Алгебра и логика, 20, № 6(1981), 654-706

УДК 519

НЕРАЗРЕШИМОЕ ПРОМЕЖУТОЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

С. В. ПОПОВ

Мы будем рассматривать так называемые конечно-аксиоматизируемые промежуточные исчисления, т. е. такие, которые шире интуиционистского и получаются добавлением в качестве аксиом к интуиционистскому исчислению конечного числа классически верных выражений.

Оказывается, что уже среди конечно-аксиоматизируемых промежуточных исчислений имеется такое, для которого не существует алгоритма, позволяющего по любому выражению определить, принадлежит ли оно этому исчислению. Неразрешимость проблемы вывода в этом исчислении доказывается сведением к ней проблемы вывода в продукциях Поста.

При записи пропозициональных выражений мы будем пользоваться общеупотребительными сокращениями, используя там, где удобно, точки вместо скобок. Так, выражение $W_1 \supset . W_2 \supset . \ldots \supset . W_n \supset X$ следует понимать как $W_1 \supset (W_2 \supset (\ldots \supset (W_n \supset X) \ldots))$.

Кроме того, чтобы не усложнять рисунков и формул и там, где нет необходимости в точном представлении выражений, мы будем использовать буквы Γ, Δ для обозначения наборов ассоциированных вправо посылок. Например, если $\Gamma = \{W_1, \ldots, W_n\}$, то запись $\Gamma \supset X$ есть сокращение для выражения $W_1 \supset . W_2 \supset . \ldots \supset . W_n \supset X$.

Для выделения различных вхождений одной формулы в логическую конструкцию мы будем пользоваться верхними штрихами. Так, $X', X'', X''', \ldots$ обозначают различные вхождения формулы X. При этом запись $X^{(n)}$ есть сокращение для $X^{\overbrace{''\ldots'}^{n}}$.

Введем определение глубины $d(U)$ пропозиционального выражения U над базисом $< \supset, f, \vee, \& >$.

Если U есть переменная или константа f, то $d(U) = 0$. Если выражение U имеет вид $W_1 \supset . W_2 \supset . \ldots \supset . W_n \supset X$, $n > 0$, и главная связка выражения X не импликация, то $d(U) = (max\{d(W_1), \ldots$

© Институт математики СО АН СССР, 1981

$\ldots, d(W_n)\}+1)+d(X)$. Если выражение U имеет вид $W_1 \vee \ldots \vee W_n (W_1 \& \ldots \& W_n)$, $n \geq 2$, и ни одно из выражений W_i не имеет в качестве главной связки дизъюнкцию (конъюнкцию), $i=1,2,\ldots,n$, то $d(U) = \max\{d(W_1),\ldots,d(W_n)\}+1$.

Приведем определение множеств $\mathfrak{M}^-(U)$ и $\mathfrak{M}^+(U)$ формул, которые определяются по произвольному выражению U.

Пусть U есть выражение над базисом $\langle \supset, f, \vee, \& \rangle$. Тогда $U \in \mathfrak{M}^+(U)$.

Пусть $W \in \mathfrak{M}^+(U)$ ($W \in \mathfrak{M}^-(U)$) и $W \equiv W_1 \oplus W_2$, где $\oplus \in \{\vee, \&\}$. Тогда $W_i \in \mathfrak{M}^+(U)$ ($W_i \in \mathfrak{M}^-(U)$), $i=1,2$.

Пусть $W \in \mathfrak{M}^+(U)$ ($W \in \mathfrak{M}^-(U)$) и $W \equiv W_1 \supset W_2$. Тогда $W_1 \in \mathfrak{M}^-(U)$, $W_2 \in \mathfrak{M}^+(U)$ ($W_1 \in \mathfrak{M}^+(U)$, $W_2 \in \mathfrak{M}^-(U)$).

Для дальнейшего нам потребуются следующие определения.

Пусть U' и U'' есть вхождения выражения U. Определим отображение φ множества вхождений подформул U' на множество вхождений подформул выражения U''.

1. $\varphi(U') = U''$.

2. Пусть V' есть вхождение подформулы V в выражение U', V'' – вхождение подформулы V в U'' и $\varphi(V') = V''$, $V' \equiv A' \square B'$, $V'' \equiv A'' \square B''$, где $\square \in \{\supset, \vee, \&\}$. Тогда $\varphi(A') = A''$, $\varphi(B') = B''$.

Пусть U' и U'' есть вхождения выражения U и X' – вхождение подформулы X в выражение U' такое, что $\varphi(X') = X'' \subseteq U''$. Тогда вхождение X'' называется соответствующим вхождению X'.

Пусть U' и U'' есть вхождения выражения U, R – бинарное отношение такое, что $R(U', U'')$. Будем называть отношение R подформульным, если для любых подформул $X' \subseteq U'$ и $X'' \subseteq U''$ таких, что X'' есть вхождение, соответствующее X', имеет место $R(X', X'')$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Хотя эта работа посвящена иной теме, чем [2 и 3], в ней существенно используются определения из [2, 3], а также приводятся без доказательств некоторые утверждения, которые либо уже доказаны в [2] или [3], либо их легко доказать, используя предложенную в них методику. Кроме того, в настоящей статье исправляется допущенная в [4] ошибка.

§ 1. Исчисления $\Sigma_{КЛ}$ и $\Sigma_{И}$. Некоторые свойства выводов в них

Будем называть исчислением $\Sigma_{КЛ}$ исчисление, которое задается следующим списком аксиомных схем:

$$\mathfrak{A}_1 : A \supset . B \supset A; \qquad \mathfrak{A}_6 : A \supset A \vee B;$$

$$\mathfrak{A}_2 : (A \supset . B \supset C) \supset . A \supset B \supset . A \supset C; \qquad \mathfrak{A}_7 : A \supset B \vee A;$$

$$\mathfrak{A}_3 : A \supset f \supset A \supset A; \qquad \mathfrak{A}_8 : A \,\&\, B \supset A;$$

$$\mathfrak{A}_4 : f \supset A; \qquad \mathfrak{A}_9 : A \,\&\, B \supset B;$$

$$\mathfrak{A}_5 : A \supset C \supset . B \supset C \supset . A \vee B \supset C; \qquad \mathfrak{A}_{10} : A \supset . B \supset A \,\&\, B,$$

и единственным правилом вывода модус поненс.

Исчисление $\Sigma_{И}$ получается из $\Sigma_{КЛ}$ отбрасыванием схемы $\mathfrak{A}_3$. Очевидно, что $\Sigma_{КЛ}$ ($\Sigma_{И}$) есть классическое (интуиционистское) исчисление высказываний.

Введем ряд определений, которые потребуются нам в дальнейшем.

Выводом выражения U в исчислении $\Sigma_{КЛ}$ называется дерево с корнем, которому приписано выражение U. Это дерево имеет два типа узлов: узлы первого типа, соответствующие правилам вывода, и узлы второго типа, соответствующие аксиомам и промежуточным выражениям вывода. Листья – узлы второго типа. Каждому листу приписана некоторая аксиома исчисления $\Sigma_{КЛ}$. Фрагментом вывода называется такая же конструкция, как и вывод, но его листьям не обязательно приписаны аксиомы.

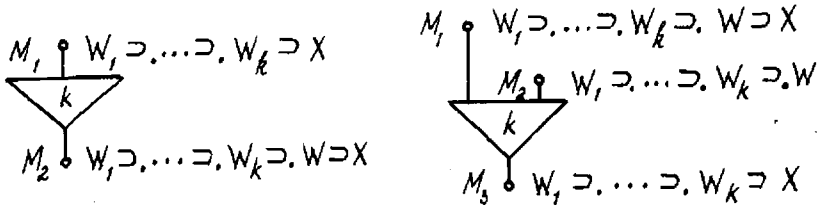
Ветвью вывода называется последовательность узлов первого и второго типов, лежащих на отрезке пути от некоторого узла к листу вывода (имеется в виду путь без самопересечения). Длиной ветви называется число узлов в ней первого типа.

Будем считать, что во всяком выводе определен естественный частичный порядок узлов в соответствии с их расположением в дереве, а именно: корень вывода – самый нижний узел и узел N_1 расположен выше (ниже) узла N_2, если узел N_2 (N_1) содержится в несамопересекающемся пути от корня к N_1 (N_2).

Вывод называется нередуцируемым, если в нем нет двух выражений $V_1 \Xi \Gamma_1 \supset X$ и $V_2 \Xi \Gamma_2 \supset X$ таких, что выражение V_1 расположено выше V_2 и $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Четной ветвью называется такая ветвь, в которой все узлы второго типа, за исключением, быть может, самого нижнего, не являются малыми посылками узлов первого типа. Четная ветвь называется полной, если ее верхним узлом является лист, а нижним – либо корень вывода, либо малая посылка некоторого узла первого типа. Главной ветвью называется полная ветвь, самый нижний узел которой есть корень вывода. Очевидно, что при таком определении главная ветвь в любом выводе в исчислении $\Sigma_{K\Lambda}$ единственная.

Для удобства дальнейшего изложения мы несколько перефразируем исчисления $\Sigma_{K\Lambda}$ и $\Sigma_{И}$. Для этого отбросим схему $\mathfrak{A}_2$ и добавим к правилу модус поненс еще бесконечное множество правил вывода, как на рис. 1. 1, где $k = 0, 1, \ldots$, которые в выводе соответствуют узлам первого типа. То, что множества выводимых выражений в полученных исчислениях в точности совпадают с множествами выводимых выражений в соответствующих первоначальных исчислениях, доказано в [3].



а) б)

Рис. 1. 1

Узел первого типа (см. рис. 1. 1, а) называется унарным; выражение, приписанное узлу M_1, и сам этот узел – посылкой, а выражение, приписанное узлу M_2, и сам этот узел – заключением этого узла. Выражение W называется выражением навешивания.

Узел первого типа (см. рис. 1. 1, б) называется бинарным. Выражения, приписанные узлам M_1, M_2, M_3, и сами эти узлы называются соответственно большой, малой посылками и заключением этого узла. Выражение W называется выражением устранения.

Все приведенные выше определения, очевидно, справедливы и для выводов с такими правилами.

Введем определение так называемого канонического вывода в исчислении $\Sigma_{K\Lambda}$.

Вывод в исчислении $\Sigma_{K\Lambda}$ выражения U называется каноническим, если его любая полная ветвь имеет вид, как на одном из следующих рисунков:

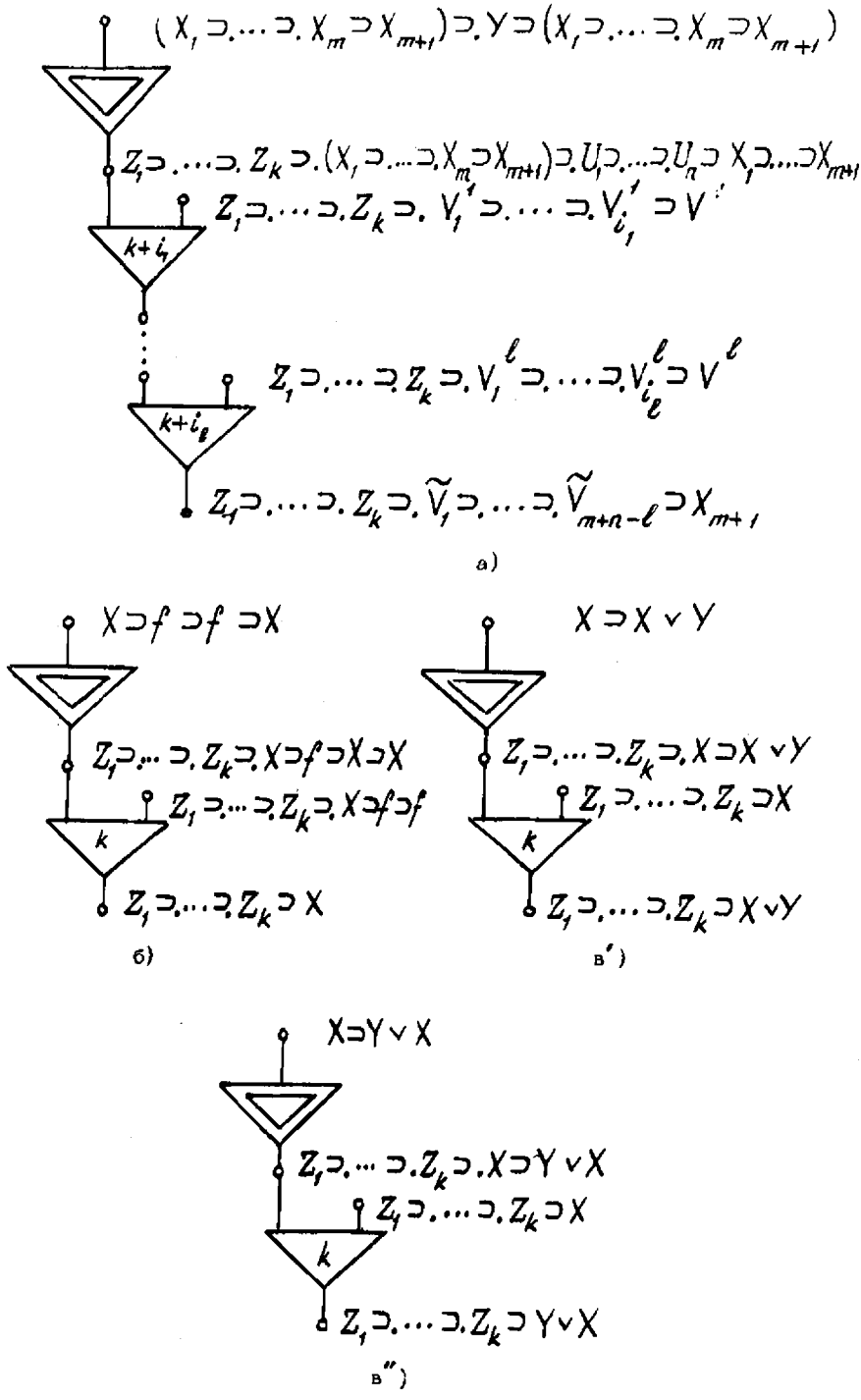
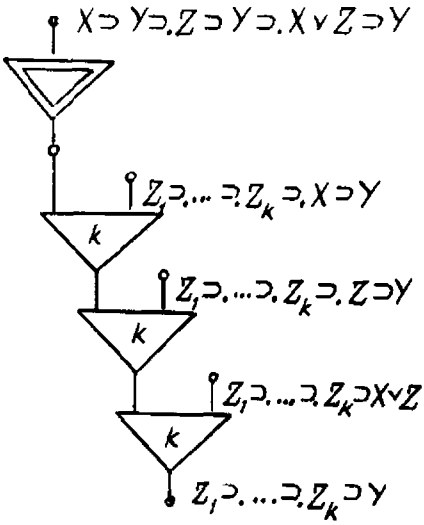
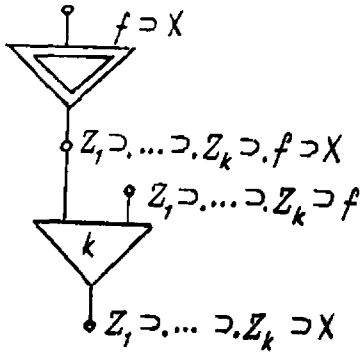

$(X_1 \supset \ldots \supset X_m \supset X_{m+1}) \supset Y \supset (X_1 \supset \ldots \supset X_m \supset X_{m+1})$
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset (X_1 \supset \ldots \supset X_m \supset X_{m+1}) \supset U_1 \supset \ldots \supset U_n \supset X_1 \supset \ldots \supset X_{m+1}$
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset V_1' \supset \ldots \supset V_{i_1}' \supset V'$
$k+i_1$
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset V_1^{\ell} \supset \ldots \supset V_{i_\ell}^{\ell} \supset V^{\ell}$
$k+i_\ell$
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset \tilde{V}_1 \supset \ldots \supset \tilde{V}_{m+n-\ell} \supset X_{m+1}$
а)
$X \supset f \supset f \supset X$
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset X \supset f \supset X \supset X$
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset X \supset f \supset f$
k
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset X$
б)
$X \supset X \vee Y$
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset X \supset X \vee Y$
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset X$
k
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset X \vee Y$
в')
$X \supset Y \vee X$
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset X \supset Y \vee X$
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset X$
k
$Z_1 \supset \ldots \supset Z_k \supset Y \vee X$
в'')

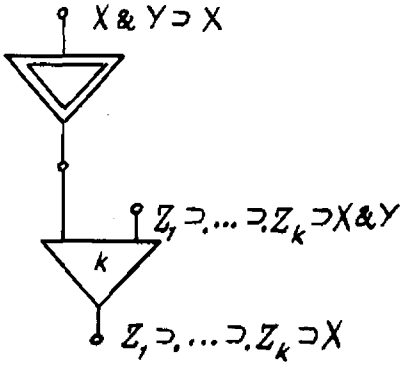
Рис. 1, 2



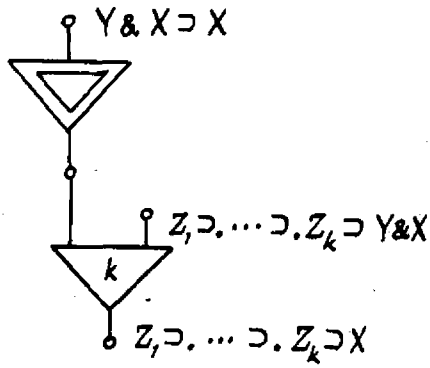
г)



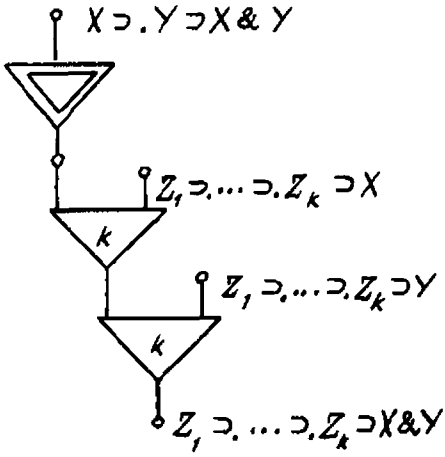
д)



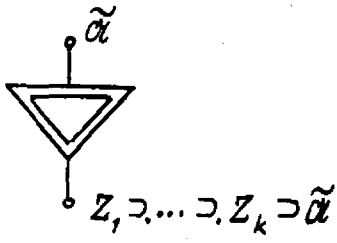
е′)



е″)



ж)



з)

Рис. 1. 2

А) Рис. 1. 2, а, где

1. $\{V^1, \ldots, V^\ell\} \subseteq \{Y, X_1, \ldots, X_m\}$, $k \geq 0$, $n \geq 0$, $\ell \geq 0$.

2. $1 \leq i_j < i_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, \ell$.

3. Первый сверху бинарный узел имеет малую посылку, отличную от $W_1 \supset \ldots \supset W_s \supset Y \supset Y$, $s < k + n$.

Б) Рис. 1. 2, б, где $k \geq 0$ и выражение X есть либо переменная, либо выражение вида $X_1 \vee X_2$ или $X_1 \& X_2$.

В) Рис. 1. 2, в, где $k > 0$.

Г) Рис. 1. 2, г, где $k \geq 0$.

Д) Рис. 1. 2, д, где $k > 0$ и выражение X есть либо переменная, либо имеет вид $X_1 \vee X_2$ или $X_1 \& X_2$.

Е) Рис. 1. 2, е, где $k \geq 0$ и главная связка выражения X не импликация.

Ж) Рис. 1. 2, ж, где $k \geq 0$.

З) Рис. 1. 2, з, где $k \geq 0$ и $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – аксиома исчисления $\Sigma_{KЛ}$.

Определение канонического вывода в исчислении $\Sigma_И$ получается из приведенного отбрасыванием п. Б и заменой везде знака $\Sigma_{KЛ}$ на $\Sigma_И$.

Определим теперь систему $\mathcal{S}_3$ схем преобразований выводов в исчислении $\Sigma_{KЛ}$, которая состоит из схем системы $\mathcal{S}_1$ из [2] и схем системы $\mathcal{S}_2$ из [3]. Аналогично тому, как показано в [2], можно доказать, что для исчисления $\Sigma_{KЛ}(\Sigma_И)$ справедлива

ТЕОРЕМА 1. 1. *Каждый вывод в исчислении $\Sigma_{KЛ}(\Sigma_И)$ конечным числом преобразований по схемам системы $\mathcal{S}_3$ можно привести к единственному каноническому виду.*

Для дальнейшего изложения нам потребуется такое определение.

Вывод в исчислении $\Sigma_{KЛ}(\Sigma_И)$ называется нормальным, если определение его совпадает с определением канонического во всех случаях, кроме пп. Б, Д и Е. В последних выражение X в качестве главной связки может содержать импликацию или быть константой.

Аналогично теореме 1. 1 доказывается

ТЕОРЕМА 1. 2. *Каждый вывод в исчислении $\Sigma_{KЛ}(\Sigma_И)$ конечным числом преобразований по схемам системы $\mathcal{S}_3$ можно привести к нормальному виду.*

Вообще говоря, нормальный вывод, полученный по первоначальному, не единственный.

В силу того что сами выводы довольно громоздки, введем некоторые вспомогательные объекты, которые называются синтаксическими деревьями и работать с которыми проще, чем с выводами. Одновременно мы определим бинарное отношение "$\longrightarrow$" и понятие двойственной пары.

Синтаксическим деревом $\mathcal{D}_U$ в $\Sigma_{K\Lambda}$, соответствующим выражению U, называется дерево с корнем (корень самый верхний узел), которое удовлетворяет следующим условиям:

1. Каждому узлу дерева $\mathcal{D}_U$ приписано некоторое выражение.
2. Корню дерева $\mathcal{D}_U$ приписано выражение U.

3, а. Если невисячему узлу $N \in \mathcal{D}_U$ приписано выражение $W_1' \supset . \ldots \ldots \supset . W_n' \supset X'$, $n \geq 1$, и среди множества $\{W_1', \ldots, W_n'\}$ посылок присутствует подформула $W_i' \equiv X_1' \supset . \ldots \supset . X_m' \supset X''$, $m > 0$, то непосредственно ниже узла N лежат m узлов $N_1, \ldots, N_m$, и каждому узлу N_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, приписано выражение $W_{s_1^j}'' \supset . \ldots \supset . W_{s_{k_j}^j}'' \supset X_j''$, где $\{s_1^j, \ldots, s_{k_j}^j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. В этом случае узел N называется B-узлом, выражения X' и X''-двойственными, X' – положительным, а X'' – отрицательным, W_i' – выражением использования и X' – выражением изменения этого узла. Кроме того, $X_j'' \longrightarrow X_j'$, $W_{s_q^j}'' \longrightarrow W_{s_q^j}'$, $q = 1, 2, \ldots, k_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

3, б. Если невисячему узлу $N \in \mathcal{D}_U$ приписано выражение $W_1' \supset . \ldots \supset . W_n' \supset X'$, $n \geq 0$, главная связка выражения X не импликация и $X \neq f$, то непосредственно ниже узла N лежит единственный узел N_1, которому приписано выражение $W_{s_1}'' \supset . \ldots \supset . W_{s_k}'' \supset . (X'' \supset f) \supset X'''$, где $\{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. В этом случае узел N называется $З$-узлом, X' – выражением закапывания, $W_{s_i}'' \longrightarrow W_{s_i}'$, $X'' \longrightarrow X'$ и $X''' \longrightarrow X'$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

3, в. Если невисячему узлу $N \in \mathcal{D}_U$ приписано выражение $W_1' \supset . \ldots \ldots \supset . W_n' \supset X'$, $n \geq 1$, главная связка выражения X не импликация и $X \neq f$, то непосредственно ниже N лежит единственный узел N_1, которому приписано выражение $W_{s_1}'' \supset . \ldots \supset . W_{s_k}'' \supset f$, где $\{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. В этом случае N называется M-узлом, X' – выражением изменения, и $W_{s_i}'' \longrightarrow W_{s_i}'$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

3, г. Если невисячему узлу $N \in \mathcal{D}_U$ приписано выражение $W_1' \supset . \ldots \ldots \supset . W_n' \supset X'$, $n \geq 1$, и среди множества $\{W_1', \ldots, W_n'\}$ посылок присутствует формула $W_i' \equiv X_1' \supset . \ldots \supset . X_m' \supset (V_1' \vee \ldots \vee V_p')$, то непосредственно ниже узла N лежат $m+p$ узлов $N_1, \ldots, N_m, \tilde{N}_1, \ldots, \tilde{N}_p$, каждо-

му узлу N_j, $j=1,2,\ldots,m$, приписано выражение $W''_{s_1^j}\supset\ldots\supset.W''_{s_k^j}\supset X''_j$, где $\{s_1^j,\ldots,s_k^j\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$, а каждому узлу $\tilde{N}_j$, $j=1,2,\ldots,p$, – выражение $W''_{s_1^j}\supset\ldots\supset.W''_{s_k^j}\supset.V''_j\supset X''$, где также $\{s_1^j,\ldots,s_{k_j}^j\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$. При этом каждое выражение V''_j, $j=1,2,\ldots,p$, имеет в качестве подформулы хотя бы одного последователя компоненты двойственной пары. В этом случае N называется узлом разбора посылок, W'_i – выражением использования, X' – выражением изменения этого узла, и $X''\longrightarrow X'$, $W''_{s_q}\longrightarrow W'_{s_q}$, $q=1,2,\ldots,k_j$, $V''_\tau\longrightarrow V'_\tau$, $\tau=1,2,\ldots,p$.

3, д. Если невисячему узлу $N\in D_U$ приписано выражение $W'_1\supset\ldots\supset.W'_n\supset(V'_1\vee\ldots\vee V'_m)$, $n\geq 0$, $m\geq 2$, то непосредственно ниже N лежит единственный узел N_1, которому приписано выражение $W''_{s_1}\supset\ldots\supset.W''_{s_p}\supset(V''_{j_1}\vee\ldots\vee V''_{j_k})$, $\{j_1,\ldots,j_k\}\subseteq\{1,2,\ldots,m\}$, $\{s_1,\ldots,s_p\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$. В этом случае N называется узлом усиления заключения, $V'_1\vee\ldots\vee V'_m$ – выражением изменения этого узла и $W''_{s_i}\longrightarrow W'_{s_i}$, $V''_{j_q}\longrightarrow V'_{j_q}$, $i=1,2,\ldots,p$, $q=1,2,\ldots,k$.

3, е. Если невисячему узлу $N\in D_U$ приписано выражение $W'_1\supset\ldots\supset.W'_n\supset(V'_1\&\ldots\&V'_m)$, $n\geq 0$, $m\geq 2$, то непосредственно ниже N лежат m узлов $N_1,\ldots,N_m$, каждому узлу N_i, $i=1,2,\ldots,m$, приписано выражение $W''_{s_1^i}\supset\ldots\supset.W''_{s_{k_i}^i}\supset V''_i$, где $\{s_1^i,\ldots,s_{k_i}^i\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$, $i=1,2,\ldots,m$. В этом случае N называется узлом разбора заключения, $V'_1\&\ldots\&V'_m$ – выражением изменения, $W''_{s_j^i}\longrightarrow W'_{s_j^i}$, $V''_i\longrightarrow V'_i$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,k_i$.

3, ж. Если невисячему узлу $N\in D_U$ приписано выражение $W'_1\supset\ldots\supset.W'_n\supset X'$ и $W'_i\equiv X'_1\supset\ldots\supset.X'_m\supset(V'_1\&\ldots\&V'_k)$, где $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, то непосредственно ниже N лежит единственный узел, которому приписано выражение $W''_{j_1}\supset\ldots\supset.W''_{j_q}\supset.(X''_1\supset\ldots\supset.X''_m\supset V''_{s_1})\supset\ldots\supset.(X_1^{(\tau+1)}\supset\ldots\supset.X_m^{(\tau+1)}\supset V''_{s_\tau})\supset X''$, где $\{s_1,\ldots,s_\tau\}\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$, $\{j_1,\ldots,j_q\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$. В этом случае N называется K-узлом разбора посылок, W'_i – используемым выражением этого узла и $W''_{j_p}\longrightarrow W'_{j_p}$, $X''_i\longrightarrow X'_i$, $\ldots$, $X_i^{(\tau+1)}\longrightarrow X'_i$, $V''_{s_t}\longrightarrow V'_{s_t}$, $p=1,2,\ldots,q$, $i=1,2,\ldots,m$, $t=1,2,\ldots,\tau$.

4. Если N – висячий узел, то ему приписано выражение вида $X'\supset X''$. В этом случае пара (X',X'') называется двойственной, X'' – положительным, а X' – отрицательным элементом пары.

5. Отношение $\longrightarrow$ рефлексивно, транзитивно и подформульно, а отношение "быть двойственной парой" симметрично и подформульно.

Если имеет место отношение $X\longrightarrow Y$, то будем говорить, что выражение Y есть последователь выражения X, а выражение X – пред-

шественник выражения Y.

Для того чтобы получить определение синтаксического дерева для исчисления $\Sigma_И$, из приведенного определения необходимо убрать п. "3, б" и заменить знак $\Sigma_{КЛ}$ на $\Sigma_И$.

Синтаксическое дерево $\mathcal{D}_U$ называется неуменьшаемым, если только в результате переименования и склеивания его узлов нельзя получить синтаксическое дерево $\mathcal{D}'_U$ с меньшим, чем у $\mathcal{D}_U$, числом узлов.

Аналогично [3] доказываются следующие

ТЕОРЕМА 1.3. По любому синтаксическому дереву $\mathcal{D}_U$ можно построить канонический вывод выражения U в исчислении $\Sigma_{КЛ}$.

ТЕОРЕМА 1.4. Существует алгоритм, перерабатывающий любой канонический вывод выражения U в соответствующее ему синтаксическое дерево $\mathcal{D}_U$.

Отметим, что все утверждения о виде синтаксических деревьев, доказанные в [3], справедливы и для исчислений $\Sigma_{КЛ}$ и $\Sigma_И$.

Если вывод T построен по синтаксическому дереву $\mathcal{D}_U$, то будем обозначать это так: $\mathcal{D}_U \Rightarrow T$. Аналогично, если синтаксическое дерево $\mathcal{D}_U$ построено по выводу T, то будем обозначать это так: $T \Rightarrow \mathcal{D}_U$. Если синтаксическое дерево $\mathcal{D}_U$ определяет некоторое множество двойственных пар, то это же множество двойственных пар определяет вывод T такой, что $\mathcal{D}_U \Rightarrow T$.

ЛЕММА 1.1. Пусть выражение $U \in \Sigma_{КЛ}$, $N \in \mathcal{D}_U$ – узел, которому приписано выражение W, и $V' \subseteq W$ – вхождение подформулы, причем $V' \in \mathfrak{M}^+(W)(V' \in \mathfrak{M}^-(W))$ и V' имеет последователя $V'' \subseteq U$. В этом случае последователь выражения V' в U единственный и $V'' \in \mathfrak{M}^+(U)(V'' \in \mathfrak{M}^-(U))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы следует из определения последователя и из того, что при переходе от нижних узлов синтаксического дерева к верхним число последователей произвольной подформулы не увеличивается и они сохраняют знак того множества $\mathfrak{M}^+(\ldots)$ или $\mathfrak{M}^-(\ldots)$, которому принадлежит их предшественник.

Пусть $\mathcal{D}_U$ есть синтаксическое дерево и узел $N \in \mathcal{D}_U$ определяет двойственную пару (X', X''), причем выражение $X'(X'')$ имеет в

U последователя $X'''(X^{(4)})$. В этом случае пара $(X''', X^{(4)})$ называется следом двойственной пары (X', X'').

Легко доказывается

ЛЕММА 1. 2. Пусть выражение $U \in \Sigma_{KA}$, $x' \in U$ - вхождение переменной, которое не является компонентом следа никакой двойственной пары, определяемой деревом D_U. Тогда если заменить в выражении U вхождение x' на переменную y, а в D_U всех его предшественников тоже на переменную y, то получится синтаксическое дерево $D_{\tilde{U}}$, где $\tilde{U}$ - результат замены в выражении U вхождения x' на переменную y.

Введем такие определения.

Пусть D есть синтаксическое дерево. Тогда последовательность $(X', X''), (X'', X'''), \ldots, (X^{(n-2)}, X^{(n-1)}), (X^{(n-1)}, X^{(n)})$ пар вхождений формулы X в U, где $n \geq 2$ и каждая пара $(X^{(i)}, X^{(i+1)})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, есть след двойственной пары, определяемой D_U, называется цепью следов двойственных пар, соединяющей X' и $X^{(n)}$.

Пусть D_U есть синтаксическое дерево и $X' \subseteq U$ - вхождение подформулы X. Тогда множеством замкнутости подформул выражения U с характеристикой X', обозначаемым через $H_{X'}$, называется максимальное множество вхождений подформул в U такое, что для любой подформулы $X'' \in H_{X'}$ либо X'' есть X', либо существует цепь следов двойственных пар, соединяющая X' и X''.

Из определения множества $H_{X'}$ следует, что все его элементы графически совпадают с формулой X. Если же множество $H_{X'}$ состоит лишь из одного элемента, то это значит, что вхождение X' не является компонентой следа никакой двойственной пары.

ЛЕММА 1. 3. Пусть выражение $U \in \Sigma_{KA}$, $x' \in U$ есть вхождение переменной x в U, $H_{x'}$ - множество замкнутости, определяемое деревом D_U, $\tilde{U}$ есть результат замены каждого вхождения переменной x, принадлежащей множеству $H_{x'}$, на переменную y. В этом случае если везде в D_U заменить всех предшественников

каждого элемента из множества $H_{x'}$ на переменную y, то получим синтаксическое дерево $D_{\tilde{U}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $h \geq 1$ – числу узлов в D_U. Как следует из определения синтаксического дерева, в D_U существуют два типа узлов: первый-это B-узлы и висячие узлы, которые определяют двойственные пары, и второй тип – остальные, которые двойственных пар не определяют.

Если $h=1$, то выражение U имеет вид $X' \supset X''$ и $H_{x'} = \{x', x''\}$. В результате замены мы получим выражение $\tilde{U}$ вида $\tilde{X} \supset \tilde{X}$, и в этом случае лемма верна.

Допустим теперь, что лемма верна для любого синтаксического дерева с числом узлов $h \geq n$, и пусть D_U есть синтаксическое дерево, в котором $h = n+1$ узел. Возможны следующие случаи.

1) Корень дерева D_U не определяет ни одной двойственной пары. Нетрудно увидеть, что в этом случае лемма также верна.

2) Корень $N \in D_U$ есть B-узел, в котором используемое выражение имеет вид $(\Delta \supset Z')$, а изменяемое – Z''. Если ни одно выражение из множества $H_{x'}$ не имеет предшественника в формуле Z', то после указанной замены узел N останется B-узлом с формулой использования $(\tilde{\Delta} \supset Z')$ и формулой изменения Z'', и лемма верна в силу определения отношения $\longrightarrow$ и индукционной гипотезы.

Если некоторый элемент $x'' \in H_{x'}$ имеет предшественника $x''' \in Z'$ $(x''' \in Z'')$, то вхождение $x^{(4)} \in Z''$ $(x^{(4)} \in Z')$, соответствующее вхождению x''', также есть предшественник элемента из $H_{x'}$ и, следовательно, подлежит переименованию. А поэтому после указанной замены узел N останется B-узлом с формулой использования $(\tilde{\Delta} \supset \tilde{Z})$ и формулой изменения $\tilde{Z}$, и лемма верна в силу индукционной гипотезы.

Лемма доказана.

Из соответствия синтаксических деревьев и выводов в исчислении $\Sigma_{K\Lambda}$ (см. [3]) следует

ЛЕММА 1.4. Пусть выражение $U \in \Sigma_{K\Lambda}$, $x' \in U$ есть вхождение переменной x в U, $H_{x'}$ – множество замкнутости, определяемое деревом D_U, $\tilde{U}$ – результат замены в U всех вхождений переменной x из $H_{x'}$ на переменную y, $D_{\tilde{U}}$ – синтаксическое дере-

во, полученное из D_U в результате замены всех предшественников элементов множества $H_{x'}$ на y и $D_U \Rightarrow T$, $D_{\tilde{U}} \Rightarrow \tilde{T}$. Тогда графические структуры выводов T и $\tilde{T}$ совпадают, а различаются эти выводы лишь в некоторых выражениях, приписанных узлам второго типа, а именно: любое выражение $\tilde{W} \in \tilde{T}$, соответствующее выражению $W \in T$, получается из W заменой некоторых вхождений переменной x на y.

Из вида схем преобразований выводов системы S_3 следует

ЛЕММА 1.5. Пусть T есть вывод выражения U и вывод T_1 получен из T в результате последовательности $S = S^1, S^2, \ldots, S^m$, $m \geq 0$, преобразований по схемам системы S_3. Допустим далее, что $\tilde{U}$ есть выражение, полученное из U заменой некоторых вхождений переменной x на переменную y, а $\tilde{T}_1$ – вывод выражения $\tilde{U}$, полученный из T_1 в результате некоторых замен x на y. Тогда применение к выводу $\tilde{T}_1$ последовательности S в обратном направлении дает в результате вывод $\tilde{T}$ выражения $\tilde{U}$, отличающийся от T лишь заменой некоторых вхождений переменной x на y.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по m. Если $m = 0$, то доказательство элементарно. Допустим теперь, что лемма верна для любой последовательности преобразований, состоящей из $m \leq n$ преобразований, и пусть имеется последовательность $S = S^1, \ldots, S^{n+1}$, преобразующая вывод T в T_1. Иными словами, имеется последовательность $T = T^0 \xrightarrow{S^1} T^1 \xrightarrow{S^2} T^2 \rightarrow \ldots \xrightarrow{S^{n+1}} T^{n+1} = T_1$ выводов, причем вывод T^{i+1} получен из T^i по схеме S^{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Рассмотрим последний переход $T^n \xrightarrow{S^{n+1}} T^{n+1}$. Пусть преобразование S^{n+1} имеет вид $\Phi_1 \sim \Phi_2$ и в выводе T^n присутствует фрагмент Φ_1, который в T^{n+1} заменен на фрагмент Φ_2. Произведем в

выводе T^{n+1} требуемую замену некоторых вхождений переменной x на y. В результате получим вывод $\tilde{T}^{n+1} = \tilde{T}_1$ выражения $\tilde{U}$, в котором фрагмент Φ_2 превращен в соответствующий фрагмент $\tilde{\Phi}_2$. По схеме S^{n+1} мы можем заменить его на фрагмент $\tilde{\Phi}_1$, получив в результате вывод $\tilde{T}^n$ выражения $\tilde{U}$. Теперь справедливость леммы следует из индукционной гипотезы.

Лемма доказана.

§ 2. Промежуточные исчисления

Будем обозначать знаком $\Sigma(\tilde{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{A}}_n)$ исчисление, которое получается добавлением аксиомных схем $\tilde{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{A}}_n$ к исчислению Σ_n, где $\tilde{\mathfrak{A}}_i \in \Sigma_{KA}$ и $\tilde{\mathfrak{A}}_i \notin \Sigma_n$, $i=1,2,\ldots,n$. Такие исчисления при $n>0$ будем называть промежуточными, а аксиомные схемы $\tilde{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{A}}_n$ дополнительными.

Введем следующие определения.

Пусть U есть некоторое выражение, а T – его вывод в исчислении Σ_{KA}. Будем обозначать знаком $S^{X_1 \ldots X_m}_{V_1 \ldots V_m} U|$ выражение $\tilde{U}$, полученное из U подстановкой на места переменных $X_1, \ldots, X_m$ выражений соответственно $V_1, \ldots, V_m$. Заменяя переменные $X_1, \ldots, X_m$ в выводе T на выражения соответственно $V_1, \ldots, V_m$, мы получим вывод $\tilde{T}$ выражения $\tilde{U}$, который в дальнейшем будем обозначать знаком $S^{X_1 \ldots X_m}_{V_1 \ldots V_m} T|$.

Очевидна

ЛЕММА 2. 1. *Пусть выражение $U \in \Sigma_{KA}$, T – канонический вывод этого выражения Тогда $S^{X_1 \ldots X_m}_{V_1 \ldots V_m} T|$ есть нормальный вывод выражения $S^{X_1 \ldots X_m}_{V_1 \ldots V_m} U|$.*

Пусть $\Sigma(\tilde{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{A}}_m)$ есть промежуточное исчисление. Тогда канонический вывод T_i аксиомы $\tilde{\mathfrak{A}}_i$ в исчислении Σ_{KA} казывается соответствующим выводом этой аксиомы, $i=1,2,\ldots,n$. Если $\mathfrak{A}_i^* \equiv S^{X_1 \ldots X_m}_{V_1 \ldots V_m} \tilde{\mathfrak{A}}_i|$, то вывод $S^{X_1 \ldots X_m}_{V_1 \ldots V_m} T_i$ также будем называть соответствующим для выражения $\mathfrak{A}_i^*$.

В дальнейшем нам потребуется такое определение.

Вывод выражения U в исчислении $\sum(\tilde{\mathfrak{A}}_1,\ldots,\tilde{\mathfrak{A}}_n)$ называется каноническим, если его любая полная ветвь имеет такой вид, как на рис. 1. 2, а, в – з, причем в последнем случае вместо символа $\sum_{K\Lambda}$ стоит $\sum(\tilde{\mathfrak{A}}_1,\ldots,\tilde{\mathfrak{A}}_n)$, либо как на рис. 2. 1, где $k \geqslant 0$ и $\{W_{i_1},\ldots,W_{i_k}\} \subseteq \{W_1,\ldots,W_m\}$.

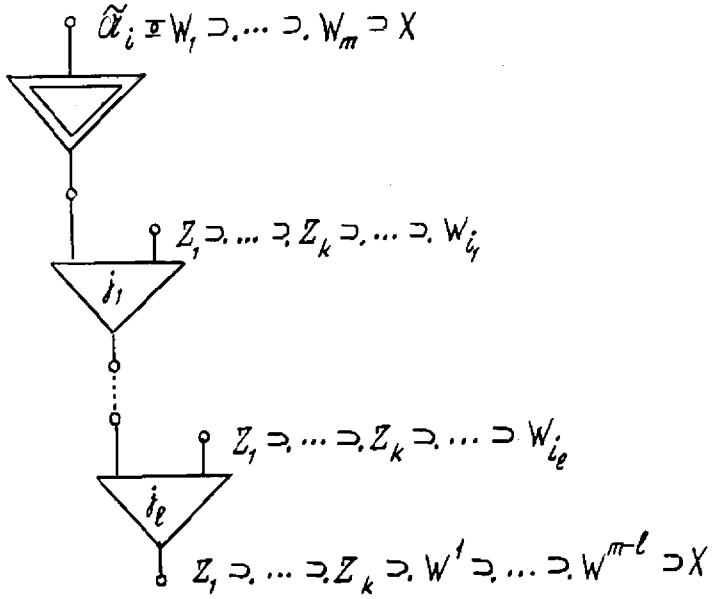


Рис. 2. 1

Почти так же, как в [2], доказывается

ТЕОРЕМА 2. 1. Каждый вывод в исчислении $\sum(\tilde{\mathfrak{A}}_1,\ldots,\tilde{\mathfrak{A}}_n)$ конечным числом преобразований по схемам системы S_3 можно привести к единственному каноническому виду.

Пусть D_U – синтаксическое дерево, $\Phi \subseteq D_U$ – его поддерево, удовлетворяющее следующим условиям:

1) Φ содержит корень дерева D_U;

2) из того, что узел $N \in \Phi$, следует, что либо все узлы дерева D_U, расположенные непосредственно ниже N, принадлежат Φ, либо ни один.

Тогда Φ называется правильным поддеревом D_U.

ЛЕММА 2.2. Пусть выражение U имеет вид $U_1' \supset U_2'$, $U_1 \in \Sigma_{KA}$ и $\Phi \subseteq D_U$ – правильное поддерево, в котором все используемые выражения не являются предшественниками посылки U_1'. Допустим далее, что вывод $T(T_1)$ построен по дереву D_U (D_{U_1}), T_2 есть вывод выражения U_2, полученный навешиванием вывода $T(T_1)$ непосредственно выше большой (малой) посылки правила модус поненс вида $\dfrac{U_1 \supset U_2 \quad U_1}{U_2}$ и $T_2 \Rightarrow D_{U_2}$. Тогда в D_{U_2} имеется правильное поддерево Φ^*, полученное из Φ вычеркиванием всех предшественников посылки U_1'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы следует из того, что в выводе T $(D_U \Rightarrow \Rightarrow T)$ имеет место непустой фрагмент, включающий корень вывода, в котором, грубо говоря, посылка U_1' несущественная.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть выражение $U \in \Sigma_{KA}$ и ни одна формула вида $X \supset f$, введенная β-узлом в D_U, не является последователем никакого используемого выражения или выражения замыкания. Тогда $U \in \Sigma_H$.

ЛЕММА 2.3. Пусть выражение $U \in \Sigma_{KA}$ и имеет вид $U_1' \supset U_2'$; $x', x''(x''', x^{(4)})$ есть вхождения переменной x в подформулу $U_1'(U_2')$; синтаксическое дерево D_U определяет классы замкнутости таким образом, что $x''' \in H_{x'}$, $x^{(4)} \in H_{x''}$ и $H_{x'} \cap H_{x''} = \emptyset$. Допустим далее, что для D_{U_1} имеет место включение $x'' \in H_{x'}$ и $D_{U_1} \Rightarrow T_1$, $D_U \Rightarrow T$, а T_2 есть канонический вид вывода $\tilde{T}_2$ выражения U_2, построенного из выводов T и T_1 с помощью правила модус поненс вида $\dfrac{U_1 \supset U_2 \quad U_1}{U_2}$. Тогда для синтаксического дерева D_{U_2} такого, что $T_2 \Rightarrow D_{U_2}$, справедливо включение $x^{(4)} \in H_{x'''}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, т. е. $x^{(4)} \notin H_{x'''}$. Заменим в дереве D_{U_2} всех предшественников переменных из $H_{x'''}$ на переменную y. В результате получим синтаксическое дерево $D_{\widetilde{U}_2}$, которому соответствует вывод T_2^* выражения $\widetilde{U}_2$, полученный из T_2 некоторыми заменами переменной x на y. Но тогда, согласно лемме 1. 5 из вывода T_2^* можно получить вывод $\hat{T}_2$, отличающийся от $\widetilde{T}_2$ лишь некоторыми заменами переменной x на y. И, как видно, получающаяся из $\widetilde{T}_2$ фигура при такой замене перестает быть выводом. Противоречие.

Лемма доказана.

§ 3. Системы продукций Поста

Система продукций Поста (П) задается своим алфавитом $\sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и системой базисных продукций (Π_i) вида:

$$(\Pi_i) \quad WR_i \longrightarrow P_i W, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где R_i, P_i – некоторые (можно потребовать, чтобы они были непустыми) слова в алфавите σ.

Пусть некоторое слово Q оканчивается словом R_i. Произвести над словом Q продукцию (Π_i) – значит отбросить конечное подслово R_i, а затем к началу оставшегося слова приписать слово P_i. Считается, что к слову, конец которого отличен от слова R_i, продукция (Π_i) неприменима.

Будем говорить, что слово V выводимо из слова V_0 в системе продукций (Π), если существует конечная цепочка $V_0, \ldots, V_q$ слов таких, что $V = V_q$, и каждое слово V_i получается из предыдущего V_{i-1} посредством некоторой продукции (Π_j), $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $i = 1, 2, \ldots, q$.

Справедлива (см. [5])

ТЕОРЕМА 3. 1. *Существует такая система продукций Поста (Π) в которой совокупность всех слов, выводимых из подходящего слова V_0, нерекурсивна.*

Отметим, что существуют системы продукций Поста с алгоритмически неразрешимой проблемой выводимости, у которых все слова R_i и P_i непустые. В дальнейшем мы будем иметь в виду именно такую систему продукций.

Справедлива

ТЕОРЕМА 3.2. В системе продукций (Π) из слова V_0 выводимо слово V тогда и только тогда, когда существует набор индексов $i_1, i_2, \ldots, i_q$, $q \geq 0$, таких, что

$$(*)\quad VR_{i_q} \ldots R_{i_2} R_{i_1} = P_{i_q} P_{i_q} \ldots P_{i_2} P_{i_1} V_0$$

и

(**) длина слова V не меньше длины слова P_{i_q} и для любого $j = 2, 3, \ldots, q$ длина слова $VR_{i_q} \ldots R_{i_j}$ не меньше длины слова $P_{i_q} \ldots P_{i_{j-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $V = V_0$, то доказательство элементарно. Допустим теперь, что слово V_0 можно представить как $V_0 = W_1 R_{i_1}$. Тогда $V_0 \to P_{i_1} W_1 = V_1$. Далее мы получаем $V_1 = W_2 R_{i_2} \longrightarrow$ $\longrightarrow P_{i_2} W_2 = V_3 \ldots$ Таким образом, вывод слова V из V_0 можно представить как (отношение следования обозначается вертикальной чертой):

$$\begin{array}{l}
V_0 = W_1 R_{i_1} \\
\quad | \\
\quad P_{i_1} W_1 = W_2 R_{i_2} \\
\qquad\qquad | \\
\qquad\quad P_{i_2} W_2 = W_3 \\
\qquad\qquad\qquad | \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad | \\
\qquad\qquad\quad P_{i_{q-1}} W_{q-1} = W_q R_{i_q} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad P_{i_q} W_q = V.
\end{array}$$

При этом порядок применений продукций будет таким: $\Pi_{i_1} \Pi_{i_2} \ldots \Pi_{i_q}$.

Из этого мы получаем

$$V = P_{i_q} W_q, \quad VR_{i_q} = P_{i_q} W_q R_{i_q} = P_{i_q} P_{i_{q-1}} W_{q-1},$$
$$VR_{i_q} R_{i_{q-1}} = P_{i_q} P_{i_{q-1}} W_{q-1} R_{i_{q-1}} = P_{i_q} P_{i_{q-1}} P_{i_{q-2}} W_{q-2}, \ldots,$$
$$VR_{i_q} R_{i_{q-1}} \ldots R_{i_1} = P_{i_q} P_{i_{q-1}} \ldots P_{i_1} W_1 R_{i_1} = P_{i_q} \ldots P_{i_1} V_0.$$

Длина слова V не меньше длины слова P_{i_q}, длина слова VR_{i_q} не меньше длины слова $P_{i_q} P_{i_{q-1}}$, длина слова $VR_{i_q} R_{i_{q-1}}$ не меньше длины

слова $P_{i_q} P_{i_{q-1}} P_{i_{q-2}}, \ldots$, длина слова $VR_{i_q} \ldots R_{i_j}$ не меньше длины слова $P_{i_q} \ldots P_{i_{j-1}}$. В одну сторону теорема доказана.

Допустим теперь, что по словам V_0 и V можно найти такие индексы $i_1, \ldots, i_q$, что для них выполняются условия (ж) и (жж). Проведем дальнейшее доказательство индукцией по q. Если $q=1$, то $VR_{i_q} = P_{i_1} V_0$ и длина слова V не меньше длины слова P_{i_1}. Таким образом,

$$V = P_{i_1} W_1, \; V_0 = W_1 R_{i_1} \longrightarrow V_1 = P_{i_1} W_1 = V.$$

Допустим, что теорема верна для любого $q \leqslant n$, и пусть имеется такая цепочка индексов $i_1, \ldots, i_q$, что $VR_{i_q} \ldots R_{i_1} = P_{i_q} \ldots P_{i_1} V_0$, $q = n+1$ и выполняется условие (жж). В силу условия (жж), длина слова $VR_{i_q} \ldots R_{i_2}$ не меньше длины слова $P_{i_q} \ldots P_{i_1}$. Следовательно, $V_0 = WR_{i_1}$, $VR_{i_q} \ldots \ldots R_{i_2} R_{i_1} = P_{i_q} \ldots P_{i_1} WR_{i_1}$ или $VR_{i_q} \ldots R_{i_2} = P_{i_q} \ldots P_{i_1} W_1$. Пусть $P_{i_1} W_1 = V_1$. Тогда $VR_{i_q} \ldots R_{i_2} = P_{i_q} \ldots P_{i_1} V_1$, и для этих слов выполняется индукционная гипотеза. Отсюда следует справедливость теоремы в обратном направлении.

§ 4. Некоторые вспомогательные определения и теоремы

Введем следующие обозначения:

$$A_{-1}(p,q) = p, \; B_{-1}(p,q) = q, \; A_{n+1}(p,q) = A_n(p,q) \supset B_n(p,q),$$
$$B_{n+1}(p,q) = A_n(p,q) \vee B_n(p,q).$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 4.1. Пусть $\Gamma = \{A_n, \ldots, A_{q+2}, A_q\}$, где $q \geqslant -1$, $n \geqslant q+2 \geqslant 1$, и $V \overset{\Sigma}{\in} \Gamma \supset B_q$. Тогда $V \in \Sigma_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $q \geqslant -1$. Базис индукции: $q = -1$. Допустим, что выражение $V \in \Sigma_n$. В этом случае в исчислении Σ_n существует неуменьшаемое синтаксическое дерево D_V. Для корня $N \in D_V$ существует единственная возможность – быть узлом разбора посылок с используемым выражением A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Но тогда ниже узла N расположен узел N_1 с приписанным ему выражением $\Gamma \supset . B_{i-1} \supset B_{-1}$. Так как $i-1 > -1$, то выражение $B_{i-1} = A_{i-2} \vee \ldots \vee A_{-1} \vee B_{-1}$, а в силу того, что $A_{-1} \in \Gamma$, возникает противоречие с условием неуменьшаемости дерева D_V.

Допустим теперь, что лемма верна для любого $q \leqslant m$, и пусть выражение V, если $q = m+1$, имеет вид $A_n \supset . \ldots \supset . A_{(m+1)+2} \supset .$

$\supset . A_{m+1} \supset B_{m+1}$ и в исчислении $\Sigma_и$ существует неуменьшаемое синтаксическое дерево D_V. Если корень $N \in D_V$ есть узел разбора посылок с используемым выражением $A_i \in \Gamma$, то непосредственно ниже N лежат два узла N_1 и N_2, которым приписаны выражения соответственно $V_1 \equiv \Gamma \supset A_{i-1}$ и $V_2 \equiv \Gamma \supset . B_{i-1} \supset B_{m+1}$. Возможны следующие случаи:

1) $i = m+1$. Тогда выражение V_1 имеет вид $\Gamma \supset A_m$, и так как $B_{m+1} = A_m \vee B_m$, то возникает противоречие с предположением о неуменьшаемости дерева D_V;

2) $i \geq q+2 = m+3$. В этом случае выражение $V_2 \equiv \Gamma \supset . (A_{i-2} \vee \ldots \ldots \vee A_{-1} \vee B_{-1}) \supset B$. Так как $i-2 \geq m+1$, то существует такое $j \in \{i-2, \ldots, -1\}$, что выражение $A_j \in \Gamma$. Вновь возникает противоречие с предположением о неуменьшаемости дерева D_V.

Следовательно, корень N есть узел усиления заключения, непосредственно ниже которого расположен узел N_1 с приписанным ему выражением $\tilde{V}$ вида $\Gamma \supset (A_{j_1} \vee \ldots \vee A_{j_k} \vee \tilde{B})$, $k \geq 1$ и $\tilde{B}$ есть либо пустое выражение, либо B_{-1}.

Легко увидеть, что предположение о том, что узел N_1 есть узел разбора посылок, приводит к противоречию с условием о неуменьшаемости дерева D_V. Следовательно, узел N_1 – также узел усиления заключения, т. е. выражение V_1 имеет вид:

$$\Gamma \supset A_{j_s} \equiv \Gamma \supset . A_{j_s - 1} \supset B_{j_s - 1}, \; s \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ и } j_s - 1 \leq m-1.$$

Нетрудно увидеть, что, если обозначить значение $j_s - 1$ через q_1, выражение V_1 примет вид $\Gamma \supset . A_{q_1} \supset B_{q_1}$, причем $q_1 \geq -1$, и если выражение V_1 выводимо в исчислении $\Sigma_и$, то в $\Sigma_и$ выводимо выражение V_1^* вида:

$$A_n \supset . \ldots \supset . A_q \supset . \ldots \supset . A_{q_1+2} \supset . A_{q_1} \supset B_{q_1}.$$

Но из индукционной гипотезы следует, что $V_1^* \notin \Sigma_и$. Противоречие.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.22. Выражение $A_n(p, q)$, где p, q – переменные, невыводимо в исчислении $\Sigma_и$ для любого $n \geq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4.23. Выражение $B_n(p, q)$, где p, q – переменные, невыводимо в исчислении $\Sigma_и$ для любого $n \geq 0$.

ЛЕММА 4.2. Выражение $B_{m+k}(p, q) \supset B_m(p, q)$,

где p, q – переменные, невыводимо в исчислении $\sum_и$ для любых $k>0$ и $m\geqslant 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по k. Если $k=1$, то $B_{m+1}\supset B_m=(A_m\vee B_m)\supset B_m$. Выводимость этого выражения в исчислении $\sum_и$ эквивалентна выводимости в $\sum_и$ выражения $A_m\supset B_m=A_{m+1}$, что невозможно.

Допустим теперь, что лемма справедлива для любого $k\leqslant n$, и докажем ее для значения $k=n+1$.

По определению, $B_{m+k}\supset B_m=(A_{m+k-1}\vee B_{m+k-1})\supset B_m=$

$$=(A_{m+k-1}\vee A_{m+k-2}\vee\ldots\vee A_{-1}\vee B_{-1})\supset B_m.$$

Это выражение выводимо в исчислении $\sum_и$ тогда и только тогда, когда выводимы в $\sum_и$ все выражения вида $A_i\supset B_m$, $i=m+k-1,\ldots,-1$. Но уже выражение $A_m\supset B_m=A_{m+1}$ невыводимо в $\sum_и$.

Лемма доказана.

Аналогично доказывается

ЛЕММА 4. 3. Выражение

$$B_{m+k_1}(p,q)\supset B_{m+k_2}(p,q)\supset\ldots\supset B_{m+k_n}(p,q)\supset B_m(p,q),$$

где p,q – переменные, невыводимо в исчислении $\sum_и$ при любых $m\geqslant 0$ и $k_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$.

ЛЕММА 4. 4. При $m,k\geqslant 0$ справедливы выражения

$$A_m(A_k(p,q),B_k(p,q))=A_{m+k+1}(p,q);$$

$$B_m(A_k(p,q),B_k(p,q))=B_{m+k+1}(p,q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по m. Если $m=0$, то $B_m(p,q)=p\vee q$, $B_m(A_k,B_k)=A_k\vee B_k=B_{k+1}$. Аналогично для $A_m(p,q)$: $A_0(p,q)=p\supset q$, $A_0(A_k,B_k)=A_k\supset B_k=A_{k+1}=A_{m+k+1}$.

Допустим теперь, что лемма справедлива для $m=h$, и пусть $m=h+1$. В этом случае

$$B_{h+1}(p,q)=A_h(p,q)\vee B_h(p,q);$$

$$B_{h+1}(A_k,B_k)=A_h(A_k,B_k)\vee B_h(A_k,B_k)=$$

$$A_{h+k+1}(p,q)\vee B_{h+k+1}(p,q)=B_{h+k+2}(p,q)=B_{m+k+1}(p,q).$$

Аналогично для $A_{h+1}(A_k, B_k)$:

$$A_{h+1}(p,q) = A_h(p,q) \supset B_h(p,q);$$
$$A_{h+1}(A_k,B_k) = A_h(A_k,B_k) \supset B_h(A_k,B_k) =$$
$$= A_{h+k+1}(p,q) \supset B_{h+k+1}(p,q) = A_{h+k+2}(p,q) = A_{m+k+1}(p,q).$$

Лемма доказана.

Каждое слово в приводимом ранее алфавите σ мы будем характеризовать кодом этого слова и кодом длины этого слова. Пусть слово A имеет вид $a_{i_1} \ldots a_{i_n}$, $n \geq 1$. Тогда кодом слова A называется пропозициональное выражение

$$cod(A, r, p_1, q_1, p_2, q_2) \overset{\text{I}}{=} r \supset B_{i_1}(p_1, q_1) \supset B_{i_1}(p_2, q_2) \supset$$
$$\supset \ldots \supset B_{i_1+i_2+\ldots+i_n}(p_1, q_1) \supset B_{i_1+i_2+\ldots+i_n}(p_2, q_2),$$

где r, p_1, q_1, p_2, q_2 – попарно различные пропозициональные переменные. Иногда мы будем употреблять более короткую запись $cod(A)$, если это не влечет недоразумений.

Так как в дальнейшем мы будем рассматривать лишь непустые слова, то нам нет необходимости определять код пустого слова.

Длина же слова A кодируется так. Пусть s – целое положительное число такое, что $s > |\sigma|$, p, q – пропозициональные переменные и ℓ – длина слова A, т. е. $\ell = |A|$. Тогда кодом длины слова A, обозначаемым $cod(|A|, p, q)$, называется выражение $B_{s \cdot \ell}(p,q)$. Иногда мы будем употреблять более короткую запись $cod(|A|)$, если это не вносит путаницы.

Докажем ряд лемм. Нам потребуются

ЛЕММА 4.5. Пусть A и C – слова в алфавите σ, $cod(|A|, p, q) = B_{k_1}$, $cod(|C|, p, q) = B_{k_2}$. В этом случае в исчислении $\Sigma_И$ выводимо выражение $X \vee B_{k_1} \equiv B_{k_2}$, где X есть выражение, построенное лишь из переменных p и q, тогда и только тогда, когда $|A| \leq |C|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что в исчислении $\Sigma_И$ выводимо это выражение, но $|A| > |C|$. В этом случае $k_1 > k_2$, и в исчислении $\Sigma_И$ выводимо выражение $X \vee B_{k_1} \supset B_{k_2}$. Получили противоречие с леммой 4.2, так как $k_1 > k_2$. Поэтому $|A| \leq |C|$.

Допустим теперь, что $|A| \leq |C|$. В этом случае, если $|A| = |C|$,

то достаточно взять выражение $X = B_{k_1}$, а если $|A| < |C|$, то $B_{k_2} = A_{k_2-1} \vee B_{k_2-1} = A_{k_2-1} \vee A_{k_2-2} \vee B_{k_2-2} = A_{k_2-1} \vee A_{k_2-2} \vee \ldots \vee A_{k_1} \vee B_{k_1}$ и достаточно взять выражение $X = A_{k_2-1} \vee \ldots \vee A_{k_1}$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.6. Пусть A и C – слова в алфавите σ, $cod(|A|, p, q) = B_i(p, q)$; $cod(|C|, p, q) = B_j(p, q)$; p, q – пропозициональные переменные. Тогда

$$cod(|AC|) = B_i(A_{j-1}(p,q), B_{j-1}(p,q)) = B_j(A_{i-1}(p,q), B_{i-1}(p,q)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|A| = n_1$, $|C| = n_2$, то $|AC| = n_1 + n_2$. Поэтому, так как $cod(|A|) = B_{s \cdot n_1}$ и $cod(|C|) = B_{s \cdot n_2}$, мы имеем, что $cod(|AC|) = B_{s \cdot (n_1 + n_2)}$. В силу ранее доказанной леммы 4.4, мы получаем справедливость настоящей леммы.

ЛЕММА 4.7. Пусть V, $R_{i_1}, \ldots, R_{i_{j+1}}$ – слова в алфавите σ, $\tau, p_1, q_1, p_2, q_2, p, q$ – попарно различные пропозициональные переменные; слово $R_{i_{j+1}} = a_{k_1} \ldots a_{k_q}$ и

$$cod((VR_{i_1} \ldots R_{i_j}), \tau, p_1, q_1, p_2, q_2) = \tau \supset B_{n_0}(p_1, q_1) \supset B_{n_0}(p_2, q_2) \supset \ldots$$
$$\supset B_{n_1}(p_1, q_1) \supset B_{n_1}(p_2, q_2);$$
$$cod(R_{i_{j+1}}, \tau, p_1, q_1, p_2, q_2) = \tau \supset B_{k_1}(p_1, q_1) \supset B_{k_1}(p_2, q_2) \supset \ldots$$
$$\supset B_{k_1 + \ldots + k_q}(p_1, q_1) \supset B_{k_1 + \ldots + k_q}(p_2, q_2);$$
$$cod(|VR_{i_1} \ldots R_{i_j}|, p, q) = B_{m_1}(p, q);$$
$$cod(|R_{i_{j+1}}|, p, q) = B_{m_2}(p, q).$$

Тогда выражение $cod((VR_{i_1} \ldots R_{i_{j+1}}), \tau, p_1, q_1, p_2, q_2)$ получается из выражения $cod(R_{i_{j+1}}, \tau, p_1, q_1, p_2, q_2)$ подстановкой на места переменной τ выражения $cod(VR_{i_1} \ldots R_{i_j})$, переменной $p_1(q_1)$ – выражения $A_{n_1-1}(p_1, q_1)(B_{n_1-1}(p_1, q_1))$ и переменной $p_2(q_2)$ – выражения $A_{n_1-1}(p_2, q_2)(B_{n_1-1}(p_2, q_2))$. А выражение $cod(|VR_{i_1} \ldots R_{i_{j+1}}|)$ получается из выражения $cod(|R_{i_{j+1}}|, p, q)$ подстановкой на место переменной $p(q)$ выражения $A_{m_1-1}(p, q)(B_{m_1-1}(p, q))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале первое утверждение. Для этого произведем все указанные подстановки. В результате из выражения $cod(R_{i_{j+1}},$

$\tau, p_1, q_1, p_2, q_2)$ мы получим выражение

$$\begin{aligned}
&cod((\vee R_{i_1} \dots R_{i_j}), \tau, p_1, q_1, p_2, q_2) \supset B_{n_1+k_1}(p_1, q_1) \supset \\
&\supset B_{n_1+k_1}(p_2, q_2) \supset \dots \supset B_{n_1+k_1+\dots+k_q}(p_1, q_1) \supset \\
&\supset B_{n_1+k_1+\dots+k_q}(p_2, q_2) = \tau \supset B_{n_0}(p_1, q_1) \supset B_{n_0}(p_2, q_2) \supset \dots \supset \\
&\supset B_{n_1}(p_1, q_1) \supset B_{n_1}(p_2, q_2) \supset B_{n_1+k_1}(p_1, q_1) \supset \\
&\supset B_{n_1+k_1}(p_2, q_2) \supset \dots \supset B_{n_1+k_1+\dots+k_q}(p_1, q_1) \supset B_{n_1+k_1+\dots+k_q}(p_2, q_2).
\end{aligned}$$

Первое утверждение доказано, второе следует непосредственно из леммы 4. 6.

Как следствие из леммы 4. 1 получается

ЛЕММА 4. 8. Пусть A – слово в алфавите σ. Тогда выражения $cod(A, \tau, p_1, q_1, p_2, q_2)$ и $cod(|A|, p, q)$ невыводимы в исчислении $\Sigma_и$.

Справедлива

ЛЕММА 4. 9. Пусть A и C – слова в алфавите σ. $V_1 \overset{\Delta}{=} cod(A, \tau, p_1, q_1, p_2, q_2) = \tau \supset B_{i_1}(p_1, q_1) \supset B_{i_1}(p_2, q_2) \supset \dots \supset B_{i_m}(p_1, q_1) \supset B_{i_m}(p_2, q_2)$, а $V_2 \overset{\Delta}{=} cod(C, \tau, p_1, q_1, p_2, q_2) = \tau \supset B_{j_1}(p_1, q_1) \supset B_{j_1}(p_2, q_2) \supset \dots \supset B_{j_\ell}(p_1, q_1) \supset B_{j_\ell}(p_2, q_2)$. В этом случае выражение $(V_1 \equiv V_2) \in \Sigma_и$ тогда и только тогда, когда $A \overset{\Delta}{=} C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если слова A и C совпадают, то, по определению кода слова, совпадают и выражения V_1 и V_2, а поэтому выражение $(V_1 \equiv V_2) \in \Sigma_и$.

Докажем лемму в обратном направлении. Допустим, что $A \neq C$, но выражение $(V_1 \equiv V_2) \in \Sigma_и$. Так как $V_1 \neq V_2$, то, не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что либо $i_m = j_\ell, \dots, i_{m-k} = j_{\ell-k}$, но $i_{m-k-1} < j_{\ell-k-1}$ для некоторого $k \geq 0$, либо $i_m = j_\ell, \dots, i_1 = j_{\ell-m+1}$.

Обозначим выражение $cod(A)$ через $\Delta_m \supset B_{i_m}(p_1, q_1) \supset B_{i_m}(p_2, q_2)$ и $\Delta_n \overset{\Delta}{=} \Delta_{n-1} \supset B_{i_{n-1}}(p_1, q_1) \supset B_{i_{n-1}}(p_2, q_2)$, $n = 1, 2, \dots, m$, а выражение $cod(C)$ представим как $\tilde{\Delta}_\ell \supset B_{i_\ell}(p_1, q_1) \supset B_{i_\ell}(p_2, q_2)$ и $\tilde{\Delta}_k \overset{\Delta}{=} \tilde{\Delta}_{k-1} \supset B_{i_{k-1}}(p_1, q_1) \supset B_{i_{k-1}}(p_2, q_2)$, $k = 1, 2, \dots, \ell$. Рассмотрим выражение

$$V \overset{\Delta}{=} cod(C) \supset cod(A) \overset{\Delta}{=} \{\tilde{\Delta}_\ell \supset B_{j_\ell}(p_1, q_1) \supset B_{j_\ell}(p_2, q_2)\} \supset \{\Delta_m \supset B_{i_m}(p_1, q_1) \supset B_{i_m}(p_2, q_2)\}.$$

Мы предположили, что $V \in \Sigma_и$. Поэтому в исчислении $\Sigma_и$ существует неуменьшаемое синтаксическое дерево D_V. Очевидно, что корень дерева D_V есть B-узел или эквивалентный ему узел разбора посылок, причем в обоих случаях формула использования есть первая посылка выражения V. А так как $i_m = j_\ell$, то непосредственно ниже корня расположен узел N_1, которому приписано выражение $\tilde{V}_1$ вида $\{\tilde{\Delta}_\ell \supset B_{j_\ell}(p_1,q_1) \supset B_{j_\ell}(p_2,q_2)\} \supset \supset \{\Delta_m \supset B_{i_m}(p_1,q_1)\} \supset . \tilde{\Delta}_\ell \supset B_{j_\ell}(p_1,q_1)$. Для узла N_1 также легко увидеть, что он есть B-узел или эквивалентный ему узел разбора посылок с используемым выражением $\Delta_m \supset B_{i_m}(p_1,q_1)$. А так как $i_m = j_\ell$, то непосредственно ниже узла N_1 расположен узел N_2, которому приписано выражение $\tilde{V}_2$ вида $\{\tilde{\Delta}_\ell \supset B_{j_\ell}(p_1,q_1) \supset B_{j_\ell}(p_2,q_2)\} \supset \{\Delta_m \supset B_{i_m}(p_1,q_1)\} \supset . \tilde{\Delta}_\ell \supset \supset \Delta_m$.

Из леммы 4. 2 и определения кода слова следует, что первые две посылки выражения $\tilde{V}_2$ несущественны для узлов дерева D_V, лежащих ниже узла N_2. Отсюда следует, что выражение $\tilde{V}_2$ можно представить так: $\tilde{\Delta}_\ell \supset \Delta_m$. А к нему применимы все те рассуждения, которые применялись выше к выражению V, так как $i_{m-1} = j_{\ell-1}$.

Наконец мы доходим до выражения $\tilde{V}_q$, которое имеет вид либо $\{\tilde{\Delta}_{\ell-k-1} \supset B_{j_{\ell-k-1}}(p_1,q_1) \supset B_{j_{\ell-k-1}}(p_2,q_2)\} \supset \{\Delta_{m-k-1} \supset B_{i_{m-k-1}}(p_1,q_1)\} \supset \supset B_{i_{m-k-1}}(p_2,q_2)$, либо $\{\tilde{\Delta}_{\ell-m} \supset B_{j_{\ell-m}}(p_1,q_1) \supset B_{j_{\ell-m}}(p_2,q_2)\} \supset \tau$. Но $\tilde{V}_q \notin \Sigma_и$ либо в силу леммы 4. 2 и того, что $i_{m-k-1} < j_{\ell-k-1}$, либо в силу того, что переменная τ отлична от переменных p_1, p_2, q_1, q_2. Получили противоречие с выдвинутым предположением, что $V \in \Sigma_и$.

Лемма доказана.

§ 5. Исчисление $\tilde{\Sigma}$ и выражение U^*

Сейчас мы по системе продукций (Π) и ранее упомянутому в § 3 слову V_0 в алфавите $\mathfrak{б}$ построим исчисление $\tilde{\Sigma}$ с алгоритмически неразрешимой проблемой выводимости. Исчисление $\tilde{\Sigma}$ содержит $m+1$ дополнительную аксиомную схему: на одну больше, чем число продукций в системе (Π). Но вначале мы введем ряд определений, которые потребуются нам для формулировки этого исчисления.

Выражения $A_1, A_2, \ldots$ называются сверхнезависимыми, если ни при каких попарно различных $i, \ldots, j, k, \ldots, \ell$ не выполняется соотношение $A_i \& \ldots \& A_j \vdash_{\Sigma'_и} A_k \vee \ldots \vee A_\ell$, где $\Sigma'_и$ получается из $\Sigma_и$ добавлением

правила подстановки, и в выражениях $A_k, \ldots, A_\ell$ множества переменных попарно не пересекаются. Известно [1], что для всякого целого положительного n существуют n сверхнезависимых выражений, зависящих от $n+1$ переменной. Примерами этих выражений являются те n формул, у которых i-я, $i=1,2,\ldots,n$, есть результат подстановки формулы $\overline{X}_{i+1} \overset{\Sigma}{\equiv} X_{i+1} \supset f$ вместо переменной X_{i+1} в формулу $\alpha(X_1,\ldots,X_{n+1}) \overset{\Sigma}{\equiv} X_{n+1} \vee (X_{n+1} \supset (X_n \vee (X_n \supset \ldots \supset (X_2 \vee (X_2 \supset (\overline{X}_1 \vee \overline{\overline{X}}_1))) \ldots)))$. Такие выражения мы будем обозначать $\alpha^1(X_1,\ldots,X_{n+1}),\ldots,\alpha^n(X_1,\ldots,X_{n+1})$. Иногда, там где не влечет недоразумения, выражение $\alpha^i(X_i,\ldots,X_{n+1})$ мы будем обозначать $\alpha^i(\vec{X})$, или просто α^i.

Пусть выражение $\alpha^i(X_1,\ldots,X_{n+1})$ имеет вид

$$X_{n+1}^{\sigma_{n+1}} \vee \left(X_{n+1}^{\sigma_{n+1}} \supset (X_n^{\sigma_n} \vee (X_n^{\sigma_n} \supset \ldots \supset (\overline{X}_1 \vee \overline{\overline{X}}_1) \ldots))\right).$$

Тогда выражение $X_k^{\sigma_k} \vee (X_k^{\sigma_k} \supset \ldots \supset (\overline{X}_1 \vee \overline{\overline{X}}_1) \ldots)$ мы будем обозначать знаком $\alpha_k^i(X_1,\ldots,X_k)$. Иногда для этого выражения мы будем употреблять сокращенную запись α_k^i, если это не приводит к недоразумению. Очевидно, что $(\alpha_k^i \supset \alpha^i) \in \sum_{n+1}^{n+1}$.

Обозначим знаком $\sum_{j_1,\ldots,j_m}$, где $\{j_1,\ldots,j_m\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$, $m \geq 0$, исчисление, которое получается из $\sum_n$ добавлением аксиомных схем $\alpha^{j_1}(X_1,\ldots,X_{n+1}),\ldots,\alpha^{j_m}(X_1,\ldots,X_{n+1})$.

Легко доказывается

ЛЕММА 5. 1. В исчислении $\sum_i^{n+1}$ невыводимо выражение α_k^i при $2 \leq k \leq n$.

ЛЕММА 5. 2. Пусть выражения $\alpha^i \overset{\Sigma}{\equiv} X_{n+1} \vee (X_{n+1} \supset \alpha_n^i)$ и $\alpha^j \overset{\Sigma}{\equiv} X_{n+1} \vee (X_{n+1} \supset \alpha_n^j)$, исчисление $\sum_j^n$ получается из $\sum_n$ добавлением схемы $\alpha_n^j(X_1,\ldots,X_n)$. Тогда $\alpha_n^i \notin \sum_j^n$.

В дальнейшем нам потребуется

ЛЕММА 5. 3. В исчислении $\sum_{j_1,\ldots,j_m}$ невыводимо выражение $V \overset{\Sigma}{\equiv} \alpha^i(X_1,\ldots,X_{n+1}) \supset . X_{n+1}^{\sigma_{n+1}} \supset \alpha_n^i(X_1,\ldots,X_n)$, где $i \notin \{j_1,\ldots,j_m\}$ и $\alpha^i(X_1,\ldots,X_{n+1}) \overset{\Sigma}{\equiv} X_{n+1}^{\sigma_{n+1}} \vee (X_{n+1}^{\sigma_{n+1}} \supset \alpha_n^i(X_1,\ldots,X_n))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО от противного. Допустим, что выражение $V \in \sum_{j_1,\ldots,j_m}^{n+1}$. В этом случае в исчислении $\sum_n$ выводимо выражение U вида $(\mathop{\&}_{k=1}^{r} W_k) \supset V$, где W_k есть дополнительная аксиома исчисления $\sum_{j_1,\ldots,j_m}^{m}$, $k=1,2,\ldots,r$, а следовательно, существует синтаксическое дерево D_U. Не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что корень $N \in D_U$ есть узел разбора посылок с используемым выражением $\alpha^i(X_1,\ldots,X_{n+1}$

и ниже узла N лежит узел N_1, которому приписано выражение

$$V_1 \equiv \left(\mathop{\&}_{k=1}^{r} W_k\right) \supset . X_{n+1}^{\sigma_{n+1}} \supset \alpha_n^i (X_1, \ldots, X_n).$$

Но из выводимости в исчислении $\sum_{\mu}$ выражения V_1 следует выводимость в исчислении $\sum_{\mu}$ выражения $\left(\mathop{\&}_{k=1}^{r} W_k\right) \supset \alpha_n^i$, и выводимость в $\sum_{j_1, \ldots, j_m}^{n+1}$ выражения $\alpha^i (X_1, \ldots, X_{n+1})$. Противоречие.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. 1. В исчислении $\sum_{\mu}$ невыводимо выражение $V \equiv \alpha^i (X_1, \ldots, X_{n+1}) \supset . X_{n+1}^{\sigma_{n+1}} \supset \alpha_n^i (X_1, \ldots, X_n)$, где $\alpha^i (X_1, \ldots, X_{n+1}) \equiv X_{n+1}^{\sigma_{n+1}} \vee (X_{n+1}^{\sigma_{n+1}} \supset \alpha_n^1 (X_1, \ldots, X_n)$.

Теперь мы перейдем непосредственно к построению исчисления $\widetilde{\sum}$. Для этого введем такие обозначения.

Пусть $X_1^i, \ldots, X_{12}^i, X_{13}^{i*}, X_{14}^i, \ldots, X_{16}^i$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, есть множество попарно различных пропозициональных переменных; $X_1, X_2, \ldots, X_{67}$ – также множество попарно различных пропозициональных переменных, отличных от введенных ранее; X_{13}^i есть выражение вида $X_{13}^{i*} \vee X_{15}^i$. Образуем выражения $\alpha^1 (X_1, \ldots, X_{67}), \ldots, \alpha^{66} (X_1, \ldots, X_{67})$.

Исчисление $\widetilde{\sum}$ получается из $\sum_{\mu}$ добавлением к нему аксиомных схем $\widetilde{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \widetilde{\mathfrak{A}}_{m+1}$. Каждая схема $\widetilde{\mathfrak{A}}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, исчисления $\widetilde{\sum}$ имеет вид $W_d^i \supset W_i$, где выражения W_d^i и W_i образуются следующим образом:

$$W_{1,0}^{+(i)} \equiv \alpha^1;$$

$$W_{1,1}^{-(i)} \equiv \alpha^1 \supset X_1^i; \quad W_{1,1}^{+(i)} \equiv W_{1,1}^{-(i)} \supset X_1^i;$$

$$W_{1,2}^{-(i)} \equiv W_{1,1}^{+(i)} \supset \alpha^2; \quad W_{1,2}^{+(i)} \equiv W_{1,2}^{-(i)} \supset \alpha^2;$$

$$W_{2,0}^{+(i)} \equiv \alpha^3;$$

$$W_{2,1}^{-(i)} \equiv W_{2,0}^{+(i)} \supset X_2^i; \quad W_{2,1}^{+(i)} \equiv W_{2,1}^{-(i)} \supset X_2^i;$$

$$W_{2,2}^{-(i)} \equiv W_{2,1}^{+(i)} \supset \alpha^4; \quad W_{2,2}^{+(i)} \equiv W_{2,2}^{-(i)} \supset \alpha^4;$$

. . . . . .

$$W_{16,0}^{+(i)} \equiv \alpha^{31};$$

$$W_{16,1}^{-(i)} \equiv W_{16,0}^{+(i)} \supset X_{16}^i; \quad W_{16,1}^{+(i)} \equiv W_{16,1}^{-(i)} \supset X_{16}^i;$$

$$W^{-(i)}_{16,2} \overline{\circ} W^{+(i)}_{16,1} \supset \alpha^{32}; \quad W^{+(i)}_{16,2} \overline{\circ} W^{-(i)}_{16,2} \supset \alpha^{32};$$

$$W^{+(i)}_{17,0} \overline{\circ} \alpha^{33};$$

$$W^{-(i)}_{17,1} \overline{\circ} W^{+(i)}_{17,0} \supset X^i_1; \quad W^{+(i)}_{17,1} \overline{\circ} W^{-(i)}_{17,1} \supset X^i_1;$$

$$W^{-(i)}_{17,2} \overline{\circ} W^{+(i)}_{17,1} \supset \alpha^{34}; \quad W^{+(i)}_{17,2} \overline{\circ} W^{-(i)}_{17,2} \supset \alpha^{34};$$

. . . . . .

$$W^{+(i)}_{32,0} \overline{\circ} \alpha^{63};$$

$$W^{-(i)}_{32,1} \overline{\circ} W^{+(i)}_{32,0} \supset X^i_{16}; \quad W^{+(i)}_{32,1} \overline{\circ} W^{-(i)}_{32,1} \supset X^i_{16};$$

$$W^{-(i)}_{32,2} \overline{\circ} W^{+(i)}_{32,1} \supset \alpha^{64}; \quad W^{+(i)}_{32,2} \overline{\circ} W^{-(i)}_{32,2} \supset \alpha^{64};$$

$$W^{-(i)}_{33} \overline{\circ} W^{+(i)}_{1,2} \supset . W^{(i)}_{2,2} \supset . \ldots \supset . W^{(i)}_{32,2} \supset \alpha^{65};$$

$$W^{+(i)}_{33} \circ W^{-(i)}_{33} \supset . (X^i_{16} \supset \alpha^{66}) \supset \alpha^{65};$$

$$W_i \circ W^{+(i)}_{33}.$$

Выражение W^i_d строится почти так же, как и W_i, но вместо переменных $X^i_1, \ldots, X^i_{16}$ подставляются выражения $\tilde{X}^i_1, \ldots, \tilde{X}^i_{16}$, которые образуются следующим образом.

Выражения $\tilde{X}^i_1, \tilde{X}^i_2, \tilde{X}^i_3, \tilde{X}^i_4, \tilde{X}^i_5$ получаются так.

Подставим на места переменных r, P_1, q_1, P_2, q_2 в выражение $cod(R_i, r, P_1, q_1, P_2, q_2)$ выражения соответственно $X^i_5 \supset (X^i_4 \vee X^i_3) \supset (X^i_2 \vee X^i_1), X^i_4, X^i_3, X^i_2, X^i_1$. В результате получим выражение вида $X^i_5 \supset (X^i_4 \vee X^i_3) \supset (X^i_2 \vee X^i_1) \supset \ldots \supset B_{n_1} \supset (A_{n_2} \vee B_{n_2}) \supset (\tilde{A}_{n_2} \vee \tilde{B}_{n_2})$. Тогда $\tilde{X}^i_5 \overline{\circ} X^i_5 \supset (X^i_4 \vee X^i_3) \supset (X^i_2 \vee X^i_1) \supset \ldots \supset B_{n_1}; X^i_4 \overline{\circ} A_{n_2}; \tilde{X}^i_3 \overline{\circ} B_{n_2}; \tilde{X}^i_2 \overline{\circ} \tilde{A}_{n_2}; \tilde{X}^i_1 \overline{\circ} \tilde{B}_{n_2}$.

Неформально это можно интерпретировать таким образом. Если выражение $X^i_5 \supset (X^i_4 \vee X^i_3) \supset (X^i_2 \vee X^i_1)$ есть код некоторого слова V^1, то выражение $X^i_5 \supset (X^i \vee X^i) \supset X^i \vee X^i \supset \ldots \supset B_n \supset (A_{n_2} \vee B_{n_2}) \supset (\tilde{A}_{n_2} \vee \tilde{B}_{n_2})$ есть код слова $V^2 \overline{\circ} V^1 R_i$.

Аналогично определяются выражения $\tilde{X}^i_6, \tilde{X}^i_7, \tilde{X}^i_8, \tilde{X}^i_9, \tilde{X}^i_{10}$. Подставим на места переменных r, P_1, q_1, P_2, q_2 в выражение $cod(P_i, r, P_1, q_1, P_2, q_2)$ выражения соответственно $X^i_{10} \supset (X^i_9 \vee X^i_8) \supset$

$\supset (X_7^i \vee X_6^i),\ X_9^i,\ X_8^i,\ X_7^i,\ X_6^i$. В результате мы получим выражение вида $X_{10}^i \supset (X_9^i \vee X_8^i) \supset (X_7^i \vee X_6^i) \supset \ldots \supset B_{m_1} \supset (A_{m_2} \vee B_{m_2}) \supset$ $\supset (\widetilde{A}_{m_2} \vee \widetilde{B}_{m_2})$. Тогда $\widetilde{X}_{10}^i \overset{\circ}{=} X_{10}^i \supset (X_9^i \vee X_8^i) \supset (X_7^i \vee X_6^i) \supset \ldots$ $\ldots \supset B_{m_1};\ \widetilde{X}_9^i \overset{\circ}{=} A_{m_2};\ \widetilde{X}_8^i \overset{\circ}{=} B_{m_2};\ \widetilde{X}_7^i \overset{\circ}{=} \widetilde{A}_{m_2};\ \widetilde{X}_6^i \overset{\circ}{=} \widetilde{B}_{m_2}$.

Неформально это можно интерпретировать таким образом. Если выражение $X_{10}^i \supset (X_9^i \vee X_8^i) \supset (X_7^i \vee X_6^i)$ есть код некоторого слова V^3, то выражение $X_{10}^i \supset (X_9^i \vee X_8^i) \supset (X_7^i \vee X_6^i) \supset \ldots \supset B_{m_1} \supset (A_{m_2} \vee B_{m_2}) \supset$ $\supset (\widetilde{A}_{m_2} \vee \widetilde{B}_{m_2})$ есть код слова $V^4 \overset{\circ}{=} V^3 P_i$.

Выражения $\widetilde{X}_{11}^i$ и $\widetilde{X}_{12}^i$ получаются следующим образом. Подставим на места переменных p и q в выражении $cod(|R_i|, p, q)$ переменные соответственно X_{12}^i и X_{11}^i. В результате мы получим выражение вида $A_{h_1} \vee B_{h_1}$. Тогда выражение $\widetilde{X}_{12}^i$ есть A_{h_1}, и выражение $\widetilde{X}_{11}^i$ есть B_{h_1}.

Неформально это можно интерпретировать таким образом. Если выражение $X_{12}^i \vee X_{11}^i$ есть код длины некоторого слова V^5, то выражение $A_{h_1} \vee B_{h_1}$ есть код длины слова $V^6 \overset{\circ}{=} V^5 R_i$.

Выражение $\widetilde{X}_{13}^i$ есть переменная X_{11}^i, а выражение $\widetilde{X}_{14}^i$ есть переменная X_{12}^i.

Неформально это можно интерпретировать таким образом. Если выражение $X_{12}^i \vee X_{11}^i$ есть код длины некоторого слова V^5, то выражение $\widetilde{X}_{14}^i \vee \widetilde{X}_{13}^i$ есть код длины слова V^7 такого, что $|V^7| = |V^5|$.

Для получения выражений $\widetilde{X}_{15}^i$ и $\widetilde{X}_{16}^i$ мы подставим на места переменных p и q в выражение $cod(|P_i, p, q)$ переменные соответственно X_{16}^i и X_{15}^i. В результате получим выражение $A_{h_3} \vee B_{h_3}$. Тогда $\widetilde{X}_{16}^i \overset{\circ}{=} A_{h_3}$ и $\widetilde{X}_{15}^i \overset{\circ}{=} \widetilde{B}_{h_3}$.

Неформально это можно интерпретировать таким образом. Если выражение $X_{16}^i \vee X_{15}^i$ есть код длины слова V^8, то выражение $A_{h_3} \vee B_{h_3}$ есть код длины слова $V^9 \overset{\circ}{=} V^8 P_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Введенное при образовании выражения W_i соглашение о том, что $X_{13}^i \overset{\circ}{=} X_{13}^{i*} \vee X_{15}^i$, неформально можно интерпретировать следующим образом. Если X_{13}^i есть подформула кода длины $cod(|\widetilde{V}|) =$ $= A_{\mu_1} \vee B_{\mu_1}$ такая, что $X_{13}^i \overset{\circ}{=} B_{\mu_1}$, а X_{15}^i есть подформула кода длины $cod(|V^*|) = A_{\mu_2} \vee B_{\mu_2}$ такая, что $X_{15}^i \overset{\circ}{=} B_{\mu_2}$, то из приведенного условия следует, что $\mu_1 \geqslant \mu_2$ и поэтому $|\widetilde{V}| \geqslant |V^*|$.

Кроме этих аксиомных схем, в исчислении Σ имеется еще одна — $\widetilde{a}_{m+1}$. Она образуется следующим образом.

Пусть $V_0 = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ есть ранее упомянутое слово в

алфавите σ. Обозначим буквой $\mathcal{Z}$ выражение, которое получается из $cod(V_0, r, p_1, q_1, p_2, q_2)$ подстановкой на места переменных r, p_1, q_1, p_2, q_2 выражений соответственно $X_{10}^{m+1}, X_9^{m+1}, X_8^{m+1}, X_7^{m+1}, X_6^{m+1}$.

В результате мы получим выражение

$$X_{10}^m \supset \ldots \supset B_{p_1}(X_9^{m+1}, X_8^{m+1}) \supset B_{p_1}(X_7^{m+1}, X_6^{m+1}) \supset \ldots$$

$$\ldots \supset (A_{p_2}(X_9^{m+1}, X_8^{m+1}) \vee B_{p_2}(X_9^{m+1}, X_8^{m+1})) \supset A_{p_2}(X_7^{m+1}, X_6^{m+1}) \vee B_{p_2}(X_7^{m+1}, X_6^{m+1}).$$

Введем такие обозначения. Обозначим символом $\tilde{\mathcal{Z}}_6$ выражение $B_{p_2}(X_7^{m+1}, X_6^{m+1})$, символом $\tilde{\mathcal{Z}}_7$ выражение $A_{p_2}(X_7^{m+1}, X_6^{m+1})$, символом $\tilde{\mathcal{Z}}_8$ выражение $B_{p_2}(X_9^{m+1}, X_8^{m+1})$, символом $\tilde{\mathcal{Z}}_9$ выражение $A_{p_2}(X_9^{m+1}, X_8^{m+1})$ и символом $\tilde{\mathcal{Z}}_{10}$ выражение $X_{10}^{m+1} \supset \ldots \supset B_{p_1}(X_9^{m+1}, X_8^{m+1}) \supset B_{p_1}(X_7^{m+1}, X_6^{m+1})$. Далее, пусть $\tilde{\mathcal{Z}}_1 = \tilde{\mathcal{Z}}_6$, $\tilde{\mathcal{Z}}_2 = \tilde{\mathcal{Z}}_7$, $\tilde{\mathcal{Z}}_3 = \tilde{\mathcal{Z}}_8$, $\tilde{\mathcal{Z}}_4 = \tilde{\mathcal{Z}}_9$, $\tilde{\mathcal{Z}}_5 = \tilde{\mathcal{Z}}_{10}$.

Неформально это можно интерпретировать следующим образом. Если выражение $X_{10}^{m+1} \supset (X_9^{m+1} \vee X_8^{m+1}) \supset X_7^{m+1} \vee X_6^{m+1}$ есть код некоторого слова V^{10}, то полученное выражение $X_{10}^{m+1} \supset \ldots \supset B_{p_1}(X_9^{m+1}, X_8^{m+1}) \supset B_{p_1}(X_7^{m+1}, X_6^{m+1}) \supset \ldots$ $\ldots \supset (A_{p_2}(X_9^{m+1}, X_8^{m+1}) \vee B_{p_2}(X_9^{m+1}, X_8^{m+1}) \vee A_{p_2}(X_7^{m+1}, X_6^{m+1})) \supset$ $\supset B_{p_2}(X_7^{m+1}, X_6^{m+1})$ есть код слова $V^{10}V_0$. Кроме того, выражение $\tilde{\mathcal{Z}}_5 \supset (\tilde{\mathcal{Z}}_4 \vee \tilde{\mathcal{Z}}_3) \supset (\tilde{\mathcal{Z}}_2 \vee \tilde{\mathcal{Z}}_1)$ также есть код слова $V^{10}V_0$.

Далее, пусть $\tilde{\mathcal{Z}}_{11} = X_{11}^{m+1}$, $\tilde{\mathcal{Z}}_{12} = X_{12}^{m+1}, \ldots, \tilde{\mathcal{Z}}_{16} = X_{16}^{m+1}$. Теперь аксиомная схема $\mathfrak{A}_{m+1}$ получается из выражения W_i заменой в нем везде выражений X_j^i на $\tilde{\mathcal{Z}}_j$, $j = 1, 2, \ldots, 16$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Пусть V – слово в алфавите σ, отличное от ранее зафиксированного слова V_0, $\ell \geq 2$ – целое число, $\{i_1, \ldots, i_\ell\}$ – набор индексов таких, что $i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j = 1, 2, \ldots, \ell$, и справедливо следующее.

Слово P_{i_1} есть начало слова V, и для любого $s = 1, 2, \ldots, \ell - 1$, слово $P_{i_1} \ldots P_{i_{s+1}}$ есть начало слова $VR_{i_1} \ldots R_{i_s}$. Очевидно, что для фиксированного набора $\{i_1, \ldots, i_\ell\}$ индексов существует максимальное множество $\mathfrak{M}^\sigma_{\{i_1, \ldots, i_\ell\}}$ слов в алфавите σ, которые удовлетворяют этому условию. Пусть $\mathfrak{M}^\ell_\sigma = \bigcup_{\{i_1, \ldots, i_\ell\}} \mathfrak{M}^\sigma_{\{i_1, \ldots, i_\ell\}}$, где объединение берется по все наборам из ℓ индексов. Из теоремы 3. 2 следует, что все слова из множества $\sigma^* \setminus \mathfrak{M}^\ell_\sigma$, где σ^* есть множество всех слов в алфавите

σ, невыводимы в системе (П) из слова V_0 или имеют лишь выводы длины меньшей, чем ℓ. Легко увидеть, что для каждого отдельного значения ℓ множество $\sigma^* \setminus \mathfrak{M}^{\ell}_{\sigma}$ рекурсивно.

Зафиксируем целое число $\ell \geq 2$ и набор индексов $\{i_1, \ldots, i_\ell\}$ такие, что $i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, и множество $\mathfrak{M}^{\sigma}_{\{i_1, \ldots, i_\ell\}} \neq \emptyset$. Очевидно, что это можно сделать, так как множество слов, выводимых в системе (П) из слова V_0, непусто. Тогда слово $VR_{i_1} \ldots R_{i_{\ell-1}}$ можно представить как $VR_{i_1} \ldots R_{i_{\ell-1}} = P_{i_1} \ldots P_{i_\ell} H$, где H – некоторое слово в алфавите σ.

Пусть для приведенного набора индексов $\{i_1, \ldots, i_\ell\}$ попарно различных пропозициональных переменных $r, p_1, q_1, p_2, q_2, p, q$ выполняются следующие соотношения:

$$cod((VR_{i_1} \ldots R_{i_\ell}), r, p_1, q_1, p_2, q_2) = r \supset \ldots \supset B_{n_1}(p_1, q_1) \supset B_{n_1}(p_2, q_2) \supset$$
$$\supset (A_{n_2}(p_1, q_1) \vee B_{n_2}(p_1, q_1)) \supset A_{n_2}(p_2, q_2) \vee B_{n_2}(p_2, q_2);$$
$$cod((P_{i_1} \ldots P_{i_\ell}), r, p_1, q_1, p_2, q_2) = r \supset \ldots \supset B_{h_1}(p_1, q_1) \supset B_{h_1}(p_2, q_2) \supset$$
$$\supset (A_{h_2}(p_1, q_1) \vee B_{h_2}(p_1, q_1)) \supset A_{h_2}(p_2, q_2) \vee B_{h_2}(p_2, q_2);$$
$$cod(|VR_{i_1} \ldots R_{i_\ell}|, p, q) = A_{m_1}(p, q) \vee B_{m_1}(p, q);$$
$$cod(|VR_{i_1} \ldots R_{i_{\ell-1}}|, p, q) = A_{m_2}(p, q) \vee B_{m_2}(p, q);$$
$$cod(|P_{i_1} \ldots P_{i_\ell}|, p, q) = A_{m_3}(p, q) \vee B_{m_3}(p, q).$$

Введем такие обозначения:

$$B_{n_2}(p_2, q_2) = z_1; \quad A_{n_2}(p_2, q_2) = z_2;$$
$$B_{n_2}(p_1, q_1) = z_3; \quad A_{n_2}(p_1, q_1) = z_4;$$
$$r \supset \ldots \supset B_{n_1}(p_1, q_1) \supset B_{n_1}(p_2, q_2) = z_5;$$
$$B_{h_2}(p_2, q_2) = z_6; \quad A_{h_2}(p_2, q_2) = z_7;$$
$$B_{h_2}(p_1, q_1) = z_8; \quad A_{h_2}(p_1, q_1) = z_9;$$
$$r \supset \ldots \supset B_{h_1}(p_1, q_1) \supset B_{h_1}(p_2, q_2) = z_{10};$$
$$B_{m_1}(p, q) = z_{11}; \quad A_{m_1}(p, q) = z_{12};$$

$$B_{m_2}(p,q) = \mathcal{Z}_{13}; \quad A_{m_2}(p,q) = \mathcal{Z}_{14};$$
$$B_{m_3}(p,q) = \mathcal{Z}_{15}; \quad A_{m_3}(p,q) = \mathcal{Z}_{16}.$$

Пусть $s_1, \ldots, s_{67}$ есть попарно различные пропозициональные переменные. Образуем из них выражения $\alpha^1(s_1, \ldots, s_{67}), \ldots, \alpha^{66}(s_1, \ldots, s_{67})$. Теперь выражение U^* строится следующим образом:

$$\overset{*}{W}{}^{+}_{1,0} \overset{\circ}{=} \alpha^1;$$

$$\overset{*}{W}{}^{-}_{1,1} \overset{\circ}{=} \alpha^1 \supset \mathcal{Z}_1; \qquad \overset{*}{W}{}^{+}_{1,1} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{1,1} \supset \mathcal{Z}_1;$$

$$\overset{*}{W}{}^{-}_{1,2} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{+}_{1,1} \supset \alpha^2; \qquad \overset{*}{W}{}^{+}_{1,2} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{1,2} \supset \alpha^2;$$

$$\overset{*}{W}{}^{+}_{2,0} \overset{\circ}{=} \alpha^3;$$

$$\overset{*}{W}{}^{-}_{2,1} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{+}_{2,0} \supset \mathcal{Z}_2; \qquad \overset{*}{W}{}^{+}_{2,1} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{2,1} \supset \mathcal{Z}_2;$$

$$\overset{*}{W}{}^{-}_{2,2} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{+}_{2,1} \supset \alpha^4; \qquad \overset{*}{W}{}^{+}_{2,2} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{2,2} \supset \alpha^4;$$

. . . . . .

$$\overset{*}{W}{}^{+}_{16,0} \overset{\circ}{=} \alpha^{31};$$

$$\overset{*}{W}{}^{-}_{16,1} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{+}_{16,0} \supset \mathcal{Z}_{16}; \qquad \overset{*}{W}{}^{+}_{16,1} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{16,1} \supset \mathcal{Z}_{16};$$

$$\overset{*}{W}{}^{-}_{16,2} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{+}_{16,1} \supset \alpha^{32}; \qquad \overset{*}{W}{}^{+}_{16,2} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{16,2} \supset \alpha^{32};$$

$$\overset{*}{W}{}^{+}_{17,0} \overset{\circ}{=} \alpha^{33};$$

$$\overset{*}{W}{}^{-}_{17,1} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{+}_{17,0} \supset \mathcal{Z}_1; \qquad \overset{*}{W}{}^{+}_{17,1} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{17,1} \supset \mathcal{Z}_1;$$

$$\overset{*}{W}{}^{-}_{17,2} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{+}_{17,1} \supset \alpha^{34}; \qquad \overset{*}{W}{}^{+}_{17,2} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{17,2} \supset \alpha^{34};$$

. . . . . .

$$\overset{*}{W}{}^{+}_{32,0} \overset{\circ}{=} \alpha^{63};$$

$$\overset{*}{W}{}^{-}_{31,1} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{+}_{32,0} \supset \mathcal{Z}_{16}; \quad \overset{*}{W}{}^{+}_{32,1} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{32,1} \supset \mathcal{Z}_{16};$$

$$\overset{*}{W}{}^{-}_{32,2} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{+}_{32,1} \supset \alpha^{64}; \quad \overset{*}{W}{}^{+}_{32,2} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{32,2} \supset \alpha^{64};$$

$$\overset{*}{W}{}^{-}_{33} \overset{\circ}{=} (\overset{*}{W}{}^{+}_{1,2} \supset . \overset{*}{W}{}^{+}_{2,2} \supset . \ldots \supset . \overset{*}{W}{}^{+}_{32,2}) \supset \alpha^{65};$$

$$\overset{*}{W}{}^{+}_{33} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . (\mathcal{Z}_{16} \supset \alpha^{66}) \supset \alpha^{65};$$

$$U^{*} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{+}_{33}.$$

Докажем следующие утверждения.

ЛЕММА 5.4. В исчислении $\Sigma_{и}$ невыводимо выражение $\tilde{X}^{i}_{16} \supset X^{i}_{16}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения кода длины произвольного слова в алфавите σ и выражения $\tilde{X}^{i}_{16}$ следует, что $\tilde{X}^{i}_{16}$ есть тавтология, а X^{i}_{16} – пропозициональная переменная.

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.5. Выражение $U^{*} \notin \Sigma_{и}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО от противного. Допустим, что $U^{*} \in \Sigma_{и}$. Следовательно, в исчислении $\Sigma_{и}$ существует неуменьшаемое синтаксическое дерево $D_{U^{*}}$. По лемме 5.3, его корень N есть B-узел с используемым выражением $\overset{*}{W}{}^{-}_{33}$ и изменяемым α^{65}. Поэтому ниже узла N лежат 32 узла $N_1, \ldots, N_{32}$, которым приписаны соответственно выражения $V_1, \ldots, V_{32}$ вида

$$V_1 \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . (\mathcal{Z}_{16} \supset \alpha^{66}) \supset \overset{*}{W}{}^{+}_{1,2} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . (\mathcal{Z}_{16} \supset \alpha^{66}) \supset . \overset{*}{W}{}^{-}_{1,2} \supset \alpha^{2};$$

$$V_{32} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . (\mathcal{Z}_{16} \supset \alpha^{66}) \supset \overset{*}{W}{}^{+}_{32,2} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . (\mathcal{Z}_{16} \supset \alpha^{66}) \supset . \overset{*}{W}{}^{-}_{32,2} \supset \alpha^{64}.$$

Рассмотрим поддерево D_{V_1} с корнем в узле N_1. Узел N_1 может быть лишь B-узлом, что вновь следует из леммы 5.3 и неуменьшаемости дерева $D_{U^{*}}$. В этом случае ниже N_1 расположен единственный узел N^{1}_{1}, которому приписано выражение V^{1}_{1} вида $\overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . (\mathcal{Z}_{16} \supset \alpha^{66}) \supset . \supset . \overset{*}{W}{}^{-}_{1,2} \supset \overset{*}{W}{}^{+}_{1,1} \overset{\circ}{=} \overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . (\mathcal{Z}_{16} \supset \alpha^{66}) \supset . \overset{*}{W}{}^{-}_{1,2} \supset . \overset{*}{W}{}^{-}_{1,1} \supset \mathcal{Z}_{1}$. Воз-

можно, что в этом выражении отсутствуют некоторые посылки из числа приведенных.

Так как выражение $\mathcal{Z}_1 \overline{\supset} B_{n_2}(p_2, q_2)$ и переменные $p_2, q_2 \notin \{s_{-1}, \ldots, s_2\}$, то узел N_1^1 есть B-узел с используемым выражением W_{-1}^{*} и изменяемым $\mathcal{Z}_1$. В результате ниже узла N_1^1 лежит узел $N_1^{2,1}$, которому приписано выражение V_1^2 вида $W_{33}^{*-} \supset . (\mathcal{Z}_{16} \supset \supset \alpha^{66}) \supset . W_{1,2}^{*-} \supset . W_{1,1}^{*-} \supset \alpha^1$. Но $V_1^2 \notin \Sigma_и$, так как в исчислении $\Sigma_и$ невыводимо выражение $\alpha^{65} \supset . \alpha^{66} \supset \alpha^2 \supset . \mathcal{Z}_1 \supset \alpha^1$. Противоречие.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. 2. Выражение $\tilde{\mathfrak{A}}_{m+1} \notin \Sigma_и$.

ЛЕММА 5. 6. Для любого $j = 1, 2, \ldots, m$ выражение $\tilde{\mathfrak{A}}_j \notin \Sigma_и$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО от противного. Допустим, что для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $\tilde{\mathfrak{A}}_i \in \Sigma_и$. В этом случае в исчислении $\Sigma_и$ существует неуменьшаемое синтаксическое дерево $D_{\tilde{\mathfrak{A}}_i}$. Из леммы 5. 3 следует, что корень $N \in D_{\tilde{\mathfrak{A}}_i}$ есть B-узел, в котором используемым выражением служит либо W_d^i, либо $W_{33}^{-(i)}$.

Во втором случае мы получаем, что непосредственно ниже N расположены 32 узла $N_1, \ldots, N_{32}$, причем узлу N_1 приписано выражение V_1 вида $W_d^i \supset . W_{33}^{-(i)} \supset . (X_{16}^i \supset \alpha^{66}) \supset W_{1,2}^{+(i)} \overline{\supset} W_d^i \supset . W_{33}^{-(i)} \supset . (X_{16}^i \supset \supset \alpha^{66}) \supset . W_{1,2}^{-(i)} \supset \alpha^2$. Если выражение $V_1 \in \Sigma_и$, то и выражение $V_1^0 \overline{\supset} \alpha^{65} \supset . (X_{16}^i \supset \alpha^{66}) \supset \alpha^1 \supset X_1^i \supset X_1^i \supset \alpha^2 \supset \alpha^2$ выводимо в исчислении $\Sigma_и$. Воспользовавшись тем, что переменная X_{16}^i имеет в выражении V_1^0 лишь одно вхождение, заменим ее на выражение α^{66}. В результате получим, что выражение $V_1^1 \overline{\supset} \alpha^{65} \supset \alpha^1 \supset X_1^i \supset X_1^i \supset \alpha^2 \supset \alpha^2$ выводимо в исчислении $\Sigma_и$. Но тогда в исчислении $\Sigma_и$ выводимо и выражение $V_1^2 \overline{\supset} X_{67} \supset (\alpha^1 \supset X_1^i \supset X_1^i \supset \alpha^2) \supset \alpha^2$ и для него в $\Sigma_и$ существует синтаксическое дерево $D_{V_1^2}$. По лемме 5. 3, корень $N^1 \in D_{V_1^2}$ есть B-узел, непосредственно ниже которого расположен узел N^2 с приписанным ему выражением $V_2^1 \overline{\supset} X_{67} \supset . (\alpha^1 \supset X_1^i \supset X_1^i \supset \alpha^2) \supset . \supset . (\alpha^1 \supset X_1^i) \supset X_1^i$. Но из выводимости в исчислении $\Sigma_и$ выражения V_2^1 следует, что и выражение $V_2^2 \in \Sigma_и$, где $V_2^2 \overline{\supset} \alpha^2 \supset \alpha^1$. Противоречие. Остается единственный случай, когда корень $N \in D_{\tilde{\mathfrak{A}}_i}$ есть B-узел с используемым выражением W_d^i. В результате мы имеем, что непосредственно ниже узла N расположен узел N_1 с приписанным ему выражением $V_1 \overline{\supset} W_d^i \supset . W_{33}^{-(i)} \supset . (X_{16}^i \supset \alpha^{66}) \supset . \tilde{X}_{16}^{i\,1} \supset \alpha^{66}$. Если $V_1 \in \Sigma_и$, то в

исчислении $\Sigma_и$ выводимо выражение $\tilde{V}_1 \overset{\circ}{=} \alpha^{65} \supset. (X^i_{16} \supset \alpha^{66}) \supset. \tilde{X}^i_{16} \supset \alpha^{66}$ и имеется синтаксическое дерево $D_{\tilde{V}_1}$.

Пусть корень $\tilde{N} \in D_{\tilde{V}_1}$ есть B-узел с используемым выражением $X^i_{16} \supset \alpha^{66}$. Тогда непосредственно ниже узла $\tilde{N}$ лежит узел $\tilde{N}_1$ с приписанным ему выражением $\alpha^{65} \supset. (X^i_{16} \supset \alpha^{66}) \supset. \tilde{X}^i_{16} \supset X^i_{16}$. А так как переменные в выражениях α^{65} & α^{66} и X^i_{16} не пересекаются, и $X^i_{16} \in \tilde{X}^i_{16}$, то отсюда выражение $(\tilde{X}^i_{16} \supset X^i_{16}) \in \Sigma_и$. Противоречие с леммой 5. 4. Поэтому корень $\tilde{N} \in D_{\tilde{V}_1}$ есть узел разбора посылок с используемым выражением α^{65}, и непосредственно ниже него лежат два узла $\tilde{N}_1$ и $\tilde{N}_2$, которым приписаны выражения соответственно $X_{67} \supset. \supset. (X^i_{16} \supset \alpha^{66}) \supset \tilde{X}^i_{16} \supset \alpha^{66}$ и $(X_{67} \supset \alpha^{65}_{66}) \supset. (X^i_{16} \supset \alpha^{66}) \supset. \tilde{X}^i_{16} \supset \alpha^{66}$. Вновь, как и для узла $\tilde{N}$, можно показать, что $\tilde{N}_1$ не может быть ничем иным, кроме узла разбора посылок с используемым выражением $X^i_{16} \supset \supset \alpha^{66}$. Но в этом случае в дереве $D_{\tilde{V}_1}$ непосредственно ниже узла $\tilde{N}_2$ расположен узел $\tilde{N}_4$, которому приписано выражение $X_{67} \supset. X^i_{16}\ \alpha^{66} \supset. \supset. \tilde{X}^i_{16} \supset X^i_{16}$, не принадлежащее исчислению $\Sigma_и$. Противоречие.

Лемма доказана.

Каждой дополнительной аксиоме $\tilde{\mathfrak{A}}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, исчисления $\tilde{\Sigma}$ мы поставим в соответствие вывод в исчислении $\Sigma_{кл}$ такого вида, как на рис. 5. 1, где T_i – канонический вывод такой, что $D_V \Longrightarrow T_i$, и синтаксическое дерево D_V выражения $V \overset{\circ}{=} W^{-(i)}_{33} \supset \alpha^{65}(\vec{X})$ изображено на рис. 5. 2, а. Здесь ниже каждого узла N_j, $j = 1, 2, \ldots, 32$, расположено поддерево, как на рис. 5. 2. б.

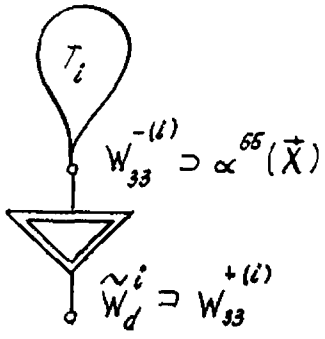


Рис. 5. 1

Вывод выражения $\tilde{\mathfrak{A}}_{m+1}$ отличается от приведенного на рис. 5. 1 лишь отсутствием одного нижнего унарного узла.

Рассмотрим выражение $W^{+(i)}_{33}$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$. Из его структуры следует, что в нем имеется по одному вхождению подформул $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{63}$, которые мы пометим $(\alpha^1)', (\alpha^2)', \ldots, (\alpha^{63})'$, по два вхождения каждого выражения α^j, $j = 2, 4, \ldots, 64, 65$, которые пометим слева направо $(\alpha^j)', (\alpha^j)''$; в точности одно вхождение $(\alpha^{66})'$ выражения α^{66} и в точности четыре вхожде-

ния каждой переменной X_k^i, которые пометим слева направо $(X_k^i)'$, $(X_k^i)''$, $(X_k^i)'''$, $(X_k^i)^{(4)}$, $k = 1, 2, \ldots, 16$.

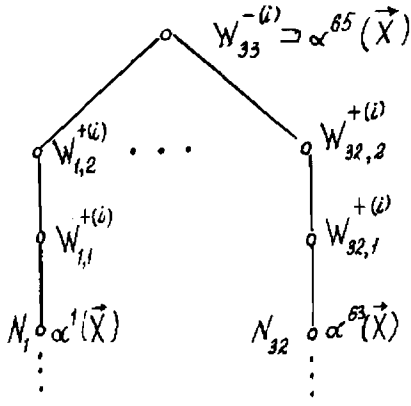


Рис. 5. 2 а)

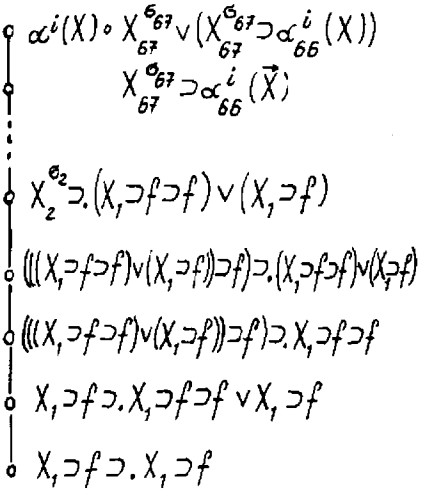


Рис. 5. 2 б)

Из вида соответствующего вывода T_i каждой аксиомы $\tilde{\alpha}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, нетрудно установить, что пары вхождений $\{(\alpha^j)', (\alpha^j)''\}$ $j = 2, 4, \ldots, 64, 65$, $((X_k^i)', (X_k^i)'')$, $((X_k^i)''', (X_k^i)^{(4)})$, $k = 1, 2, \ldots, 16$, есть следы двойственных пар, определяемых выводом T_i.

Обозначим через $\mathfrak{N}_U$ класс всех канонических выводов выражения U в исчислении Σ_{KA}, которые получаются из выводов выражения U в исчислении $\Sigma^{67}_{1,3,\ldots,63}$ добавлением соответствующих выводов всех вхождений дополнительных аксиом исчисления. Сейчас мы проанализируем вид выводов из множества $\mathfrak{N}_U$.

Рассмотрим исчисление Σ_0, которое получается из $\Sigma_И$ добавлением схемы $\bar{X} \vee \bar{\bar{X}}$. Для него справедлива

ЛЕММА 5. 7. Пусть выражение $U \in \Sigma_0$ и $U \notin \Sigma_И$. Тогда в исчислении $\Sigma_И$ выводимо выражение вида $W_1 \supset \ldots \supset W_m \supset f$, где W_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, есть некоторые подформулы из $\mathfrak{M}^-(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выражение $U \in \Sigma_0$. Тогда в исчислении $\Sigma_И$ выводимо выражение $V \equiv (\mathop{\&}_{i=1}^{n} V_i) \supset U$, $n \geq 0$, где каждое выражение V_i, $i = 1, 2, \ldots, n$,

есть дополнительная аксиома исчисления Σ_0. Рассмотрим произвольное

синтаксическое дерево D_V в $\Sigma_и$. При этом будем считать, что каждое выражение $V_i \overset{\circ}{=} (X_i \supset f) \vee (X_i \supset f \supset f)$ существенное в D_V, т. е. в D_V существуют по меньшей мере два B-узла с используемыми выражениями $X_i \supset f$ и $X_i \supset f \supset f$. Кроме того, можно считать, что в дереве D_V все узлы разбора посылок V_i расположены выше других узлов, $i = 1, 2, \ldots, n$. Исходя из этого, можно считать, что в D_V обязательно встречаются выражения вида:

$$\Gamma_1 \supset . (X_1 \supset f) \supset . \ \ldots \ \supset . (X_n \supset f) \supset f \ ;$$

$$\Gamma_2 \supset . (X_1 \supset f) \supset . \ \ldots \ \supset . (X_n \supset f \supset f) \supset f ;$$

$$\Gamma_3 \supset . (X_1 \supset f) \supset . \ \ldots \ \supset . (X_{n-1} \supset f \supset f) \supset . (X_n \supset f \supset f) \supset f ;$$

где $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ – множества посылок, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}(U)$. Отсюда следует, что $(\Gamma \supset f) \in \Sigma_и$, где $\Gamma = \cup \Gamma_i$.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. 3. Выражение $A_n(p, q)$, где p, q – переменные, невыводимо в исчислении Σ_0 для любого значения $n \geqslant 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что ни в одном выражении $A_n(p, q)$ не встречается константа f в качестве подформулы и $A_n(p, q) \notin \Sigma_и$.

СЛЕДСТВИЕ 5. 4. Выражение $B_n(p, q)$, где p, q – переменные, невыводимо в исчислении Σ_0 для любого значения $n \geqslant 0$.

СЛЕДСТВИЕ 5. 5. Пусть A и C есть слова в алфавите G и $V_1 = cod(A, \tau, p_1, q_1, p_2, q_2)$ и $V_2 = cod(C, \tau, p_1, q_1, p_2, q_2)$. В этом случае выражение $(V_1 \equiv V_2) \in \Sigma_0$ тогда и только тогда, когда $A \overset{\circ}{=} C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение $(V_1 \equiv V_2) \in \Sigma_и$ тогда и только тогда, когда $A \overset{\circ}{=} C$, что следует из леммы 4. 9. Допустим, что $A \neq C$. В этом случае выражение $(V_1 \equiv V_2) \notin \Sigma_и$, но допустим, что оно принадлежит исчислению Σ_0. В выражении $(V_1 \equiv V_2)$ нет подформул вида f. Поэтому получаем противоречие с леммой 5. 7.

Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5. 6. Пусть A и C – слова в алфа-

вите σ и $B_{n_1} = cod(|A|, p, q)$, $B_{n_2} = cod(|C|, p, q)$. В этом случае выражение $(B_{n_1} \equiv B_{n_2}) \in \Sigma_0$ тогда и только тогда, когда $|A| = |C|$.

Выражения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются a-эквивалентными, обозначим $\mathfrak{A} \overset{a}{\sim} \mathfrak{B}$, если $\Sigma(\mathfrak{A}) = \Sigma(\mathfrak{B})$.

Легко показать, например, что $X \vee (X \supset Y) \overset{a}{\sim} X \supset Y \supset X \supset X$.

Пусть исчисление Σ задается дополнительной схемой $\mathfrak{A}$ вида $X \supset Y \supset X \supset X$, где $d(X) = 0$, $X \not\equiv f$ и $d(Y) \geqslant 0$. Назовем каноническим выводом в исчислении Σ такой вывод, что вид его полных ветвей совпадает с видом ветвей в каноническом выводе исчисления $\Sigma_{K\Lambda}$, кроме случая, изображенного на рис. 1. 2, б. Тогда ветвь канонического вывода в исчислении Σ получается из изображенной на этом рисунке заменой везде константы f на выражение $S^{X_1 \ldots X_n}_{V_1 \ldots V_n} Y$, где переменные $X_i \in Y$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $X \supset S^{X_1 \ldots X_n}_{V_1 \ldots V_n} Y \supset X \supset X$ – аксиома Σ.

Аналогично тому, как построена система S_3 схем преобразований выводов в исчислении $\Sigma_{K\Lambda}$, можно определить систему S_3^* схем преобразований выводов в исчислении Σ. Она несущественно отличается от системы S_3 в тех схемах, которые содержат аксиомы $\mathfrak{A}_3$.

Как и для исчисления $\Sigma_{K\Lambda}$ доказывается такая

ЛЕММА 5. 8. Каждый вывод в исчислении Σ конечным числом преобразований по схемам системы S_3^* можно привести к единственному каноническому виду.

Затем уже совсем просто определить понятие синтаксического дерева в исчислении Σ. Отличие этого определения от определения синтаксического дерева в исчислении $\Sigma_{K\Lambda}$ состоит в том, что п. 3, б формулируется так:

3, б. Если не висячему узлу $N \in D_U$ приписано выражение $W_1' \supset . \ldots \supset . W_n' \supset X'$, $n \geqslant 0$, главная связка выражения X не импликация и $X \not\equiv f$, то непосредственно ниже N лежит единственный узел N_1, которому приписано выражение $W_1'' \supset . \ldots \supset . W_{s_k}'' \supset . (X'' \supset Y) \supset X'''$, где $\{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ и $X \supset Y \supset X \supset X$ есть дополнительная аксиома исчисления Σ. В этом случае N называется 3-узлом, X – выражением закапывания и $W_{s_i}'' \to W_{s_i}'$, $X'' \to X'$, $X''' \to X'$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Очевидно, что по всякому каноническому выводу T выражения U (синтаксическому дереву D_U) в исчислении Σ однозначно восстанавлива-

ется синтаксическое дерево D_{τ_r} (вывод T выражения U) в этом исчислении. Как и прежде, этот факт мы будем обозначать: $T \Rightarrow D_U$ ($D_U \Rightarrow T$).

Из соответствия между выводами и синтаксическими деревьями в исчислении Σ следует, что если D_U есть синтаксическое дерево в исчислении Σ, то всякое выражение из D_U выводимо в Σ.

Поставим в соответствие дополнительной аксиоме исчисления Σ вывод T в исчислении Σ_{KA} такой, что синтаксическое дерево $D_{\tilde{a}}$, построенное по T, выглядит, как на рис. 5. 3.

$$X \supset Y \supset X \supset X$$
$$X \supset Y \supset X \supset . X \supset f \supset X$$
$$X \supset Y \supset X \supset . X \supset f \supset . X \supset Y$$
$$X \supset f \supset . X \supset f$$

Рис. 5. 3

Из вида этого вывода легко следует

ЛЕММА 5. 9. Пусть T есть вывод выражения U в исчислении Σ, T_1 – вывод выражения U, полученный из T навешиванием перед каждой дополнительной аксиомой ее соответствующего вывода, $T \Rightarrow D_U$, $T_1 \Rightarrow D^1_U$. В этом случае деревья D_U и D^1_U определяют одно и то же множество следов двойственных пар.

ЛЕММА 5. 10. Пусть выражение $U \overline{\circ} \alpha^i(p_1, \ldots, p_{n+1}) \supset \alpha^i(p_1, \ldots, p_{n+1})$, где $\alpha^i(p_1, \ldots, p_{n+1}) \overline{\circ} p^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \vee (p^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \alpha^i_n)$ исчисление Σ^{n+1}_j задается дополнительной схемой $X_{n+1} \supset \alpha^j_n(X_1, \ldots, X_n) \supset X_{n+1} \supset X_{n+1}$ и $i \neq j$. В этом случае любое неуменьшаемое синтаксическое дерево в исчислении Σ^{n+1}_j есть синтаксическое дерево в исчислении Σ_n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $U \in \Sigma^{n+1}_j$. Поэтому в исчислении Σ^{n+1}_j существует неуменьшаемое синтаксическое дерево D_U, причем без потери общности можно считать, что корень $N \in D_U$ есть узел разбора посылок с используемым выражением α^i. Следовательно, непосредственно ниже узла N лежат два узла N_1 и N_2 с приписанными им выражениями соответственно $V_1 \overline{\circ} p^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset (p^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \vee$

$V(P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \alpha^i_n))$ и $V_2 \overline{\circ} (P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \alpha^i_n) \supset . P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \vee (P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \alpha^i_n)$.

Для узла N_1 имеются следующие возможности:

1. N_1 есть узел усиления заключения, порождающий выражение $P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset P^{\sigma_{n+1}}_{n+1}$.

2. N_1 есть узел усиления заключения, порождающий выражение $V \overline{\circ} P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \alpha^i_n$. Но $V \notin \Sigma^{n+1}_j$. Противоречие.

3. N_1 есть 3-узел, порождающий выражение $V^1_1 \overline{\circ} P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset . (\alpha^i \supset \supset \alpha^i_n (X_1, \ldots, X_n)) \supset \alpha^i$, приписанное узлу N^1_1 непосредственно ниже узла N_1.

Разберем все возможности для N^1_1. В силу неуменьшаемости синтаксического дерева D этот узел не может быть 3-узлом разбора посылок, M-узлом и узлом усиления заключения, который порождает выражение $P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset . (\alpha^i \supset \tilde{\alpha}^j_n) \supset P^{\sigma_{n+1}}_{n+1}$. Остается единственный случай, когда N^1_1 есть узел усиления заключения, порождающий выражение $V^2_1 \overline{\circ} (\alpha^i \supset \supset \tilde{\alpha}^j_n) \supset . P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \alpha^i_n$. Но $\alpha^i_n \notin \Sigma^n_j$. Следовательно, $V^2_1 \notin \Sigma^{n+1}_j$. Противоречие. Таким образом, для узла N_1 остается лишь первая возможность.

Возможности для узла N_2 разбираются аналогично. Не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что узел N_2 есть 3-узел, непосредственно ниже которого лежит узел N_3 с приписанным ему выражением $V_3 \overline{\circ} (P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \alpha^i_n) \supset . (\alpha^i \supset \tilde{\alpha}^j_n) \supset \alpha^i$. Исходя из неуменьшаемости дерева D_V, для N_3 остается лишь одна возможность – быть узлом усиления заключения, непосредственно ниже которого лежит узел N_4 с приписанным ему выражением $V_4 \overline{\circ} (P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \alpha^i_n) \supset . (\alpha^i \supset \tilde{\alpha}^j_n) \supset . P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \supset \alpha^i_n$. Вновь можно считать, что N_4 есть 3-узел, непосредственно ниже которого лежит узел N_5 с приписанным выражением $V_5 \overline{\circ} (P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \alpha^i_n) \supset . \supset . (\alpha^i \supset \tilde{\alpha}^j_n) \supset . (\alpha^i_n \supset \tilde{\tilde{\alpha}}^j_n) \supset . P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \alpha^i_n$. Если N_5 есть узел разбора посылок с используемым выражением $\alpha^i \supset \tilde{\alpha}^j_n$, то такая возможность приводит к тому, что первая посылка $P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \alpha^i_n$ выражения V_5 не может использоваться нигде в поддереве $D_{V_5} \subseteq D_V$, и, следовательно, выражение $\alpha^i \in \Sigma^{n+1}_j$. Противоречие.

Остается единственная возможность, когда N_5 есть узел разбора посылок с используемым выражением $P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset \alpha^i_n$ и он порождает два узла N_6 и N_7 и выражения соответственно $V_6 \overline{\circ} (\alpha^i \supset \alpha^j_n) \supset . (\alpha^i_n \supset \tilde{\alpha}^j_n) \supset . \supset . P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset P^{\sigma_{n+1}}_{n+1}$ и $V_7 \overline{\circ} (\alpha^i \supset \tilde{\alpha}^j_n) \supset . (\alpha^i_n \supset \tilde{\tilde{\alpha}}^j_n) \supset . P^{\sigma_{n+1}}_{n+1} \supset . \alpha^i_n \supset \alpha^i_n$. В силу неуменьшаемости дерева D_V, узел N_6 висячий. Разберем теперь

возможности построения поддерева $D_{V_7} \subseteq D_U$.

Узел N_7 не может быть узлом усиления заключения с используемым выражением $\alpha^i \supset \tilde{\alpha}^j_n$ или $\alpha^i_n \supset \tilde{\tilde{\alpha}}^j_n$, так как первый случай приводит к противоречию $\alpha^i \in \Sigma^{n+1}_j$, а второй – к противоречию с условием неуменьшаемости дерева D_U. Следовательно, остается единственный случай, когда N_7 есть узел разбора посылок с используемым выражением α^i_n. Далее применимы все рассуждения, которые были приведены в начале доказательства для выражения $\alpha^i \supset \alpha^i$.

Лемма доказана.

Совершенно аналогично доказывается

ЛЕММА 5. 11. Пусть выражение U имеет вид $cod(A)$ или $cod(|A|)$ для некоторого слова A в алфавите σ. Тогда любое неуменьшаемое синтаксическое дерево $D_{(U \supset U)}$ в исчислении Σ^{n+1}_j есть синтаксическое дерево в исчислении Σ_n.

СЛЕДСТВИЕ 5. 7. Пусть выражение U имеет вид $(W \supset \alpha^i(p_1, \ldots, p_{n+1})) \supset \alpha^i(p_1, \ldots, p_{n+1})$, $i \leq n$. Тогда любое неуменьшаемое синтаксическое дерево D_U в исчислении Σ^{n+1}_j, задаваемом схемой $X_{n+1} \supset \alpha^i_n(X_1, \ldots, X_n) \supset X_{n+1} \supset X_{n+1}$, $i \neq j \leq n$, имеет своим корнем либо B-узел, либо З-узел непосредственно ниже которого расположен B-узел с используемым выражением $(W \supset \alpha^i)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. 8. Пусть выражение U имеет вид $cod(A)$ или $cod(|A|)$ для некоторого слова A в алфавите σ. Тогда любое неуменьшаемое синтаксическое дерево $D_{((W \supset U) \supset U)}$ в исчислении Σ^{n+1}_j, задаваемом схемой $X_{n+1} \supset \alpha^j_n(X_1, \ldots, X_n) \supset X_{n+1} \supset X_{n+1}$, имеет своим корнем либо B-узел, либо $З$-узел, непосредственно ниже которого расположен B-узел с используемым выражением $W \supset U$.

ЛЕММА 5. 12. Пусть вывод $T \in \mathcal{H}_{U^*}$ и D_{U^*} есть синтаксическое дерево в исчислении Σ_{KA} такое, что $T \Rightarrow D_{U^*}$. В этом случае если не учитывать $З$-узлов, распо-

ложенных выше узлов $N_1, \ldots, N_{32}$, то дерево D_{U^*} можно представить, как на рис. 5.4.

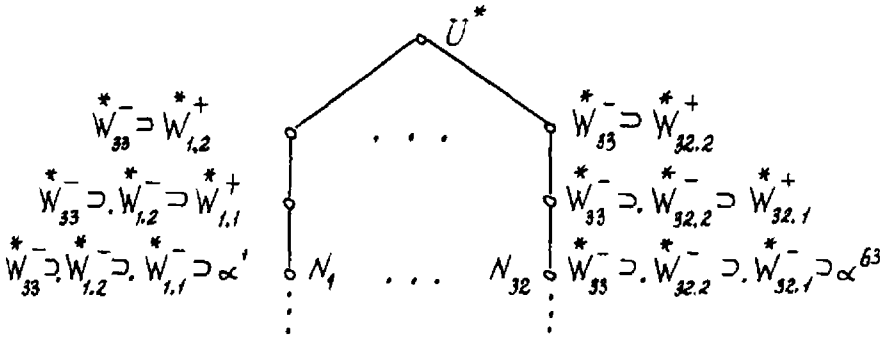


Рис. 5.4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. леммы следует из вида соответствующего вывода дополнительной аксиомы $X_{67} \supset \alpha^i_{66}(X_1, \ldots, X_{66}) \supset X_{67} \supset X_{67}$, $i = 1, 3, \ldots, 63$, и из предыдущих лемм.

ЛЕММА 5.13. Пусть выражение $U \overset{=}{=} \alpha^j_n(p_1, \ldots, p_n) \supset \supset \alpha^j_n(p_1, \ldots, p_n)$, $j \leq n$ и исчисление Σ^{n+1}_j задается дополнительной схемой $X \supset \alpha^j_n(X_1, \ldots, X_n) \supset X \supset X$. В этом случае любое неуменьшаемое синтаксическое дерево D_U в Σ^{n+1}_j есть синтаксическое дерево в исчислении $\Sigma_и$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 5.10.

ЛЕММА 5.14. Пусть выражение $U \overset{=}{=} \alpha^j(\vec{p}) \supset \supset \alpha^j(\vec{p})$, $j \leq n$. В этом случае в любом неуменьшаемом синтаксическом дереве D_U в исчислении Σ^{n+1}_j, которое задается дополнительной схемой $X \supset \alpha^j_n(X_1, \ldots, X_n) \supset X \supset X$, либо посылка $\alpha^j(p_1, \ldots, p_{n+1})$ выражения U не является последователем никакого используемого выражения в D_U, либо D_U есть синтаксическое дерево в исчислении $\Sigma_и$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное неуменьшаемое синтаксическое дерево D_U в исчислении Σ^{n+1}_j. Не уменьшая общности рас-

суждений, можно считать, что если в D_U появляется новое заключение V выражения, приписанного какому-то узлу $N \in D_U$, причем главная связка выражения V не импликация и $V \neq f$, то N есть 3-узел с выражением заключения V. Рассмотрим все возможности, которые существуют для синтаксического дерева D_U.

1. В дереве D_U имеется $h > 1$ узлов и нет узла с используемым выражением α^j. Грубо говоря, этому дереву соответствует вывод выражения $\alpha^j(p_1, \ldots, p_{n+1})$ в исчислении $\sum_j^{n+1}$.

Отбрасывая в выражениях, приписанных узлам дерева D_U, всех предшественников первой посылки выражения U, мы получим синтаксическое дерево $D_{\alpha^j}(p_1, \ldots, p_{n+1})$ в исчислении $\sum_j^{n+1}$. Как мы условились, корень $N \in D_U$ есть 3-узел, ниже которого расположен узел N_1 с приписанным ему выражением $V_1 \overset{\circ}{=} (\alpha^i \supset \tilde{\alpha}_n^j) \supset \alpha^i$. Узел N_1 не может быть ничем, кроме узла усиления заключения, ниже которого расположен узел N_2 с выражением $V_2 \overset{\circ}{=} (\alpha^j \supset \tilde{\alpha}_n^j) \supset . p_{n+1} \supset \alpha_n^j$. По договоренности, N_2 есть 3-узел, непосредственно ниже которого расположен узел N_3 с выражением $V_3 \overset{\circ}{=} (\alpha^j \supset \tilde{\alpha}_n^j) \supset . (\alpha_n^j \supset \tilde{\tilde{\alpha}}_n^j) \supset . p_{n+1} \supset \alpha_n^j$. Этот узел не может быть узлом усиления заключения, так как тогда мы получаем невыводимое в исчислении $\sum_j^{n+1}$ выражение. Следовательно, N_3 есть узел разбора посылок с используемым выражением $(\alpha^j \supset \tilde{\alpha}_n^j)$, непосредственно ниже которого лежат два узла N_4 и N_5 с приписанными им выражениями соответственно $V_4 \overset{\circ}{=} (\alpha^j \supset \tilde{\alpha}_n^j) \supset . (\alpha_n^j \supset . \tilde{\tilde{\alpha}}_n^j) \supset . p_{n+1} \supset \alpha^j(\vec{\beta})$ и $V_5 \overset{\circ}{=} (\alpha^j \supset \tilde{\alpha}_n^j) \supset . (\alpha_n^j \supset \tilde{\tilde{\alpha}}_n^j) \supset . \tilde{\alpha}_n^j \supset . p_{n+1} \supset \alpha_n^j$. Из неуменьшаемости дерева D_U следует, что N_4 есть узел усиления заключения, порождающий выражение $p_{n+1} \supset p_{n+1}$. Из леммы 5.13 следует, что поддерево $D_{V_5} \subseteq D_U$ не может определять двойственные пары вида (p_i', p_i''), $i = 1, 2, \ldots, n$, так что пара (p_i', p_i'') имеет своим следом пару $(p_i''', p_i^{(4)})$ из заключения α^j выражения U.

2. В дереве D_U имеется узел N_1 разбора посылок с используемым выражением α^j. Не уменьшая общности, можно считать, что в этом случае дерево D_U имеет такую структуру: корень $N \in D_U$ есть 3-узел, а непосредственно ниже него расположен узел разбора посылок с используемым выражением α^j. Отсюда следует, что непосредственно ниже узла N_1 расположены два узла N_2 и N_3 с приписанными им выражениями соответственно $V_2 \overset{\circ}{=} p_{n+1} \supset . (\alpha^j \supset \tilde{\alpha}_n^j) \supset \alpha^j$ и $V_3 \overset{\circ}{=} (p_{n+1} \supset \alpha_n^j) \supset . (\alpha^j \supset \tilde{\alpha}_n^j) \supset \alpha^j$, причем $\alpha^j \supset \tilde{\alpha}_n^j \supset \alpha^j \supset \alpha^j$ есть аксиома исчисления $\sum_j^{n+1}$. Из неуменьшаемости дерева D_U следует, что N_2 есть узел усиления заключе-

ния, непосредственно ниже которого расположен узел N_4 с приписанным ему выражением $V_4 \overline{\circ} P_{n+1} \supset .(\alpha^j \supset \tilde{\alpha}^j_n) \supset P_{n+1}$ или после отбрасывания несущественных посылок с $V_4 \overline{\circ} P_{n+1} \supset P_{n+1}$. Узел N_3 может быть лишь узлом усиления заключения, непосредственно ниже которого лежит узел N_5 с приписанным ему выражением $V_5 \overline{\circ} (P_{n+1} \supset \alpha^j_n) \supset .(\alpha^j \supset \tilde{\alpha}^j_n) \supset . P_{n+1} \supset \alpha^j_n$. По договоренности N_5 есть 3-узел, непосредственно ниже которого лежит узел N_6 с приписанным ему выражением $(P_{n+1} \supset \alpha^j_n) \supset .(\alpha^j \supset \tilde{\alpha}^j_n) \supset$ $\supset P_{n+1} \supset .(\alpha^j_n \supset \tilde{\alpha}^j_n) \supset \alpha^j_n$, причем $\alpha^j_n \supset \tilde{\alpha}^j_n \supset \alpha^j_n \supset \alpha^j_n$ есть аксиома исчисления $\sum^{n+1}_j$.

Исходя из неуменьшаемости дерева D_U, для узла N_6 имеем лишь две возможности: либо это узел разбора посылок с используемым выражением $(P_{n+1} \supset \alpha^j_n)$, либо узел разбора посылок с используемым выражением $(\alpha^j \supset \tilde{\alpha}^j_n)$. Но вторая возможность приводит нас к выражению $\Delta \supset . P_{n+1} \supset$ $\supset \alpha^j(\vec{p})$, что противоречит неуменьшаемости дерева D_U (см. п. 1 настоящего доказательства). Следовательно, остается лишь первая возможность, поэтому ниже узла N_6 расположены два узла N_7 и N_8 с приписанными им выражениями соответственно $V_7 \overline{\circ} \Gamma \supset . P_{n+1} \supset P_{n+1}$ и $V_8 \overline{\circ} \Gamma \supset . P_{n+1} \supset . \alpha^j_n \supset \alpha^j_n$. Выражение V_7 после отбрасывания несущественных посылок, принимает вид $P_{n+1} \supset P_{n+1}$. Исходя из неуменьшаемости дерева D_U, мы получаем, что выражение V_8 после отбрасывания несущественных посылок, принимает вид $\alpha^j_n \supset \alpha^j_n$, к которому применима предыдущая лемма.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. 9. Пусть выражение $U \overline{\circ} \alpha^j(p_1, \ldots$ $\ldots, p_{n+1}) \supset \alpha^j(p_1, \ldots, p_{n+1})$, $\alpha^j(\vec{p}) \overline{\circ} p_{n+1} \vee (p_{n+1} \supset \alpha^j_n)$, $j \leq n$, $p'_i, p''_i, p'''_i, p^{(4)}_i$ есть все вхождения слева направо переменной p_i в U, $i = 1, 2, \ldots, n+1$; T – неприводимый вывод выражения U в исчислении $\sum^{n+1}_j$. В этом случае выводом T определяются либо единственный след двойственной пары $(p'''_{n+1}, p^{(4)}_{n+1})$, либо $2(n+1)$ двойственных пар (p'_i, p''_i), $(p'''_i, p^{(4)}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, и T является выводом в исчислении $\sum_и$; либо T не определяет ни одного следа двойственных пар.

§ 6. Основная теорема

ТЕОРЕМА 6. 1. Пусть $\ell \geq 2$ — целое число, $\{i_1,\dots,i_\ell\}$ — набор индексов, $i_j \in \{1,2,\dots,m\}$, $j = 1,2,\dots,\ell$ и слово $V \in \mathfrak{M}^{\sigma}_{\{i_1,\dots,i_\ell\}}$. В этом случае слово V выводимо в системе (П) продукций из слова V_0 с заключительной последовательностью $\Pi_{i_\ell},\dots,\Pi_{i_1}$ применений продукций в выводе тогда и только тогда, когда выражение $U^* \in \widetilde{\Sigma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону доказательство устанавливается простой проверкой. Докажем справедливость теоремы в обратном направлении.

Допустим, что $U^* \in \widetilde{\Sigma}$. Следовательно, в исчислении $\widetilde{\Sigma}$ существует канонический вывод T выражения U^*. И так как $U^* \in \Sigma_{\mu}$, то в выводе T присутствуют $k \geq 1$ вхождений дополнительных аксиом исчисления $\widetilde{\Sigma}$. Рассмотрим главную ветвь вывода T. Предположим, что она имеет вид, как на рис. 6. 1. Но, как нетрудно заметить, ни одно из выражений вида $\overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . (Z_{16} \supset \alpha^{66}(\vec{1})) \supset . \overset{*}{W}{}^{-}_{i,2} \supset \alpha^{2i}(\vec{1})$, $i = 1,2,\dots,32$, невыводимо в исчислении Σ^{67}_{65}. А так как $\widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma^{67}_{65}$, то $\dot{V}_i \notin \widetilde{\Sigma}$, $i = 1,2,\dots,32$. Следовательно, главная ветвь вывода T отлична от той, которая изображена на этом рисунке.

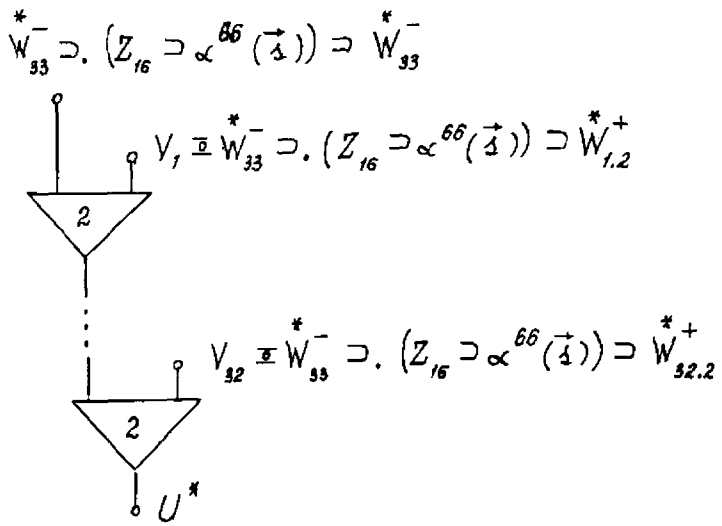


Рис. 6. 1

Пусть $\mathfrak{A}_{i_1},\ldots,\mathfrak{A}_{i_k}$ – множество всех дополнительных аксиом, которые входят в вывод T, и в исчислении $\widetilde{\Sigma}$ не существует вывода выражения U^* с меньшим числом вхождений дополнительных аксиом. По выводу T однозначно определяются канонический вывод $T_И$ выражения $V \overline{\supset} \overline{\supset}\left(\mathop{\&}\limits_{j=1}^{k} \mathfrak{A}_{i_j}\right) \supset U^*$ в исчислении $\Sigma_И$ и синтаксическое дерево D_V такое, что $T_И \Rightarrow D_V$.

Рассмотрим подробнее выражение V. Оно имеет вид: $\left(\mathop{\&}\limits_{j=1}^{k} \mathfrak{A}_{i_j}\right) \supset . \supset . \overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . \left(Z_{16} \supset \alpha^{66}(\vec{\mathfrak{s}})\right) \supset \left(\alpha^{65}(\vec{\mathfrak{s}})\right)$ и $\overset{*}{W}{}^{-}_{33} \overline{\supset} \overset{*}{\Delta}_1 \supset \left(\alpha^{65}(\vec{\mathfrak{s}})\right)''$. Покажем, что дерево D_V не определяет ни одной двойственной пары типа $(\mathfrak{s}'_t, \mathfrak{s}''_t)$, где $\mathfrak{s}'_t \in \left(\alpha^{65}(\vec{\mathfrak{s}})\right)'$ и $\mathfrak{s}''_t \in \left(\alpha^{65}(\vec{\mathfrak{s}})\right)''$, $t \in \{1, 2, \ldots, 67\}$.

Допустим, что это не так и имеется хотя бы одна такая пара. Отметим, что каждая дополнительная аксиома исчисления $\widetilde{\Sigma}$ принадлежит исчислению Σ^{67}_{65}, задаваемому аксиомой $X \supset \alpha^{65}_{66}(\vec{X}) \supset X \supset X$. Выведем каждую дополнительную аксиому из $\left(\mathop{\&}\limits_{j=1}^{k} \mathfrak{A}_{i_j}\right)$ в этом исчислении. Получим, что выражение $\overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . \left(Z_{16} \supset \alpha^{66}(\vec{\mathfrak{s}})\right) \supset \left(\alpha^{65}(\vec{\mathfrak{s}})\right)'$ выводимо в Σ^{67}_{65}, причем имеется по меньшей мере одна двойственная пара $(\mathfrak{s}'_t, \mathfrak{s}''_t)$, где $\mathfrak{s}'_t \in \left(\alpha^{65}(\vec{\mathfrak{s}})\right)$, $\mathfrak{s}''_t \in \left(\alpha^{65}(\vec{\mathfrak{s}})\right)$, $t \in \{1, 2, \ldots, 67\}$. Но это значит, что вывод $T_И$ не определяет ни одной двойственной пары вида $(\mathfrak{s}'_t, \mathfrak{s}''_t)$, где $\mathfrak{s}'_t \in \left(\alpha^{65}(\vec{\mathfrak{s}})\right)'$ и $\mathfrak{s}''_t \in \alpha^{65}(\vec{X})$, а $\alpha^{65}(\vec{X})$ есть заключение одной из аксиом из $\left(\mathop{\&}\limits_{j=1}^{k} \mathfrak{A}_{i_j}\right)$. Это следует из леммы 5. 14. Но тогда корень дерева D_V есть B-узел с используемым выражением $\overset{*}{W}{}^{-}_{33}$, а следовательно, главная ветвь вывода T имеет такой вид, как на рис. 6. 1. Противоречие. Таким образом, вывод $T_И$ не определяет ни одной такой двойственной пары.

Из этого следует, что корень $N \in D_V$ есть узел разбора посылок с используемым выражением $\mathfrak{A}_{i_j}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Поэтому можно считать, что непосредственно ниже N лежат два узла N_1 и N_2, которым приписаны выражения соответственно $W_1 \overline{\supset} \Gamma_1 \supset \alpha^{65}(\vec{Y}_1) \supset \left(\alpha^{63}(\vec{\mathfrak{s}})\right)'$ и $W_2 \overline{\supset} \Gamma_2 \supset . \overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . \left(Z_{16} \supset \alpha^{66}(\vec{\mathfrak{s}})\right) \supset . W^{+(i_j)}_{1,2} \supset . \ldots \supset . W^{+(i_j)}_{32,2} \supset \alpha^{65}(\vec{Y}_1)$.

Здесь вид посылок из множеств Γ_1 и Γ_2 легко восстанавливается по виду выражения U^* и дополнительных аксиом исчисления $\widetilde{\Sigma}$.

В выводе $T_И$ имеется подвывод $T'_И$ выражения W_1. Аналогично рассуждая, можно показать, что этот подвывод определяет двойственные

пары вида $(\mathfrak{s}'_t, \mathfrak{s}''_t)$, $t=1,2,\ldots,67$ такие, что $\mathfrak{s}'_t \in (\alpha^{65}(\mathfrak{s}))'$ лишь когда переменная $\mathfrak{s}''_t \in \alpha^{65}(\vec{Y}_1)$, т. е. выражение $(\alpha^{65}(\vec{Y}_1) \supset \alpha^{65}(\vec{\mathfrak{s}})) \in \Sigma_И$.

Что касается выражения W_2, то каждая его посылка $W^{+(i_j)}_{1,2}, \ldots, W^{+(i_j)}_{32,2}$ выводима в исчислении $\Sigma^{67}_{1,3,\ldots,63}$. Из леммы 5.1 следует, что вывод выражения W_2 можно превратить в вывод выражения $\overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset \alpha^{65}(\vec{Y}_1)$ без изменения подстановок в аксиому $\mathfrak{A}_{i_j}$. Так можно показать, что единственно возможный вид вывода T такой, как на рис. 6. 2.

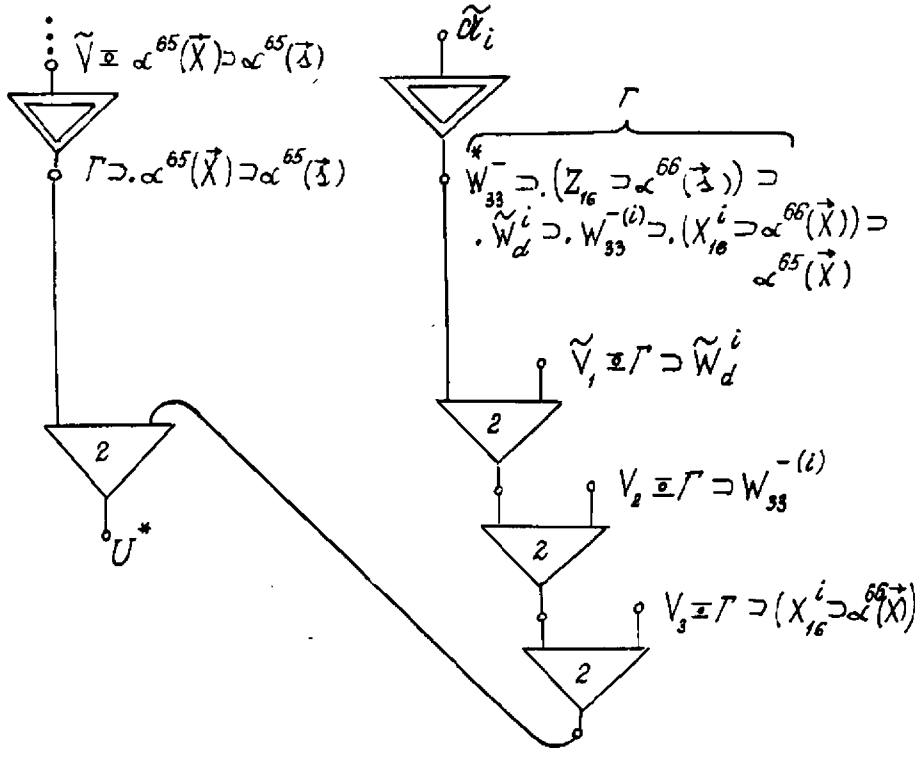


Рис. 6. 2

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что мы рассматриваем выводы с точностью до эквивалентности (одинаковые канонические формы).

Кроме того, $\tilde{V} \in \Sigma_И$. Следовательно, $(\alpha^{65}(\vec{X}) \supset \alpha^{65}(\vec{\mathfrak{s}})) \in \Sigma_И$.

Рассмотрим теперь вывод T_2 выражения V_2, которое после отбрасывания несущественной посылки $(Z_{16} \supset \alpha^{66}(\vec{\mathfrak{s}}))$ выглядит так: $\overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . \supset . W^{+(i)}_{1,2} \supset . \ldots \supset . W^{+(i)}_{32,2} \supset \alpha^{65}(\vec{X})$. Обозначим множество $\{W^{+(i)}_{1,2}, \ldots, W^{+(i)}_{32,2}\}$ посы -

лок знаком $\Gamma^{+(i)}_{f-32}$. Отметим, что каждая из них выводима в исчислении $\sum^{67}_{1,3,\ldots,63}$, а заключением посылки $W^{+(i)}_{j,2}$ является выражение $\alpha^{2j}(\vec{X})$. Из сказанного относительно структуры синтаксического дерева D_U следует, что в выводе T_2 те двойственные пары, одна компонента которых принадлежит выражению $\alpha^{65}(\vec{1})$, вторую компоненту содержат только в выражении $\alpha^{65}(\vec{X})$. А поэтому вывод выражения V_2 далее выглядит, как на рис. 6. 3, откуда выражение $(\alpha^{65}(\vec{1}) \supset \alpha^{65}(\vec{X})) \in \sum_{И}$. Следовательно, мы получаем выражение $(\alpha^{65}(X) \equiv \alpha^{65}(\vec{1})) \in \sum_{И}$.

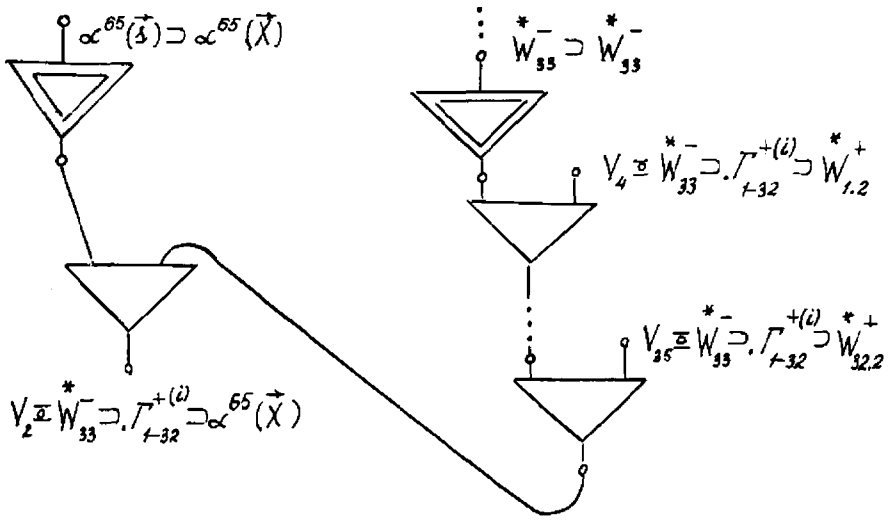
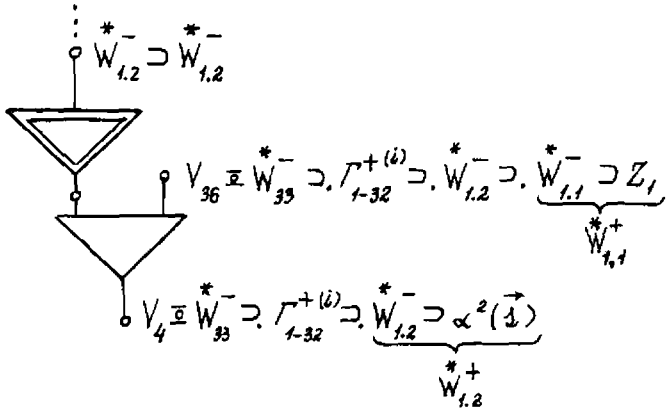


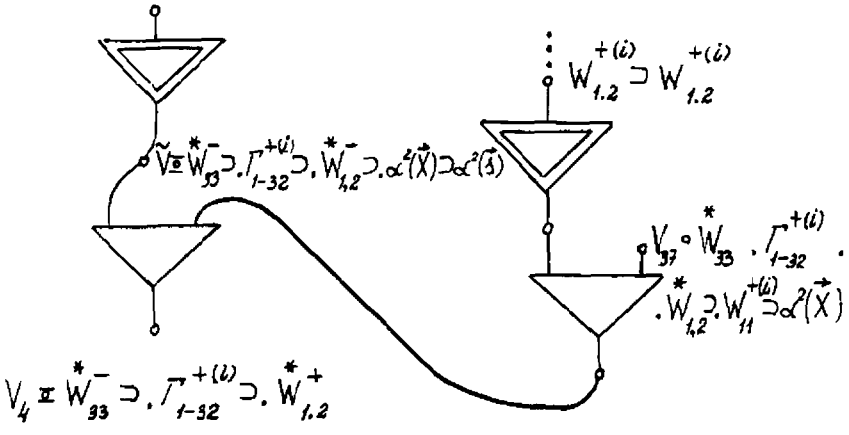
Рис. 6. 3

Из вида выражения V_4 следует, что его вывод может быть только таким, как на рис. 6. 4, а или 6. 4, б. Отметим, что заключения всех посылок выражения V_{36}, кроме посылки $\overset{*}{W}_{1,1}$, есть выражения вида $\alpha^{j}(\vec{X})$, $j=2,3,\ldots,65$. По лемме 5. 10, в исчислении $\sum^{67}_{2,3,4,\ldots,65}$ существует синтаксическое дерево $D_{V_{36}}$, в котором корнем является B-узел с используемым выражением $\overset{*}{W}{}^{-}_{1,1}$. Но тогда непосредственно ниже корня в дереве $D_{V_{36}}$ расположен узел, которому приписано выражение $\tilde{V}_{36}$ вида $\overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . \Gamma^{+(i)}_{f-32} \supset . \overset{*}{W}{}^{-}_{1,2} \supset . \overset{*}{W}{}^{-}_{1,1} \supset \alpha^{1}(\vec{1})$. А так как множества переменных в выражениях Z_1 и $\alpha^{1}(\vec{1})$ не пересекаются, то можно считать, что посылка $\overset{*}{W}{}^{-}_{1,1}$ нигде в дереве $D_{\tilde{V}_{36}}$ не используется. Но тогда выводимость выражения $\overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . \Gamma^{+(i)}_{f-32} \supset . \overset{*}{W}{}^{-}_{1,2} \supset \alpha^{1}(\vec{1})$ в исчислении $\tilde{\sum}$ противоречит тому, что $\alpha^{1} \notin \sum^{67}_{2,3,4,\ldots,65}$. Поэтому выражение $V_{36} \notin$

$\notin \tilde{\Sigma}$. Следовательно, остается лишь второй способ построения вывода выражения V_4, как на рис. 6. 4, б. Из этого мы получаем, что выражение $(\alpha^2(\vec{X}) \supset \alpha^2(\vec{\mathfrak{1}})) \in \Sigma_{11}$.



а)

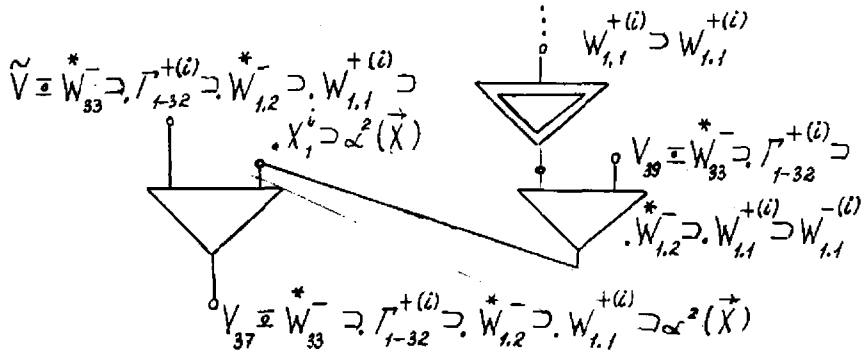


б)

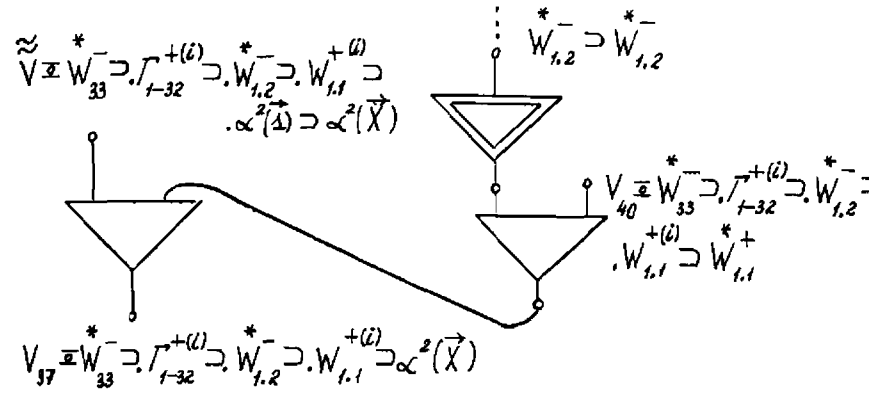
Рис. 6. 4

Аналогично, от выражения V_{20} мы переходим к выражению $V_{38} \equiv \overset{*}{W}{}^{-}_{33} \supset . \Gamma^{+(i)}_{1-32} \supset . \overset{*}{W}{}^{-}_{17,2} \supset . W^{+(i)}_{17,1} \supset \alpha^{34}(\vec{X})$ и получаем $(\alpha^{34}(\vec{X}) \supset \alpha^{34}(\vec{\mathfrak{1}})) \in \Sigma_{11}$.

Рассмотрим подвывод $T_{37} \subseteq T$ выражения V_{37}. Вывод выражения V_{38}, в силу его симметрии с выражением V_{37}, строится аналогично. Вывод T_{37} может быть либо таким, как на рис. 6. 5, а, либо как на рис. 6. 5, б, что следует из леммы 5. 10.



а)



б)

Рис. 6. 5

Как легко получить из вида синтаксического дерева на рис. 5. 4 и соответствующих выводов дополнительных аксиом исчисления $\widetilde{\Sigma}$, вывод выражения V_{39} (см. рис. 6. 5, а) может быть лишь таким, как на рис. 6. 6.

Рассмотрим подробнее выражение $\widetilde{V}$ (см. рис. 6. 5, а). Из вида синтаксического дерева D_{U^*} на рис. 5. 4 и леммы 5. 10 следует, что $(X_1^i \supset \alpha^2(\vec{X})) \in \Sigma_и$ и $(\alpha^2(\vec{1}) \supset X_1^i) \in \Sigma_и$, т. е. $(X_1^i \equiv \alpha^2(\vec{1})) \in \Sigma_и$ с учетом того, что $(\alpha^2(\vec{X}) \supset \alpha^2(\vec{1})) \in \Sigma_и$.

Восстанавливая тот же ход доказательства для выражения V_{38}, мы получаем, что $(X_1^i \equiv \alpha^{34}(\vec{1})) \in \Sigma_и$. Таким образом, оба вывода выражений V_{37} и V_{38} не могут быть подобными тому выводу выражения V_{37}, который изображен на рис. 6. 5, а и 6. 6, так как в этом случае получаем

противоречие с $(\alpha^2(\vec{1})) \equiv \alpha^{34}(\vec{1}) \in \sum_{И}$. Допустим, что вывод выражения V_{37} выглядит, как на рис. 6. 5, б, а вывод выражения V_{38} подобен выводу выражения V_{37} на рис. 6. 5, а и 6. 6, и из него мы можем получить, что выражение $(X_1^i \equiv \alpha^{34}(\vec{1})) \in \sum_{И}$.

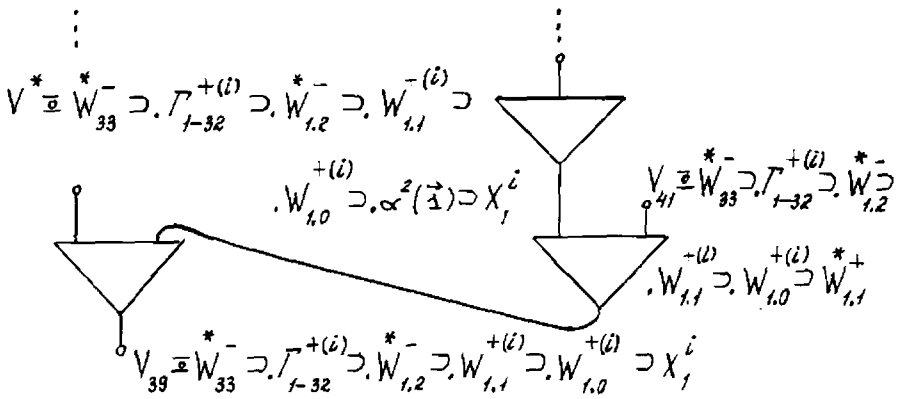


Рис. 6. 6

Рассмотрим подвывод $T_{40} \subseteq T$ выражения $V_{40} \overline{\underline{\circ}}\, \overset{*}{W}{}^-_{33} \supset . \Gamma^{+(i)}_{1-32} \supset . \overset{*}{W}{}^-_{1,2} \supset . W^{+(i)}_{1,1} \supset . \overset{*}{W}{}^-_{1,1} \supset Z_1$. Напомним, что $\overset{*}{W}{}^-_{1,1} \overline{\underline{\circ}}\, (\alpha^1(\vec{1}) \supset Z_1)$ и $W^{+(i)}_{1,1} \overline{\underline{\circ}}\, (\alpha^1(\vec{X}) \supset X^i_1 \supset X^i_1)$. Все посылки выражения V_{40}, кроме двух $W^{+(i)}_{1,1}$ и $\overset{*}{W}{}^-_{1,1}$, выводимы в исчислении $\sum^{67}_{2,3,\ldots,65}$. Поэтому рассмотрим вывод в этом исчислении выражения $(\alpha^1(\vec{X}) \supset X^i_1 \supset X^i_1) \supset . \alpha^1(\vec{1}) \supset Z_1 \supset Z_1$. Из нашего предположения о виде вывода выражения V_{38} мы получаем, что выражение $(X^i_1 \equiv \alpha^{34}(\vec{1})) \in \sum_{И}$ и отсюда следует, что $\alpha^1(\vec{1}) \in \sum^{67}_{2,3,\ldots,65}$. Противоречие. Таким образом, вывод выражения V_{38} строится подобно выводу выражения V_{37} на рис. 6. 5, б, из чего мы получаем, что

$$(\alpha^{34}(\vec{X}) \equiv \alpha^{34}(\vec{1})) \in \sum_{И}.$$

Вывод выражения V_{40} в исчислении $\sum^{67}_{2,4,\ldots,64,65}$ дает нам две возможности: $(X^i_1 \supset \alpha^1(\vec{1})) \in \sum_{И}$ и $(\alpha^1(\vec{X}) \supset X^i_1) \in \sum_{И}$ или $(X^i_1 \equiv Z_1) \in \sum_{И}$ и $(\alpha^1(\vec{X}) \equiv \alpha^1(\vec{1})) \in \sum_{И}$. Аналогично, восстанавливая вывод выражения V_{38}, мы получаем выражение $V_{42} \overline{\underline{\circ}}\, \overset{*}{W}{}^-_{33} \supset . \Gamma^{+(i)}_{1-32} \supset . \overset{*}{W}{}^-_{17,2} \supset . W^{+(i)}_{17,1} \supset . \overset{*}{W}{}^-_{17,1} \supset Z_1$, где $\overset{*}{W}{}^-_{17,1} \overline{\underline{\circ}}\, (\alpha^{33}(\vec{1}) \supset Z_1)$ и $W^{+(i)}_{17,1} \overline{\underline{\circ}}\, (\alpha^{33}(\vec{X}) \supset X^i_1 \supset X^i_1)$. Рассуждая, как и в случае выражения V_{40}, мы приходим к двум возможностям: $(X^i_1 \supset \alpha^{33}(\vec{1})) \in \sum_{И}$ и $(\alpha^{33}(\vec{X}) \supset X^i_1) \in \sum_{И}$ или $(X^i_1 \equiv Z_1) \in \sum_{И}$ и $(\alpha^{33}(\vec{X}) \supset \alpha^{33}(\vec{1})) \in \sum_{И}$.

Но первый из этих случаев несовместим ни с одним из приведенных выше,

так как тогда мы получаем, что либо выражение $(\alpha^{33}(\vec{X}) \supset \alpha^{33}(\vec{1})) \in \sum_{И}$, либо выражение $(\alpha^{33}(\vec{X}) \supset Z_1) \in \sum_{И}$. Противоречие. Следовательно, остается единственно возможное $(X_1^i \equiv Z_1) \in \sum_{И}$, $(\alpha^1(\vec{X}) \supset \alpha^1(\vec{1})) \in \sum_{И}$ и $(\alpha^{33}(\vec{X}) \supset \alpha^{33}(\vec{1})) \in \sum_{И}$.

Аналогично $(X_j^i \equiv Z_j) \in \sum_{И}$, $j=1,2,\ldots,16$. Отсюда следует, что в аксиоме $\widetilde{\mathfrak{A}}_i$ подстановки на места переменных таковы, что в исчислении $\sum_{И}$ выводимы выражения: $(X_j^i \equiv Z_j)$, $j=1,2,\ldots,16$; $(\alpha^q(\vec{X}) \equiv \alpha^q(\vec{1}))$, $q=2,4,\ldots,64,65$; $\alpha^p(\vec{X}) \supset \alpha^p(\vec{1})$, $p=1,3,\ldots,63$.

Рассмотрим теперь все возможные выводы в исчислении $\sum_{K\Lambda}$ выражения V_1, которые принадлежат множеству $\mathfrak{N}_{V_1}$. Оно имеет вид $\overset{*}{W}{}_{33}^{-} \supset \supset \widetilde{W}_{33}^{-(i)} \supset \alpha^{65}(\vec{X})$, и, в отличие от выражения U^*, здесь присутствуют две посылки $\overset{*}{W}{}_{33}^{-}$ и $\widetilde{W}_{33}^{-(i)}$. Используя те же рассуждения, что и ранее для выражения U^*, можно доказать, что корень синтаксического дерева D_{V_1}, которое соответствует произвольному выводу $T \in \mathfrak{N}_{V_1}$, есть B-узел с формулой использования $\overset{*}{W}{}_{33}^{-}$ или $W_{33}^{-(i)}$. В первом случае посылка $\widetilde{W}_{33}^{-(i)}$, а во втором – $\overset{*}{W}{}_{33}^{-}$ несущественные. Таким образом, мы можем разбирать два синтаксических дерева $D_{V_1}^1$ и $D_{V_1}^2$ в зависимости от вида используемого выражения в корне. В первом случае мы вновь получили такой же вывод в исчислении $\widetilde{\sum}$, как и для выражения U^*. Используя некоторую новую дополнительную аксиому $\widetilde{\mathfrak{A}}_j$, во втором случае перейдем к новому выражению так же, как от выражения U^* мы перешли к выражению V_1. И этот процесс может кончиться только применением аксиомы $\widetilde{\mathfrak{A}}_{m+1}$.

Следовательно, в выводе выражения U^* в исчислении $\widetilde{\sum}$ можно выделить последовательность $\{W_j\}$ выражений, каждое из которых соответствует некоторой паре слов вида $\{VR_{i_1}\ldots R_{i_j}\}$; $P_{i_1}\ldots P_{i_j}$, при этом длина слова V не меньше длины слова P_{i_1}, длина слова $VR_{i_1}\ldots R_{i_q}$ не меньше длины слова $P_{i_1}\ldots P_{i_{q+1}}$, $q=1,2,\ldots,j-1$, и каждое выражение W_j невыводимо в исчислении $\sum_{И}$, но выводимо в $\widetilde{\sum}$. Кроме того, в этой последовательности существует последнее выражение W_k такое, что $VR_{i_1}\ldots R_{i_k} = P_{i_1}\ldots P_{i_k} V_0$ и это выражение выделяется аксиомой $\widetilde{\mathfrak{A}}_{m+1}$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. 1. Исчисление $\widetilde{\sum}$ неразрешимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем значение параметра ℓ, указанного в теореме 6. 1, равным 2. Пусть слово V не принадлежит множеству

$\sigma^* \setminus \mathfrak{M}_2^{\sigma}$. Это значит, что для него существует множество $\delta_1, \ldots, \delta_n$ всех наборов индексов вида $\{i_1, i_2\}$, где $i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j=1,2$, для которых справедливо следующее:

Слово P_{i_1} есть начальное подслово (не обязательно собственное) слова V , и слово $P_{i_1} P_{i_2}$ есть начальное подслово слова VR_{i_1} ..

По каждой паре (V, δ_i), $i=1,2,\ldots,n$, образуем выражение U_i^* согласно схеме, по которой в §5 было образовано выражение U^* . Если ни одно из выражений U_i^* , $i=1,2,\ldots,n$, не принадлежит исчислению $\widetilde{\Sigma}$, то слово V невыводимо в системе продукций (Π) из слова V_0 , или существует вывод слова V из V_0 длины не более 1 . В противном случае оно выводимо из V_0 в этой системе продукций, и вывод имеет длину более 1 . Таким образом, выводимость в исчислении $\widetilde{\Sigma}$ хотя бы одного выражения из множества $\{U_1^*, \ldots, U_n^*\}$ равносильна выводимости в системе (Π) слова V из V_0 выводом длины более 1 .

Допустим, что для исчисления $\widetilde{\Sigma}$ имеется алгоритм, который по любому выражению U даёт положительный ответ, если $U \in \widetilde{\Sigma}$, и отрицательный -в противном случае. Тогда для любого слова V в алфавите σ мы можем определить, выводимо ли оно из слова V_0 или нет. Противоречие.

Следствие доказано.

Литература

1. В. Я. ГЕРЧИУ, Сверхнезависимые суперинтуиционистские логики, Мат. исследования, 5, № 3 (1970), 24–37.

2. С. В. ПОПОВ, Отношение эквивалентности и полная система схем эквивалентных преобразований в пропозициональных исчислениях, Проблемы кибернетики, М., Наука, 1974, вып. 29, 103–151.

3. С. В. ПОПОВ, О сложности выводов в некоторых пропозициональных исчислениях, Проблемы кибернетики, М., Наука, 1975, вып. 30, 57–147.

4. С. В. ПОПОВ, Неразрешимое промежуточное исчисление, Препринт № 95, ИПМ АН СССР, 1977.

5. M.L.MINSKY, Recursive unsolvability of Post's problem of 'TAG' and topics in theory of Turing machines, Ann.Math., 74 (1961),437–455.

Поступило 21 декабря 1978 г.,
после переработки – 8 апреля 1981 г.