1})$ косинусных коэффициентов Фурье принимаемого сигнала. Для упрощения дальнейших выкладок изменим нумерацию координат этого вектора, полагая, что $\overline{Z}=\overline{X}=(\overline{X}_1,\ \overline{X}_2)$, где $\overline{X}_1=(X_{k_1},X_{k_1+2},\ldots,X_{k_1+2l-2})$, $\overline{X}_2=(X_{k_1+1},X_{k_1+3},\ldots,X_{k_1+2l-1})$. Вектор $\overline{X}$, очевидно, гауссовский и имеет при передаче обоих сигналов одну и ту же матрицу корреляций, равную матрице корреляций помехи, и средние значения

$$\mathbf{M}\{\overline{X}_1\}=(\mu U_c/2\sqrt{l},\ldots,\mu U_c/2\sqrt{l}),\ \mathbf{M}\{\overline{X}_2\}=(0,\ldots,0)\ - \tag{15}$$

при передаче первого сигнала и

$$\mathbf{M}\{\overline{X}_1\}=(0,\ldots,0),\ \mathbf{M}\{\overline{X}_2\}=(\mu U_c/2\sqrt{l},\ldots,\mu U_c/2\sqrt{l})\ -$$

при передаче второго сигнала.

Для многомерных гауссовских векторов $\overline{X}$ с различными средними значениями и одинаковыми корреляционными матрицами коэффициент Бхатачариа будет иметь вид:

$$\rho=\exp\{-{}^1/_2(\mathbf{M}\{\overline{X}_1\}-\mathbf{M}\{\overline{X}_2\})\cdot B^{-1}\cdot(\mathbf{M}\{\overline{X}_1\}-\mathbf{M}\{\overline{X}_2\})'\}. \tag{16}$$

Используя (15) и производя элементарные преобразования (16), получаем

$$\rho=\exp\{-{}^1/_4 q\pi\tilde{R}_п^{-1}\pi'\}, \tag{17}$$

где q — отношение средней мощности принимаемых сигналов к средней мощности принимаемой помехи, $\pi=(+1,\ldots,+1,-1,\ldots,-1)$ — вектор-строка длины $2l$, $\tilde{R}_п$ — нормированная $2l\times 2l$-матрица корреляций коэффициентов передачи помехи.

Выберем матрицу корреляций помехи следующего вида:

$$\tilde{R}_п=\begin{pmatrix} \tilde{R}_r & 0 \\ 0 & \tilde{R}_r \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где

$$\tilde{R}_r=\begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & \ldots & r^{l-1} \\ r & 1 & r & \ldots & r^{l-2} \\ . & . & . & \ldots & . \\ r^{l-1} & r^{l-2} & . & \ldots & 1 \end{pmatrix} -$$

экспоненциальная матрица с параметром r. Тогда, как известно [4],

$$\tilde{R}_r^{-1}=\frac{1}{1-r^2}\begin{pmatrix} 1 & -r & 0 & . & \ldots & . & 0 \\ -r & 1+r^2 & -r & . & \ldots & . & 0 \\ 0 & -r & 1+r^2 & -r & \ldots & . & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & . & . & . & \ldots & -r & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (17), получаем:

$$\rho=\exp\left\{-\frac{q}{2}\left[\frac{2}{1+r}+\frac{1-r}{1+r}(l-2)\right]\right\}, \tag{20}$$

откуда видно, что если $r<1$, то $\lim\limits_{l\to\infty}\rho=0$ при любом $q>0$, а если $r=1$, то

$$\rho=e^{-q/2}. \tag{21}$$

В последнем случае вероятность ошибки будет ограничена величиной, зависящей только от q, но не зависящей от числа частотных составляющих l *.

Заметим, что матрица (18) не дает максимум ρ. Можно доказать, что он обеспечивается при выборе матрицы

$$\tilde{R}_п=\begin{pmatrix} \pi & -\pi \\ -\pi & \pi \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где π—$(l\times l)$-матрица из всех единиц, и равен $\rho=e^{-q/4}$.

Для гауссовской помехи с матрицей (18) при $r=1$ в канале с гауссовскими замираниями с неединичной корреляцией получаем из (11), что $\rho=0$, т. е. имеем сингулярный случай, когда вероятность ошибки равна нулю. Это и понятно, потому что здесь можно отличить группу частот, на которой передается сигнал по флуктуациям величин X_k, Y_k, в отличие от строго постоянных величин X_k, Y_k на группе частот помехи.

Предположим теперь, что в канале с замираниями действует гауссовская помеха, имеющая одинаковую матрицу корреляций для групп частот первого и второго сигналов и некоррелированные между собой группы ча-

---

* Легко убедиться, что для помехи, имеющей $r=1$, можно так изменить форму сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$, что будет иметь место сингулярность, т. е. $p=0$. Однако и для измененной формы сигналов всегда найдется такая новая помеха, что свойство независимости ρ от l сохранится (см. далее формулу (25)).

стот для этих сигналов, т. е. $\tilde{R}_п=\tilde{R}_с \times E$. Тогда из (11) получаем

$$(23)\qquad \rho=\frac{\det(2q\tilde{R}_с\times E_1+\tilde{R}_с\times E)}{\det(q\tilde{R}_с\times E+\tilde{R}_с\times E)}=\frac{\det[\tilde{R}_с\times(2qE_1+E)]}{\det^2(q+1)\tilde{R}_с}=$$

$$=\frac{\det^2\tilde{R}_с(2q+1)^l}{\det^2\tilde{R}_с(q+1)^{2l}}=\left[\frac{(2q+1)}{(q+1)^2}\right]^l,$$

если $\det\tilde{R}_с\neq 0$.

Выражение (23) кажется на первый взгляд даже парадоксальным, поскольку оно справедливо для любой невырожденной матрицы корреляций $\tilde{R}_с$, в том числе для $\tilde{R}_с$, сколь угодно близкой к матрице из всех единиц. Интересное объяснение этому парадоксу дал Л. М. Финк, который заметил, что в данном случае гауссовские величины

$$X_k,\ Y_k,\ k=k_1,\ k_1+2,\ldots,\ k_1+2l-2 \text{ и } X_k,\ Y_k,\ k=k_1+1,\ k_1+3,\ldots,\ k_1+2l-1$$

одним и тем же ортогональным преобразованием приводятся ко взаимно независимым, причем отношение дисперсий преобразованных величин зависит лишь от q, но не зависит от матрицы корреляций $\tilde{R}_с$.

Из (23) следует, что в данном случае $\rho\to 0$, когда $l\to\infty$ при любом $q>0$ и $\det\tilde{R}_с\neq 0$. Хотя здесь структура помехи подобна структуре сигнала, однако такой случай оказывается отнюдь не наихудшим, в чем нетрудно убедиться, выбрав вместо $\tilde{R}_п=\tilde{R}_с\times E$, например, единичную матрицу $\tilde{R}_п$.

Итак, если в постоянном канале имеется гауссовская помеха с матрицей корреляций (18), где r весьма близко к 1, то вероятность ошибки при оптимальном приеме в таком канале будет ограничена снизу величиной $^1/_4\rho^2$, где ρ находится по (21) независимо от числа составляющих l.

Для той же самой помехи и замирающего канала верхняя граница для вероятности ошибки будет $^1/_2\rho$, где ρ рассчитывается по (12) или (23), а тогда $\rho\to 0$ при $l\to\infty$ по крайней мере для некоторых матриц корреляций сигнала $R_с$. Это свойство будет выполняться даже в случае, если для постоянного канала выбрать q значительно больше, чем для замирающего. Таким образом, доказано утверждение, сформулированное в начале статьи, причем его нельзя считать следствием того тривиального обстоятельства, что при замираниях сигнала, хотя бы одна из l величин X_k окажется значительно больше всех составляющих помехи *.

В случае непрерывной гауссовской помехи прием только по тем коэффициентам Фурье, которые входят в состав сигнала, не является оптимальной обработкой непрерывного сигнала $u(t)$ как в замирающем, так и в постоянном канале. Однако свойство уменьшения вероятности ошибки при замираниях сохраняется и при оптимальном приеме на фоне любой гауссовской помехи. Действительно можно показать, что если в постоянном гауссовском канале используются сигналы $S_1(t)$ и $S_2(t)$ мощности $\mathscr{P}_с$, а аддитивная гауссовская помеха мощности $\mathscr{P}_п$ имеет корреляционную функцию

$$(24)\qquad R(t,t')=(\mathscr{P}_п/\mathscr{P}_с)S(t)S(t'),$$

где

$$S(t)=S_1(t)-S_2(t),$$

* Существо дела состоит в том, что при замираниях форма сигнала становится случайной (рандомизированной), что не позволяет полностью оптимизировать аддитивную помеху и вместе с тем сохраняет возможность приема случайного сигнала при его некогерентной обработке.

то вероятность ошибки при оптимальном приеме будет

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{\mathscr{P}_\text{с}/\mathscr{P}_\text{п}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{25}$$

Как видно из (25), эта вероятность зависит только от q — отношения мощности сигнала к мощности помехи и не может быть сделана сколь угодно малой ни при какой ширине спектра сигналов.

Авторы выражают благодарность Л. М. Финку за полезное обсуждение работы и физическую интерпретацию некоторых результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Финк Л. М.* Теория передачи дискретных сообщений. М., «Сов. радио», 1970.
2. *Кеннеди Р.* Каналы связи с замираниями и рассеянием. М., «Сов. радио», 1973.
3. *Kailath T.* The Divergence and Bhattacharyya Distance Measures in Signal Selection. IEEE Trans. Commun. Theory, 1967, 15, *1*, 52–60.
4. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., «Наука», 1969.

Поступила в редакцию
18 июня 1975 г.