С. В. Асташкин, Точная $\mathscr{K}$-монотонность одного класса банаховых пар, *Сиб. матем. журн.*, 2002, том 43, номер 1, 14–32

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 517.982.27

ТОЧНАЯ $\mathscr{K}$–МОНОТОННОСТЬ ОДНОГО КЛАССА БАНАХОВЫХ ПАР

С. В. Асташкин

Аннотация: Получены необходимые и достаточные условия точной $\mathscr{K}$-монотонности банаховых пар, образованных пространством существенно ограниченных функций и произвольным пространством Лоренца. Доказательство основывается на описании множества крайних точек $\mathscr{K}$-орбит относительно соответствующих конечномерных пар. Библиогр. 15.

1. Предварительные замечания и определения

Для банаховой пары (X_0, X_1), $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$ определим $\mathscr{K}$-функционал Петре:

$$\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1,\ x_i \in X_i\}.$$

Пару (X_0, X_1) называют *$\mathscr{K}$-монотонной* (*парой Кальдерона — Митягина*), если для некоторого $C > 0$ и всех $x, y \in X_0 + X_1$ из неравенства

$$\mathscr{K}(t, y; X_0, X_1) \le \mathscr{K}(t, x; X_0, X_1) \quad (t > 0) \tag{1}$$

вытекает существование линейного оператора $T : X_0+X_1 \to X_0+X_1$ такого, что $\max\limits_{i=0,1} \|T\|_{X_i \to X_i} \le C$ и $y = Tx$. Если последнее выполнено при $C = 1$, то (X_0, X_1) называется *точной $\mathscr{K}$-монотонной парой.* Если пара $\mathscr{K}$-монотонна, то все пространства, интерполяционные относительно нее, описываются как пространства вещественного $\mathscr{K}$-метода [1].

В середине 60-х годов А. П. Кальдерон [2] и независимо от него Б. С. Митягин [3] показали, что пара пространств (L_1, L_∞) функций, определенных на произвольном пространстве с σ-конечной мерой, является точной $\mathscr{K}$-монотонной. Затем А. А. Седаев и Е. М. Семенов доказали, что таким же свойством обладает любая пара $(L_1(w_0), L_1(w_1))$ «весовых» L_1 -пространств [4], позднее А. А. Седаев обобщил этот результат на случай пар $(L_p(w_0), L_p(w_1))$ $(1 \le p \le \infty)$ [5] (для $p = \infty$ аналогичный вопрос был еще раньше рассмотрен Я. Петре [6]). Наконец, в 1978 г. Г. Спарр получил наиболее общий результат о точной $\mathscr{K}$-монотонности произвольной пары пространств вида $(L_{p_0}(w_0), L_{p_1}(w_1))$ $(1 \le p_0, p_1 \le \infty)$ [7].

Наряду с этим в работе [4] был приведен пример пары пространств размерности 3, не имеющей свойства точной $\mathscr{K}$-монотонности. Для его описания, а также для формулировки рассматриваемых здесь задач приведем необходимые определения.

Пусть $v = (v_i)_{i=1}^n$ — невозрастающий набор неотрицательных чисел ($n \in \mathbb{N}$). Тогда n-мерное пространство Лоренца λ_v^n — это пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_v = \sum_{i=1}^n v_i x_i^*,$$

где (x_i^*) — перестановка модулей координат вектора $x = (x_i)_{i=1}^n$ в убывающем порядке. Если $v = (v_i)_{i=1}^\infty$ — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел, то координатное пространство Лоренца состоит из всех $x = (x_i)_{i=1}^\infty$ таких, что

$$\|x\|_v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i x_i^* < \infty.$$

В частности, если $v = (1, 0, \dots, 0)$ ($v = (1, 0, \dots)$), то мы получаем пространство l_∞^n (соответственно l_∞) с обычной нормой.

Функциональное пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ (φ — неотрицательная возрастающая вогнутая функция на $[0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$) — это множество всех измеримых на $(0, \infty)$ функций $x = x(t)$ таких, что

$$\|x\|_\varphi = \int_0^\infty x^*(t)\, d\varphi(t) < \infty$$

($x^*(t)$ — невозрастающая перестановка $|x(t)|$). Через L_∞, как обычно, будет обозначаться пространство всех существенно ограниченных функций $x = x(t)$ с нормой $\|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t>0} |x(t)|$.

Упомянутый выше пример неточной $\mathscr{K}$-монотонной пары — пара $\left(\lambda_v^3, l_\infty^3\right)$, где $v_1 = v_2 = 1$, $v_3 = 0$ [4]. В связи с этим А. А. Седаевым был поставлен вопрос о (точной) $\mathscr{K}$-монотонности пар вида $(\lambda_v^n, l_\infty^n)$, (λ_v, l_∞) и $(\Lambda(\varphi), L_\infty)$. В 1981 г. М. Цвикель доказал, что любая такая пара $\mathscr{K}$-монотонна с константой 4 [8], дав тем самым частичный положительный ответ на него.

В данной работе рассматривается задача о точной $\mathscr{K}$-монотонности пар указанного вида. Получены необходимые и достаточные условия на набор $v = (v_i)_{i=1}^n$ (последовательность $v = (v_i)_{i=1}^\infty$, функцию φ), при которых данным свойством обладает пара $(\lambda_v^n, l_\infty^n)$ (соответственно (λ_v, l_∞) или $(\Lambda(\varphi), L_\infty)$). Ключевую роль в доказательствах играет описание множества крайних точек $\mathscr{K}$-орбиты произвольного вектора из $\mathbb{R}^n$ относительно пары $(\lambda_v^n, l_\infty^n)$, являющееся обобщением известной теоремы А. С. Маркуса и представляющее самостоятельный интерес.

2. Крайние точки $\mathscr{K}$-орбиты в паре $\left(\lambda_v^n, l_\infty^n\right)$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $v_1 \ge v_2 \ge \dots \ge v_n \ge 0$. Обозначим через $\mathscr{V}_x$ $\mathscr{K}$-орбиту вектора $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ ($x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n \ge 0$) в паре $\left(\lambda_v^n, l_\infty^n\right)$. Это множество всех $y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ таких, что для $X_0 = \lambda_v^n$ и $X_1 = l_\infty^n$ выполнено соотношение (1).

Для каждого $z = (z_i)_{i=1}^n$ функция $\mathscr{K}(t, z) = \mathscr{K}\left(t, z; \lambda_v^n, l_\infty^n\right)$ кусочно-линейна и имеет точки излома при $t = t_k = \sum_{i=1}^k v_i$ ($k = 0, 1, \dots, n$, $t_0 = 0$). Кроме того, как легко проверить, $\mathscr{K}(0, z) = 0$, $\mathscr{K}(t_k, z) = \sum_{i=1}^k v_i z_i^*$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и $\mathscr{K}(t, z) = \mathscr{K}(t_n, z)$ ($t \ge t_n$). Поэтому соотношение (1) в этом случае эквивалентно системе неравенств:

$$\sum_{i=1}^k v_i y_i^* \le \sum_{i=1}^k v_i x_i \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{2}$$

В дальнейшем будут рассматриваться промежутки натурального ряда. Так, например, если $a, b \in \mathbb{N}$ и $a \le b$, то $[a,b] = \{k \in \mathbb{N} : a \le k \le b\}$. Через $|\Delta|$ мы будем обозначать число элементов промежутка Δ, e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — стандартные орты пространства $\mathbb{R}^n$.

Набор натуральных чисел $\mathscr{T} = \{t_k\}_{k=1}^m$, $1 = t_1 < t_2 < \cdots < t_m = n+1$, будем называть *$v$-допустимым относительно отрезка* $[1,n]$, если для любого $k = 1, 2, \ldots, m-1$ либо $t_{k+1} = t_k + 1$ и $v_{t_k} > 0$, либо существует $i \in [t_k, t_{k+1} - 1)$ такое, что $v_i > v_{i+1}$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathscr{T} = \{t_k\}_{k=1}^m$ — v-допустимый набор относительно отрезка $[1,n]$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1} - 1]$. Обозначим через $\mathscr{E}_{\mathscr{T}} = \mathscr{E}_{\mathscr{T}}(x)$ множество всех векторов $y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ таких, что для всех $k = 1, 2, \ldots, m$

$$y_i^* = \alpha_k(x), \quad \text{если} \quad i \in \Delta_k,$$

где

$$\alpha_k(x) = \frac{\sum\limits_{j \in \Delta_k} v_j x_j}{\sum\limits_{j \in \Delta_k} v_j}. \tag{3}$$

Пусть K — подмножество линейного пространства E. Напомним, что точка $x_0 \in K$ называется *крайней точкой множества* K, если она не является внутренней точкой прямолинейного интервала, концы которого принадлежат K, но отличны от x_0. Иначе говоря, из представления

$$x_0 = t x_1 + (1-t) x_2, \quad x_1 \in K,\ x_2 \in K,\ 0 < t < 1$$

следует, что $x_0 = x_1 = x_2$. Множество крайних точек множества K будем обозначать через $\operatorname{ext} K$.

Теорема 1. *Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство $\operatorname{ext} \mathscr{V}_x = \bigcup\limits_{\mathscr{T}} \mathscr{E}_{\mathscr{T}}$, где объединение берется по всем v-допустимым наборам относительно отрезка $[1,n]$. В частности, поэтому $\mathscr{V}_x = \operatorname{conv}(\bigcup\limits_{\mathscr{T}} \mathscr{E}_{\mathscr{T}})$.*

Доказательство. Предположим сначала, что

$$v_1 \ge v_2 \ge \cdots \ge v_n > 0. \tag{4}$$

Определим множество $\mathscr{V}_x^+ \subset \mathbb{R}^n$ системой $2n$ неравенств:

$$y_i \ge y_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad y_n \ge 0 \tag{5}$$

и

$$\sum_{j=1}^k v_j y_j \le \sum_{j=1}^k v_j x_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Так как $\mathscr{V}_x^+$ — замкнутый выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$, то $\bar{y} \in \operatorname{ext} \mathscr{V}_x^+$ тогда и только тогда, когда $\bar{y} \in \mathscr{V}_x^+$ и n неравенств системы (5) и (6) обращаются в линейно независимые равенства при $y = \bar{y}$.

Пусть $\bar{y} = (\bar{y}_i)_{i=1}^n \in \mathscr{V}_x^+$ и $\Delta^\circ = [a, b)$ — полуинтервал такой, что $a < b$ и $\bar{y}_i = \bar{y}_{i+1} = \alpha$ для всех $i \in \Delta^\circ$. Покажем, что из выполнения равенства

$$\sum_{j=1}^i v_j \bar{y}_j = \sum_{j=1}^i v_j x_j \tag{7}$$

при некотором $i \in \Delta^\circ$ следует справедливость аналогичного соотношения сразу при всех $j \in \Delta = [a, b]$ или, что эквивалентно,

$$x_j = \alpha \quad (j \in \Delta). \tag{8}$$

Действительно, неравенство $\bar{y}_i < x_i$ при $i = 1$ невозможно из-за (7), а если $i > 1$, то ввиду (4) при $k = i - 1$ нарушается (6). Если же, наоборот, $\bar{y}_i > x_i$, то $\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i = \alpha > x_{i+1}$ и ввиду (7) получаем

$$\sum_{j=1}^{i+1} v_j \bar{y}_j > \sum_{j=1}^{i+1} v_j x_j, \tag{9}$$

что опять противоречит (6). Таким образом, $x_i = \bar{y}_i = \alpha$. Отсюда

$$\sum_{j=1}^{i-1} v_j \bar{y}_j = \sum_{j=1}^{i-1} v_j x_j,$$

и, рассуждая аналогично, получаем, что (8) выполнено для всех $j \in [a, i]$.

Далее, $x_{i+1} \le x_i = \alpha$. Если предположить, что $x_{i+1} < \alpha$, то из (7) следует (9). Поэтому $x_{i+1} = \alpha$,

$$\sum_{j=1}^{i+1} v_j \bar{y}_j = \sum_{j=1}^{i+1} v_j x_j,$$

и тем самым можно заключить, что (8) доказано для всех $j \in \Delta$.

Предположим теперь, что $\bar{y} \in \operatorname{ext} \mathscr{V}_x^+$ и $\bar{y}_n > 0$. Рассмотрим систему всех полуинтервалов $\Delta_k^\circ = [a_k, b_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ из отрезка $[1, n]$, обладающих следующими свойствами:

(a) $a_k < b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $b_k < a_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$;

(b) $\bar{y}_i = \bar{y}_{i+1}$ $(i \in \Delta_k^\circ,\ k = 1, 2, \ldots, m)$;

(c) $\bar{y}_{a_k - 1} > \bar{y}_{a_k}$, $\bar{y}_{b_k} > \bar{y}_{b_k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ (если $a_1 = 1$, то для $k = 1$ требуется выполнение лишь второго из этих неравенств, если $b_m = n$, то при $k = m$ — только первого из них);

(d) для каждого $k = 1, 2, \ldots, m$ существует $i \in \Delta_k^\circ$ такое, что $x_{i+1} < x_i$.

Легко видеть, что условия (a)–(d) определяют систему $\{\Delta_k^\circ\}_{k=1}^m$ единственным образом. Кроме того, ввиду ранее доказанного для всех $i \in \Delta_k^\circ$, $k = 1, 2, \ldots, m$

$$\sum_{j=1}^{i} v_j \bar{y}_j < \sum_{j=1}^{i} v_j x_j.$$

Поэтому если $s \notin \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Delta_k^\circ$, то

$$\sum_{j=1}^{s} v_j \bar{y}_j = \sum_{j=1}^{s} v_j x_j$$

или, эквивалентно,

$$\sum_{j=1}^{b_k} v_j \bar{y}_j = \sum_{j=1}^{b_k} v_j x_j \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{10}$$

и для $s \in F$, $F = [1,n] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Delta_k$

$$\bar{y}_s = x_s. \tag{11}$$

Следовательно,

$$\sum_{j=a_k}^{b_k} v_j \bar{y}_j = \sum_{j=a_k}^{b_k} v_j x_j \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

откуда ввиду свойства (b) системы $\left\{\Delta_k^\circ\right\}$

$$\bar{y}_i = \alpha_k(x) \quad (i \in \Delta_k), \tag{12}$$

где $\alpha_k(x)$ определяются соотношением (3).

Перенумеровав множество $F \cup \{a_k\}_{k=1}^m \cup \{n+1\}$ в порядке возрастания, получим набор $\mathscr{T} = \{t_k\}_{k=1}^p$, $1 = t_1 < t_2 < \dots < t_p = n+1$. Ввиду (12) $\bar{y} \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}} = \mathscr{E}_{\mathscr{T}}(x)$. Покажем, что для произвольного $k = 1, 2, \dots, m$ существует $i \in \Delta_k^\circ$, при котором $v_i > v_{i+1}$. Тем самым ввиду (4) набор $\mathscr{T}$ будет v-допустимым.

Предположим, что, напротив, для некоторого $k = 1, 2, \dots, m$

$$v_j = v_{a_k} \quad (j \in \Delta_k). \tag{13}$$

Ввиду свойства (d) промежутков $\left\{\Delta_k^\circ\right\}$ существует $i \in \Delta_k^\circ$ такое, что

$$x_i > x_{i+1}. \tag{14}$$

Определим векторы $z^j = \left(z_s^j\right)_{s=1}^n$, $j = 1, 2, \dots, l$, где $l = |\Delta_k| = b_k - a_k + 1$, следующим образом: $z_s^j = \bar{y}_s$ $(s \notin \Delta_k)$ и $z_s^j = x_{s-a_k+j-1 \pmod{l}+a_k}$ $(s \in \Delta_k)$. Ввиду (14) векторы z^j попарно различны. Кроме того, так как последовательность $(x_i)_{i=1}^n$ монотонно убывает, то из (10) и (11) следует, что для произвольных $j = 1, 2, \dots, n$ и $i \in \Delta_k$

$$\sum_{s=a_k}^{i} v_s \left(z_s^j\right)^* = \sum_{s=a_k}^{i} v_s x_s.$$

Поэтому $z^j \in \mathscr{V}_x^+$ $(j = 1, 2, \dots, l)$.

Покажем, наконец, что вектор $z = l^{-1} \sum\limits_{j=1}^{l} z^j$ совпадает с $\bar{y}$. Действительно, если $z = (z_s)_{s=1}^n$, то $z_s = \bar{y}_s$ при $s \notin \Delta_k$. Если же $s \in \Delta_k$, то ввиду (13) и (12)

$$z_s = l^{-1} \sum_{j=1}^{l} z_s^j = l^{-1} \sum_{j \in \Delta_k} x_j = \Big(\sum_{j \in \Delta_k} v_j\Big)^{-1} \Big(\sum_{j \in \Delta_k} v_j x_j\Big) = \alpha_k(x) = \bar{y}_s.$$

Итак, $\bar{y}$ является выпуклой комбинацией различных элементов многогранника $\mathscr{V}_x^+$, что невозможно, так как $\bar{y} \in \operatorname{ext} \mathscr{V}_x^+$.

Предположим теперь, что $\bar{y} = (\bar{y}_i)_{i=1}^n \in \operatorname{ext} \mathscr{V}_x^+$ и при некотором $l < n$ $\bar{y}_1 \ge \bar{y}_2 \ge \dots \ge \bar{y}_l > \bar{y}_{l+1} = \dots = \bar{y}_n = 0$. Покажем, что тогда

$$x_i = 0 \quad (i > l). \tag{15}$$

В самом деле, если $x_{l+1} > 0$, то ввиду определения множества $\mathscr{V}_x^+$ и неравенства $v_{l+1} > 0$ при всех $k > l$

$$\sum_{i=1}^{k} v_i \bar{y}_i < \sum_{i=1}^{k} v_i x_i. \tag{16}$$

Обозначим $h = \delta e_{l+1}$, где $0 < \delta < \min(\bar{y}_l, x_{l+1})$. Тогда векторы $z' = \bar{y} + h$ и $z'' = \bar{y} - h$ различны и $\bar{y} = \frac{1}{2}(z' + z'')$. Кроме того, $z'_s = z''_s = \bar{y}_s$ ($s \neq l+1$), $z'_{l+1} = \delta$, $z''_{l+1} = -\delta$, и ввиду выбора δ из (16) следует, что $z', z'' \in \mathscr{V}_x^+$. Это противоречит тому, что $\bar{y}$ — крайняя точка множества $\mathscr{V}_x^+$. Тем самым равенство (15) доказано.

Таким образом, система неравенств (5) и (6) в рассматриваемом случае эквивалентна аналогичной системе в $\mathbb{R}^l$, если вместо x взять вектор $x' = (x_i)_{i=1}^l$. При этом l неравенств из нее на векторе $\bar{y}' = (\bar{y}_i)_{i=1}^l$ обращаются в линейно независимые равенства. Так как $\bar{y}_l > 0$, то так же, как и ранее, найдем v-допустимый относительно отрезка $[1, l]$ набор $\mathscr{T}' = \{t'_k\}_{k=1}^m$, $1 = t'_1 < t'_2 < \dots < t'_m = l+1$, такой, что $\bar{y}' \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}'}$. Тогда $\mathscr{T} = \{t_k\}_{k=1}^{n+m-l}$, где $t_k = t'_k$ ($k = 1, \dots, m$) и $t_k = l + 1 + k - m$ ($k = m+1, \dots, n+m-l$), является v-допустимым набором уже относительно всего отрезка $[1, n]$ и $\bar{y} \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}}$.

Итак, $\operatorname{ext} \mathscr{V}_x^+ \subset \bigcup\limits_{\mathscr{T}} \mathscr{E}_{\mathscr{T}}$, где объединение берется по всем v-допустимым наборам $\mathscr{T}$ относительно отрезка $[1, n]$.

Вернемся к множеству $\mathscr{V}_x$. Оно симметрично как относительно координатных плоскостей $y_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), так и плоскостей $y_i = y_j$ ($1 \leq i \neq j \leq n$). Поэтому если $\bar{y} = (\bar{y}_j)_{j=1}^n$ — крайняя точка $\mathscr{V}_x$, то $\bar{y}^* = (\bar{y}_i^*)_{i=1}^n \in \operatorname{ext} \mathscr{V}_x^+$ и, значит, найдется v-допустимый на отрезке $[1, n]$ набор $\mathscr{T}$ такой, что $\bar{y} \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}}$.

Докажем обратное: для любого v-допустимого набора $\mathscr{T}$ справедливо вложение $\mathscr{E}_{\mathscr{T}} \subset \operatorname{ext} \mathscr{V}_x$. Пусть $\bar{y} = (\bar{y}_i)_{i=1}^n \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}} = \mathscr{E}_{\mathscr{T}}(x)$. Заметим, что система (2), определяющая многогранник $\mathscr{V}_x$, эквивалентна системе всевозможных неравенств вида

$$\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_i^j v_i y_{\pi_j(i)} \leq \sum_{i=1}^{j} v_i x_i \quad (j = 1, 2, \dots, n), \tag{17}$$

где $\pi_j = \pi_j(i)$ — произвольные перестановки отрезка $[1, n]$, а $\varepsilon^j = \left\{\varepsilon_i^j\right\}$ — произвольные наборы знаков ($j = 1, 2, \dots, n$). Покажем, что $\bar{y} \in \mathscr{V}_x$ и n неравенств системы (17) при $y = \bar{y}$ обращаются в линейно независимые равенства. Начнем с одного вспомогательного утверждения.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_k, x, y$ — произвольные действительные числа. Рассмотрим следующий определитель, все строки которого являются перестановками этого набора чисел:

$$V = \begin{Vmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{m-1} & a_m & x & y & b_1 & \dots & b_{k-1} & b_k \\
a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{m-1} & a_m & y & x & b_1 & \dots & b_{k-1} & b_k \\
a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{m-1} & y & a_m & x & b_1 & \dots & b_{k-1} & b_k \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_1 & y & a_2 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & x & b_1 & \dots & b_{k-1} & b_k \\
y & a_1 & a_2 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & x & b_1 & \dots & b_{k-1} & b_k \\
y & a_1 & a_2 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & b_1 & x & \dots & b_{k-1} & b_k \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
y & a_1 & a_2 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & b_1 & b_2 & \dots & x & b_k \\
y & a_1 & a_2 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & b_1 & b_2 & \dots & b_k & x
\end{Vmatrix}.$$

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$V = (-1)^{(m+1)(m+2)/2} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{k} b_j + x + y \right) (y - x) \prod_{i=1}^{m} (y - a_i) \prod_{j=1}^{k} (x - b_j).$$

В частности, если $a_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $b_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \neq b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, $y \neq a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *и* $x \neq y$, *то* $V \neq 0$.

Доказательство. Сложив первый столбец определителя со всеми остальными и выделяя общий множитель, имеем

$$V = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{k} b_j + x + y \right) V,' \tag{18}$$

где определитель V' получается из V заменой первого столбца столбцом, состоящим из единиц. Так как при подстановке в V' вместо y чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и x соответственно получаются одинаковые строки, то V' делится на произведение $(y - x) \prod_{i=1}^{m} (y - a_i)$. Его степень как многочлена по y равна $m + 1$, и, значит,

$$V' = C(x)(y - x) \prod_{i=1}^{m} (y - a_i).$$

При этом

$$C(x) = (-1)^{k_m} V'', \tag{19}$$

где k_m — число инверсий перестановки $m + 2, m + 1, \ldots, 2, 1$, а

$$V'' = \begin{Vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{k-1} & b_k \\ 1 & x & b_2 & b_3 & \ldots & b_{k-1} & b_k \\ 1 & b_2 & x & b_3 & \ldots & b_{k-1} & b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & x & b_k \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_k & x \end{Vmatrix}.$$

Так как $b_1, b_2, \ldots, b_k$ являются корнями полинома $V''(x)$, степень которого равна k, а коэффициент при x^k равен 1, то

$$V''(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - b_j). \tag{20}$$

Кроме того, $k_m = (m + 1)(m + 2)/2$, и в итоге требуемое равенство следует из (18)–(20). Последнее утверждение леммы вытекает непосредственно из условий и доказанного равенства.

Замечание 1. Аналогичные утверждения справедливы для определителей

$$V_1 = \begin{Vmatrix} x & y & b_1 & \ldots & b_k \\ y & x & b_1 & \ldots & b_k \\ y & b_1 & x & \ldots & b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & b_1 & b_2 & \ldots & x \end{Vmatrix}, \quad V_2 = \begin{Vmatrix} a_1 & \ldots & a_m & x & y \\ a_1 & \ldots & a_m & y & x \\ a_1 & \ldots & y & a_m & x \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y & \ldots & a_{m-1} & a_m & x \end{Vmatrix}.$$

Точнее, можно показать, что

$$V_1 = \left(\sum_{j=1}^{k} b_j + x + y \right) (y - x) \prod_{j=1}^{k} (x - b_j),$$

а

$$V_2 = (-1)^{(m+1)(m+2)/2}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i + x + y\right)(y-x)\prod_{i=1}^{m}(y-a_i).$$

Поэтому если $b_j \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \neq b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ и $x \neq y$, то $V_1 \neq 0$, а если $a_i \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \neq a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и $x \neq y$, то $V_2 \neq 0$. В случае, когда набор состоит лишь из двух чисел x и y, то $V_3 = \begin{Vmatrix} x & y \\ y & x \end{Vmatrix} = x^2 - y^2 \neq 0$, если $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $x \neq y$.

Продолжим доказательство теоремы. Для данного v-допустимого набора $\mathscr{T} = \{t_k\}_{k=1}^{p}$ положим $\Delta_k = [t_k, t_{k+1} - 1]$, $I_1 = \{k = 1, 2, \ldots, p-1 : |\Delta_k| \geq 2\}$, $I_2 = \{1, 2, \ldots, p-1\} \setminus I_1$. Кроме того, пусть $c_k = \max\{i \in \Delta_k : v_i = v_{t_k}\}$. Так как $\mathscr{T}$ — v-допустимый набор, то $c_k < t_{k+1} - 1$ для $k \in I_1$.

Применяя в случае $k \in I_1$ лемму 1 к набору чисел

$$v_{t_k}, v_{t_k+1}, \ldots, v_{c_k-1},\ x = v_{c_k},\ y = v_{c_k+1}, \ldots, v_{t_{k+1}-1},$$

найдем перестановки ${\sigma_j}^k$ $(j \in \Delta_k)$ отрезка Δ_k такие, что определитель V_k, строки которого — соответствующим образом переставленные числа этого набора, не равен нулю. Если $k \in I_2$, то отрезок Δ_k состоит лишь из одного элемента t_k, и мы полагаем $\sigma_{t_k}^k(t_k) = t_k$.

Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ определим перестановку σ_j следующим образом. Пусть k_j такое, что $j \in \Delta_{k_j}$. Тогда $\sigma_j(i) = i$, если $i \notin \Delta_{k_j}$, и $\sigma_j(i) = {\sigma_j}^{k_j}(i)$, если $i \in \Delta_{k_j}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{t_{k+1}-1} v_{\sigma_j(i)} y_i = \sum_{i=1}^{t_{k+1}-1} v_i x_i \quad (j \in \Delta_k,\ k = 1, 2, \ldots, p-1) \tag{21}$$

относительно переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Ее определитель $\prod\limits_{k \in I_1} V_k \prod\limits_{k \in I_2} v_k$ отличен от нуля. Следовательно, система (21) имеет единственное решение.

Если $\bar{y} = (\bar{y}_i)_{i=1}^{n} \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}}(x)$ для рассматриваемого v-допустимого набора, то $\bar{y}_i^* = \alpha_k(x)$ $(i \in \Delta_k,\, k = 1, 2, \ldots, p-1)$, где $\alpha_k(x)$ определяется соотношением (3). Поэтому так как $(x_i)_{i=1}^{n}$ убывает, то для произвольных $k = 1, 2, \ldots, p-1$ и $m \in \Delta_k$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \bar{y}_i^* = \sum_{j \leq k-1} \sum_{i \in \Delta_j} v_i \bar{y}_i^* + \sum_{i=t_k}^{m} v_i \bar{y}_i^* = \sum_{j \leq k-1} \sum_{i \in \Delta_j} v_i x_i + \bar{y}_{t_k}^* \sum_{i=t_k}^{m} v_i$$
$$= \sum_{i=1}^{t_k-1} v_i x_i + \left(\sum_{i=t_k}^{m} v_i\right)\Big(\sum_{i \in \Delta_k} v_i\Big)^{-1}\Big(\sum_{i \in \Delta_k} v_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{t_k-1} v_i x_i + \sum_{i=t_k}^{m} v_i x_i = \sum_{i=1}^{m} v_i x_i$$

и, значит, $\bar{y} \in \mathscr{V}_x$.

Найдем перестановку ν отрезка $[1, n]$ и $\delta_i = \pm 1$ так, чтобы $\bar{y}_i^* = \delta_i \bar{y}_{\nu(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Система уравнений

$$\sum_{i=1}^{t_{k+1}-1} \delta_i v_{\sigma_j(i)} y_{\nu(i)} = \sum_{i=1}^{t_{k+1}-1} v_i x_i \quad (j \in \Delta_k,\ k = 1, 2, \ldots, p-1),$$

или, что то же самое,

$$\sum_{i=1}^{t_{k+1}-1} \varepsilon_i^j v_i y_{\pi_j(i)} = \sum_{i=1}^{t_{k+1}-1} v_i x_i \quad (j \in \Delta_k,\ k = 1, 2, \ldots, p-1), \tag{22}$$

где $\pi_j = \nu(\tau_j)$, $\varepsilon_i^j = \delta_{\tau_j(i)}$, а $\tau_j = {\sigma_j}^{-1}$, эквивалентна системе (21). Покажем, что единственным решением (22) будет вектор $\bar{y}$.

Так как $\tau_j(i) \in \Delta_s$ для любых $s = 1, 2, \ldots, p-1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $i \in \Delta_s$, то

$$\sum_{i=1}^{t_{k+1}-1} \varepsilon_i^j v_i \bar{y}_{\pi_j(i)} = \sum_{s \le k} \sum_{i \in \Delta_s} v_i \delta_{\tau_j(i)} \bar{y}_{\nu(\tau_j(i))} = \sum_{s \le k} \sum_{i \in \Delta_s} v_i \bar{y}^*_{\tau_j(i)}$$

$$= \sum_{s \le k} \bar{y}^*_{t_s} \sum_{i \in \Delta_s} v_i = \sum_{s \le k} \sum_{i \in \Delta_s} v_i x_i = \sum_{i=1}^{t_{k+1}-1} v_i x_i.$$

Система (22) получается из системы неравенств (17) и состоит из n уравнений. Следовательно, $\bar{y} \in \operatorname{ext} \mathscr{V}_x$.

Осталось рассмотреть случай, когда при некотором $l < n$

$$v_1 \ge v_2 \ge \cdots \ge v_l > v_{l+1} = \cdots = v_n = 0. \tag{23}$$

Заметим, что при доказательстве вложения $\mathscr{E}_{\mathscr{T}}(x) \subset \operatorname{ext} \mathscr{V}_x$ ($\mathscr{T}$ — v-допустимый набор) положительность «весов» не использовалась. Поэтому достаточно доказать обратное: если $\bar{y} \in \operatorname{ext} \mathscr{V}_x$, то $\bar{y} \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}}(x)$ для некоторого v-допустимого набора $\mathscr{T}$.

Если $\bar{y} \in \operatorname{ext} \mathscr{V}_x$, то $\bar{y}^* \in \operatorname{ext} \mathscr{V}_x^+$, где множество $\mathscr{V}_x^+$ определяется соотношениями (5), (6). С помощью стандартных рассуждений, используя (23), получим, что $d = \min\{k : \bar{y}_k^* = \cdots = \bar{y}_n^*\} \le l$. Если $d = 1$, то набор $\{t_k\}_{k=1}^2$, $t_1 = 1$, $t_2 = n+1$, v-допустим и $\bar{y} \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}}$. Предположим, что $d > 1$. Тогда так как $\bar{y}^* \in \operatorname{ext} \mathscr{V}_x^+$, то $d-1$ неравенств из системы, аналогичной системе (5), (6) (с заменой n на $d-1$), должны обращаться на векторе $(\bar{y}_i^*)_{i=1}^{d-1}$ в линейно независимые равенства. Следовательно, так же, как и в начале доказательства, можно построить v-допустимый на отрезке $[1, d-1]$ набор $\mathscr{T}' = \{t'_k\}_{k=1}^m$, $t'_1 = 1 < \cdots < t'_m = d$, такой, что $(\bar{y}_i^*)_{i=1}^{d-1} \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}'}$. Тогда набор $\mathscr{T} = \{t_k\}_{k=1}^{m+1}$, $t_k = t'_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $t_{m+1} = n+1$, v-допустим на всем отрезке $[1, n]$ и $\bar{y} \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}}$.

Теорема доказана.

Замечание 2. В случае $v_1 = v_2 = \cdots = v_n > 0$ единственный v-допустимый набор относительно отрезка $[1, n]$ — это $\mathscr{T} = \{k\}_{k=1}^{n+1}$. В качестве следствия из теоремы 1 получаем хорошо известную теорему А. С. Маркуса: если $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ $(x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge 0)$ и $\mathscr{V}_x$ — множество всех $y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\sum_{i=1}^k y_i^* \le \sum_{i=1}^k x_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то $\operatorname{ext} \mathscr{V}_x$ состоит из всех $\bar{y} = (\bar{y}_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, представимых в виде $\bar{y}_i = \varepsilon_i x_{\pi(i)}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, а π — перестановка отрезка $[1, n]$ [9–11].

Замечание 3. Различие между случаями равных и неравных «весов» можно наглядно продемонстрировать при $n = 2$. Если $v_1 = v_2 > 0$, то множество $\mathscr{V}_x$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 > x_2 > 0$, является выпуклым восьмиугольником, вершины (крайние точки) которого имеют координаты $(\pm x_1, \pm x_2)$ и $(\pm x_2, \pm x_1)$.

Если же $v_1 > v_2 > 0$, то получаем выпуклый двенадцатиугольник. Кроме перечисленных он имеет еще четыре вершины, лежащие на биссектрисах координатных углов:

$$\left(\pm \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2}{v_1 + v_2}, \pm \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2}{v_1 + v_2}\right).$$

3. Конечномерные пространства

Теорема 2. *Банахова пара* $\left(\lambda_v^n, l_\infty^n\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ *является точной* $\mathscr{K}$*-монотонной тогда и только тогда, когда*

$$v_k = v_1 q^{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots, n),\ v_1 > 0,\ q \in [0, 1]. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть сначала выполнено (24). Если $q = 0$, то $\lambda_v^n = v_1 l_\infty^n$ (это означает, что $\|x\|_v = v_1 \|x\|_\infty$). Поэтому неравенство

$$\mathscr{K}\left(t, y; \lambda_v^n, l_\infty^n\right) \le \mathscr{K}\left(t, x; \lambda_v^n, l_\infty^n\right) \tag{25}$$

эквивалентно тому, что $\|y\|_\infty \le \|x\|_\infty$. Пусть $f \in \left(l_\infty^n\right)^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|_\infty$. Тогда оператор $Tz = (\|x\|_\infty)^{-1} f(z) y$ удовлетворяет условиям $\|T\|_{l_\infty^n \to l_\infty^n} \le 1$ и $Tx = y$. Таким образом, можно предполагать, что $q \in (0, 1]$.

Итак, пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$ и выполнено (25). Как уже говорилось, это эквивалентно системе неравенств (2), где вместо x берется вектор x^*. Покажем, что существует линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой, что

$$y = Ax \quad \text{и} \quad \max(\|A\|_{l_\infty^n \to l_\infty^n}, \|A\|_{\lambda_v^n \to \lambda_v^n}) \le 1. \tag{26}$$

Ввиду теоремы 1 можно считать, что $y \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}} = \mathscr{E}_{\mathscr{T}}(x^*)$, где $\mathscr{T}$ — произвольный v-допустимый набор относительно отрезка $[1, n]$.

Пусть $\mathscr{T} = \{t_k\}_{k=1}^m$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1} - 1]$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$. Определим оператор B: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$Bz = \sum_{k=1}^{m-1} b_k(z) \sum_{j \in \Delta_k} e_j, \quad \text{где} \quad b_k(z) = \Big(\sum_{j \in \Delta_k} v_j\Big)^{-1} \Big(\sum_{j \in \Delta_k} z_j v_j\Big).$$

Легко проверить, что $\|B\|_{l_\infty^n \to l_\infty^n} = 1$. Кроме того, если $b_s^*(z) = |b_{k_s}(z)|$ $(s = 1, 2, \ldots, m-1)$, то

$$\|Bz\|_v = \sum_{s=1}^{m-1} |b_{k_s}(z)| \sum_{i=i_{s-1}+1}^{i_s} v_i, \tag{27}$$

где $i_0 = 0$, $i_s = \sum\limits_{j=1}^{s} |\Delta_{k_j}|$ $(s = 1, 2, \ldots, m-1)$. Ввиду (24) для каждого $s = 1, 2, \ldots, m-1$

$$|b_{k_s}(z)| \le \Big(\sum_{i \in \Delta_{k_s}} q^{i-1}\Big)^{-1} \Big(\sum_{i \in \Delta_{k_s}} |z_i| q^{i-1}\Big)$$
$$= \left(\sum_{i=i_{s-1}+1}^{i_s} q^{i-1}\right)^{-1} \left(\sum_{i=i_{s-1}+1}^{i_s} |z_{i-i_{s-1}+t_{k_s}-1}| q^{i-1}\right).$$

Поэтому из (27) следует, что

$$\|Bz\|_v \le v_1 \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{i=i_{s-1}+1}^{i_s} |z_{i-i_{s-1}+t_{k_s}-1}| q^{i-1} \le v_1 \sum_{i=1}^{n} z_i^* q^{i-1} = \|z\|_v,$$

откуда $\|B\|_{\lambda_v^n \to \lambda_v^n} \le 1$. Кроме того, так как $y \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}}(x^*)$, то $Bx^* = y^*$.

Обозначим через S_1 и S_2 операторы, порожденные перестановками отрезка $[1, n]$ и покоординатным умножением на ± 1, такие, что $S_1 y^* = y$ и $S_2 x = x^*$. Тогда для оператора $A = S_1 B S_2$ имеет место (26).

При доказательстве противоположного утверждения можно считать, что $v_2 > 0$. В [12] было показано, что пара $(\lambda_v^n, l_\infty^n)$ не является точной $\mathscr{K}$-монотонной, если $v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_l > v_{l+1} = \cdots = v_n = 0$ при некотором $l \in [2, n]$. Поэтому ограничимся случаем, когда $v_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Определим операторы $Q_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$Q_k((z_i)) = \sum_{i \neq k-1,k} z_i e_i + \frac{z_{k-1}v_{k-1} + z_k v_k}{v_{k-1} + v_k}(e_{k-1} + e_k) \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

и покажем, что из точной $\mathscr{K}$-монотонности пары $(\lambda_v^n, l_\infty^n)$ следуют неравенства

$$\|Q_k\|_{\lambda_v^n \to \lambda_v^n} \leq 1 \quad (k = 2, 3, \ldots, n). \tag{28}$$

Пусть $x = x^* = \sum\limits_{i=1}^{n} (n - i + 1)e_i$. Легко видеть, что вектор

$$y = y^* = \sum_{i=1}^{k-2} (n - i + 1)e_i + \sum_{i=k+1}^{n} (n - i + 1)e_i + \alpha_k(e_{k-1} + e_k),$$

где

$$\alpha_k = \frac{(n - k + 2)v_{k-1} + (n - k + 1)v_k}{v_{k-1} + v_k}, \tag{29}$$

принадлежит множеству $\mathscr{V}_x$. Поэтому ввиду условия существует линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой, что выполнено (26).

Если оператор задается матрицей $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$, то из определения векторов x и y, а также (26) получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} na_{1,1} + (n-1)a_{1,2} + \cdots + (n-k+1)a_{1,k} + \cdots + a_{1,n} = n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ na_{k-2,1} + (n-1)a_{k-2,2} + \cdots + (n-k+1)a_{k-2,k} + \cdots + a_{k-2,n} = n - k + 3 \\ na_{k-1,1} + (n-1)a_{k-1,2} + \cdots + (n-k+1)a_{k-1,k} + \cdots + a_{k-1,n} = \alpha_k \\ na_{k,1} + (n-1)a_{k,2} + \cdots + (n-k+1)a_{k,k} + \cdots + a_{k,n} = \alpha_k \\ na_{k+1,1} + (n-1)a_{k+1,2} + \cdots + (n-k+1)a_{k+1,k} + \cdots + a_{k+1,n} = n - k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ na_{n,1} + (n-1)a_{n,2} + \cdots + (n-k+1)a_{n,k} + \cdots + a_{n,n} = 1. \end{cases}$$

Так как

$$\|A\|_{l_\infty^n \to l_\infty^n} = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|,$$

то из (26) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{30}$$

Поэтому из первого уравнения системы выводим, что $a_{1,1} = 1$ и $a_{1,j} = 0$ $(j = 2, \ldots, n)$. Далее, $Ae_1 = (1, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1})$, и ввиду (30) $\max\limits_{i=2,\ldots,n} |a_{i,1}| \leq 1$. Следовательно, $(Ae_1)^* = (1, u_2, \ldots, u_n)$, и, еще раз применяя (26), получаем

$$v_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n = \|Ae_1\|_v \leq \|e_1\|_v = v_1,$$

откуда $a_{2,1} = \cdots = a_{n,1} = 0$. Рассуждая аналогичным образом, приходим к равенствам $a_{i,i} = 1$ $(1 \le i \le k-2)$ и $a_{i,j} = 0$, если $i \ne j$ и $\min(i,j) \le k-2$.

Перепишем теперь $(k-1)$-е уравнение системы:

$$(n-k+2)a_{k-1,k-1} + (n-k+1)a_{k-1,k} + \cdots + a_{k-1,n} = \alpha_k. \tag{31}$$

Если $a_{k-1,k-1} < v_{k-1}/(v_{k-1}+v_k)$, то ввиду (30) и (29) левая часть (31) не превосходит

$$(n-k+2)a_{k-1,k-1} + (n-k+1)\left(\sum_{j=k}^{n} |a_{k-1,j}|\right) \le (n-k+2)a_{k-1,k-1} + (n-k+1)(1-|a_{k-1,k-1}|) < \alpha_k$$

и равенство (31) не выполняется. Поэтому

$$a_{k-1,k-1} \ge \frac{v_{k-1}}{v_{k-1}+v_k}. \tag{32}$$

Совершенно аналогично из k-го уравнения следует неравенство

$$a_{k,k-1} \ge \frac{v_{k-1}}{v_{k-1}+v_k}. \tag{33}$$

Далее,

$$A\left(\sum_{i=1}^{k-1} e_i\right) = \sum_{i=1}^{k-2} e_i + \sum_{i=k-1}^{n} a_{i,k-1}e_i.$$

Значит, ввиду (26) $|a_{k-1,k-1}|v_{k-1} + |a_{k,k-1}|v_k + \cdots + |a_{n,k-1}|v_n \le v_{k-1}$. Отсюда и из (32) и (33)

$$a_{k-1,k-1} = a_{k,k-1} = \frac{v_{k-1}}{v_{k-1}+v_k}, \quad a_{j,k-1} = 0 \quad (j = k+1, \ldots, n).$$

Следовательно, из $(k-1)$-го и k-го уравнений системы получаем

$$a_{k-1,k} = a_{k,k} = \frac{v_k}{v_{k-1}+v_k}$$

и $a_{k-1,j} = a_{k,j} = 0$ $(j = k+1, \ldots, n)$. В связи с этим

$$A\left(\sum_{i=1}^{k} e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} e_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_{i,k}e_i,$$

откуда ввиду (26) $a_{j,k} = 0$ $(j = k+1, \ldots, n)$.

Применяя те же рассуждения, что и для первых $(k-2)$-х уравнений системы, получим, что $a_{i,i} = 1$ $(i = k+1, \ldots, n)$ и $a_{i,j} = 0$, если $i \ne j$ $(i, j = k+1, \ldots, n)$. Таким образом, оператор A совпадает с Q_k, и (28) доказано.

Покажем, что отношение v_{k-1}/v_k не зависит от $k = 2, \ldots, n$.

Рассмотрим векторы

$$a = 2e_1 + e_2 + 3\sum_{i=3}^{k} e_i, \quad b = Q_1 a = \frac{2v_1+v_2}{v_1+v_2}(e_1+e_2) + 3\sum_{i=3}^{k} e_i.$$

Из (28) следует, что $\|b\|_v \le \|a\|_v$, или

$$\frac{2v_1+v_2}{v_1+v_2}(v_{k-1}+v_k) \le 2v_{k-1} + v_k,$$

откуда
$$\frac{v_2}{v_1} \geq \frac{v_k}{v_{k-1}}. \tag{34}$$

Пусть теперь
$$c = \sum_{i=1}^{k-2} e_i + 3e_{k-1} + 2e_k, \quad d = Q_k c = \sum_{i=1}^{k-2} e_i + \frac{3v_{k-1} + 2v_k}{v_{k-1} + v_k}(e_{k-1} + e_k).$$

Опять ввиду (28) $\|d\|_v \leq \|c\|_v$, что эквивалентно неравенству
$$\frac{v_2}{v_1} \leq \frac{v_k}{v_{k-1}}. \tag{35}$$

Соотношения (34) и (35) означают, что теорема доказана.

4. Пространства последовательностей

Пусть $v = (v_k)_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел. Напомним, что координатное пространство Лоренца λ_v состоит из всех последовательностей $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, таких, что
$$\|x\|_v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k x_k^* < \infty.$$

Пространство l_∞, как обычно, состоит из всех ограниченных последовательностей $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k=1,2,\dots} |x_k|$.

Теорема 3. *Банахова пара (λ_v, l_∞) является точной $\mathscr{K}$-монотонной тогда и только тогда, когда*
$$v_k = v_1 q^{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots),\ v_1 > 0,\ q \in [0, 1]. \tag{36}$$

Доказательство. Докажем достаточность условия (36). Для $x \in l_\infty$ определим «срезки» $x^{(n)} = \left(x_i^{(n)}\right)$, где $x_i^{(n)} = x_i$ $(i \leq n)$ и $x_i^{(n)} = 0$ $(i > n)$. Тогда $x^{(n)} \to x$ покоординатно при $n \to +\infty$ и поэтому для каждого $t > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{K}(t, x^{(n)}) = \mathscr{K}(t, x), \tag{37}$$

где $\mathscr{K}(t, z) = \mathscr{K}(t, z; \lambda_v, l_\infty)$. Предположим, что $x \in l_\infty$, $y \in l_\infty$ и
$$\mathscr{K}(t, y) \leq \mathscr{K}(t, x) \quad (t > 0). \tag{38}$$

Покажем, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует $n = n(m) \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $t > 0$
$$\mathscr{K}(t, y^{(m)}) \leq (1 + \varepsilon)\mathscr{K}(t, x^{(n)}). \tag{39}$$

Заметим прежде всего, что на отрезке $[1, m]$ сходимость (37) равномерная. Поэтому ввиду (38) неравенство (39) выполнено при некотором $n \in \mathbb{N}$ и всех $t \in [1, m]$. Так как на $[0, 1]$ функция $\mathscr{K}(t, y^{(m)})$ линейна и $\mathscr{K}(0, y^{(m)}) = \mathscr{K}(0, x^{(n)}) = 0$, то (39) верно и при $t \in [0, 1]$. Наконец, (39) имеет место и для $t > m$ ввиду того, что функция $\mathscr{K}(t, y^{(m)})$ здесь постоянна, а $\mathscr{K}(t, x^{(n)})$ возрастает.

Считая $n \geq m$, заметим, что $\mathscr{K}(t, y^{(m)})$ и $\mathscr{K}(t, x^{(n)})$ совпадают с $\mathscr{K}$-функционалами n-мерных векторов $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m, 0, \dots, 0)$ и $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

соответственно относительно пары $(\lambda^n_{v(n)}, l^n_\infty)$, где $v^{(n)} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Значит, по теореме 2 существует линейный оператор $A^{(m)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой, что

$$A^{(m)}\bar{x} = \frac{1}{1+\varepsilon}\bar{y}, \quad \max(\|A^{(m)}\|_{\lambda^n_{v(n)} \to \lambda^n_{v(n)}}, \|A^{(m)}\|_{l^n_\infty \to l^n_\infty}) \le 1.$$

Пусть $S^{(m)} : l_\infty \to l^n_\infty$ и $I^{(m)} : l^n_\infty \to l_\infty$ — линейные операторы такие, что

$$S^{(m)}\big((z_i)_{i=1}^\infty\big) = (z_i)_{i=1}^n, \quad I^{(m)}\big((z_i)_{i=1}^n\big) = (z_1, z_2, \dots, z_n, 0, \dots)$$

соответственно. Тогда ввиду предыдущего оператор $Q^{(m)} = I^{(m)}A^{(m)}S^{(m)}$ удовлетворяет условиям

$$Q^{(m)}x = \frac{1}{1+\varepsilon}y^{(m)}, \quad \max(\|Q^{(m)}\|_{\lambda_v \to \lambda_v}, \|Q^{(m)}\|_{l_\infty \to l_\infty}) \le 1. \tag{40}$$

Далее мы используем подход, примененный А. П. Кальдероном в аналогичной ситуации в работе [2].

Пусть Φ — банахов предел, т. е. линейный ограниченный функционал на пространстве l_∞ такой, что

$$\liminf_{m\to+\infty} a_m \le \Phi(a) \le \limsup_{m\to+\infty} a_m \quad (a = (a_m)_{m=1}^\infty \in l_\infty). \tag{41}$$

Определим линейный оператор $Q : l_\infty \to l_\infty$:

$$Qz = ((Qz)_k)_{k=1}^\infty, \quad (Qz)_k = \Phi\big(((Q^{(m)}z)_k)_{m=1}^\infty\big).$$

Ввиду (40) и (41) $\|Q\|_{l_\infty \to l_\infty} \le 1$. Докажем, что

$$\|Q\|_{\lambda_v \to \lambda_v} \le 1+\varepsilon. \tag{42}$$

Найдем последовательность попарно различных натуральных чисел $(s_i)_{i=1}^\infty$ такую, что $(Qz)^*_i \le (1+\varepsilon)|(Qz)_{s_i}|$ $(i = 1, 2, \dots)$. Тогда для любого $k = 1, 2, \dots$ из (41) и (40) следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k (Qz)^*_i v_i &\le (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^k |(Qz)_{s_i}| v_i = (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^k \pm\,\Phi((Q^{(m)}z)_{s_i})v_i \\ &= (1+\varepsilon)\Phi\left(\sum_{i=1}^k \pm\,(Q^{(m)}z)_{s_i}v_i\right) \le (1+\varepsilon)\sup_{m=1,2,\dots}\sum_{i=1}^k |(Q^{(m)}z)_{s_i}|v_i \\ &\le (1+\varepsilon)\sup_{m=1,2,\dots}\|Q^{(m)}z\|_v \le (1+\varepsilon)\sup_{m=1,2,\dots}\|Q^{(m)}\|_{\lambda_v\to\lambda_v}\|z\|_v \le (1+\varepsilon)\|z\|_v.\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем (42). Кроме того, из (41) и (40) вытекает

$$Qx = \lim_{m\to\infty} Q^{(m)}x = \frac{1}{1+\varepsilon}y.$$

Поэтому если $\overline{Q} = (1+\varepsilon)Q$, то

$$\overline{Q}x = y, \quad \max(\|\overline{Q}\|_{\lambda_v\to\lambda_v}, \|\overline{Q}\|_{l_\infty\to l_\infty}) \le (1+\varepsilon)^2.$$

Тем самым пара (λ_v, l_∞) является точной $\mathscr{K}$ -монотонной.

Так как точная $\mathscr{K}$-монотонность пары (λ_v, l_∞) обеспечивает выполнение аналогичного условия для пары $\big(\lambda^n_v, l^n_\infty\big)$ при произвольном $n \in \mathbb{N}$, необходимость (36) следует из теоремы 2.

5. Пространства функций

Пусть φ — неотрицательная возрастающая вогнутая функция на $[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$. Функциональное пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $(0,\infty)$ функций $x=x(t)$ таких, что

$$\|x\|_\varphi = \int\limits_0^\infty x^*(t)\,d\varphi(t) < \infty$$

($x^*(t)$ — невозрастающая перестановка $|x(t)|$). Через L_∞, как обычно, будет обозначаться пространство всех существенно ограниченных функций $x=x(t)$ с нормой $\|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t>0}|x(t)|$.

Теорема 4. *Банахова пара $(\Lambda(\varphi), L_\infty)$ является точной $\mathscr{K}$-монотонной тогда и только тогда, когда $\varphi(t)=af(t)$ $(a>0)$, где либо $f(t)=1$, либо $f(t)=t$, либо $f(t)=1-q^t$ $(0<q<1)$.*

Доказательство. Для произвольных $n\in\mathbb{N}$ и $h>0$ определим функции

$$f(t)=\sum_{k=1}^n x_k\chi_{[h(k-1),hk)}(t),\quad g(t)=\sum_{k=1}^n y_k\chi_{[h(k-1),hk)}(t), \tag{43}$$

где χ_e — характеристическая функция множества $e\subset[0,\infty)$. Если $(\Lambda(\varphi), L_\infty)$ — точная $\mathscr{K}$-монотонная пара, то при любом $\varepsilon>0$ из неравенства

$$\mathscr{K}(t,g;\Lambda(\varphi),L_\infty)\le\mathscr{K}(t,f;\Lambda(\varphi),L_\infty)\quad(t>0) \tag{44}$$

вытекает существование линейного оператора A такого, что

$$Af=g\quad\text{и}\quad\max(\|A\|_{\Lambda(\varphi)\to\Lambda(\varphi)},\|A\|_{L_\infty\to L_\infty})\le 1+\varepsilon.$$

Так как [13, с. 164–165]

$$\mathscr{K}(t,h;\Lambda(\varphi),L_\infty)=\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} h^*(s)\,d\varphi(s), \tag{45}$$

неравенство (44) эквивалентно тому, что

$$\mathscr{K}\big(t,(y_k)_{k=1}^n;\lambda_v^n,l_\infty^n\big)\le\mathscr{K}\big(t,(x_k)_{k=1}^n;\lambda_v^n,l_\infty^n\big)\quad(t>0),$$

где $v=(v_k)_{k=1}^n$, $v_k=\varphi(hk)-\varphi(h(k-1))$. Норма проектора

$$Pu(t)=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^N\int\limits_{h(k-1)}^{hk}u(s)\,ds\chi_{[h(k-1),hk)}(t)$$

в пространствах $\Lambda(\varphi)$ и L_∞ равна 1 [13, с. 111, 148]. Аналогично если

$$I\big((z_k)_{k=1}^n\big)=\sum_{k=1}^n z_k\chi_{[h(k-1),hk)}(t),\quad S\left(\sum_{k=1}^n z_k\chi_{[h(k-1),hk)}(t)\right)=(z_k)_{k=1}^n, \tag{46}$$

то

$$\|I\|_{\lambda_v^n\to\Lambda(\varphi)}=\|I\|_{l_\infty^n\to L_\infty}=\|S\|_{\Lambda(\varphi)\to\lambda_v^n}=\|S\|_{L_\infty\to l_\infty^n}=1$$

(оператор S рассматривается лишь на функциях вида (43)). Поэтому оператор $\widetilde{A} = SPAI : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям

$$\widetilde{A}\big((x_k)_{k=1}^n\big) = (y_k)_{k=1}^n, \quad \max(\|\widetilde{A}\|_{\lambda_v^n \to \lambda_v^n}, \|\widetilde{A}\|_{l_\infty^n \to l_\infty^n}) \leq 1 + \varepsilon.$$

Таким образом, пара $\big(\lambda_v^n, l_\infty^n\big)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ является точной $\mathscr{K}$-монотонной. Следовательно, по теореме 2

$$\varphi(hk) - \varphi(h(k-1)) = \varphi(h)q_h^{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots), \tag{47}$$

где $\varphi(h) > 0$ и $q_h \in [0, 1]$. Если $q_h = 0$, то $\varphi(hk) = \varphi(h)$ для всех натуральных k. Поэтому $\varphi(t) = a$ $(t > 0)$ ввиду произвольности $h > 0$.

Два оставшихся случая $q_h = 1$ и $q_h \in (0, 1)$ рассматриваются в следующих леммах.

Лемма 2. *Пусть функция $\varphi(t)$ неотрицательна и вогнута на $[0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$. Если для некоторого $h > 0$ и всех $k \in \mathbb{N}$*

$$\varphi(kh) = k\varphi(h), \tag{48}$$

то $\varphi(t) = at$ $(t \geq 0)$ при некотором $a > 0$.

Доказательство. Так как $\varphi(t)$ вогнута, то $\varphi(t)/t$ убывает. Поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\varphi(kh)}{kh} \leq \frac{\varphi(t)}{t} \leq \frac{\varphi(h)}{h}, \quad \text{если} \quad t \in [h, kh].$$

Значит, ввиду (48) $\varphi(t)$ при $t \geq h$ совпадает с линейной функцией $l(t) = \varphi(h)t/h$.

Если же $0 < t < h$, то $\varphi(t) \geq t\varphi(h)/h = l(t)$. Предположим, что $\varphi(t_0) > l(t_0)$ для некоторого $t_0 \in (0, h)$. Тогда

$$\frac{\varphi(h) - \varphi(t_0)}{h - t_0} \leq \frac{l(h) - l(t_0)}{h - t_0} = \frac{\varphi(2h - t_0) - \varphi(h)}{h - t_0},$$

что противоречит вогнутости функции $\varphi(t)$. Следовательно, $\varphi(t) = l(t)$, и лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть функция $\varphi(t)$ положительна и непрерывна при $t > 0$, $\varphi(0) = 0$. Предположим, что для любого $h > 0$ существует $q_h \in (0, 1)$ такое, что для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение (47). Тогда $\varphi(t) = a(1 - q^t)$ при некоторых $a > 0$ и $q \in (0, 1)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что для $h > 0$ и $m \in \mathbb{N}$

$$q_{h/m} = q_h^{1/m}. \tag{49}$$

Прежде всего

$$\varphi(2h) - \varphi(h) = \varphi(h)q_h. \tag{50}$$

Кроме того,

$$\varphi((1 + 1/m)h) - \varphi(h) = \varphi(h/m)q_{h/m}^m,$$

$$\varphi((1 + 2/m)h) - \varphi((1 + 1/m)h) = \varphi(h/m)q_{h/m}^{m+1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi(2h) - \varphi((2 - 1/m)h) = \varphi(h/m)q_{h/m}^{2m-1}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$\varphi(2h) - \varphi(h) = \varphi(h/m)\big(1 + q_{h/m} + \dots + q_{h/m}^{m-1}\big)q_{h/m}^m. \tag{51}$$

С другой стороны, для произвольного натурального k

$$\varphi(2h/m) - \varphi(h/m) = \varphi(h/m) q_{h/m},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi(kh/m) - \varphi((k-1)h/m) = \varphi(h/m) q_{h/m}^{k-1},$$

откуда

$$\varphi(kh/m) = \varphi(h/m)\bigl(1 + q_{h/m} + \dots + q_{h/m}^{k-1}\bigr). \tag{52}$$

В итоге (49) следует из (50)–(52) при $k = m$.

Далее, полагая в (52) $h = 1$ и обозначая $q = q_1$, ввиду (49) получаем

$$\varphi(k/m) = \varphi(1/m)\frac{1 - q^{k/m}}{1 - q^{1/m}} \tag{53}$$

для произвольных натуральных k и m. В частности, если $k = m$, то

$$\varphi(1) = \varphi(1/m)\frac{1 - q}{1 - q^{1/m}},$$

и (53) можно переписать в виде $\varphi(k/m) = \frac{\varphi(1)}{1-q}(1 - q^{k/m})$. Таким образом, равенство $\varphi(t) = \frac{\varphi(1)}{1-q}(1 - q^t)$ справедливо для всех рациональных $t > 0$. Так как $\varphi(t)$ непрерывна и $\varphi(0) = 0$, оно выполнено при всех $t \geq 0$. Лемма доказана.

Докажем обратное утверждение.

Заметим, что пара $(\Lambda(\varphi), L_\infty)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из работы [14]. А именно, пространства $\Lambda(\varphi)$ и L_∞ обладают свойством Фату [13, с. 64], и для произвольного $x \in \Lambda(\varphi) + L_\infty$

$$\frac{t}{\varphi(t)}\mathscr{K}(\varphi(t), x; \Lambda(\varphi), L_\infty) = \frac{t}{\varphi(t)}\int_0^t x^*(s)\, d\varphi(s) \to 0, \quad \text{если} \quad t \to 0+$$

(последнее условие выполнено как в случае $\lim\limits_{t\to 0+}\varphi(t) = 0$, так и в случае $\lim\limits_{t\to 0+}\varphi(t) > 0$). Поэтому для доказательства точной $\mathscr{K}$-монотонности пары $(\Lambda(\varphi), L_\infty)$ достаточно рассматривать лишь неотрицательные невозрастающие конечнозначные функции. Точнее, нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ из условия

$$\mathscr{K}(t, \bar{g}) \leq \mathscr{K}(t, \bar{f}), \tag{54}$$

где $\mathscr{K}(t, z) = \mathscr{K}(t, z; \Lambda(\varphi), L_\infty)$, для функций

$$\bar{f}(t) = \sum_{k=1}^m \bar{x}_k \chi_{0,a_k]}(t), \quad \bar{g}(t) = \sum_{k=1}^m \bar{y}_k \chi_{0,b_k]}(t)$$

($a_1 > a_2 > \dots > a_m > 0$, $b_1 > b_2 > \dots > b_m > 0$, $\bar{x}_k > 0$, $\bar{y}_k > 0$) следует существование линейного оператора $T : \Lambda(\varphi) + L_\infty \to \Lambda(\varphi) + L_\infty$ такого, что

$$T\bar{f} = \bar{g}, \quad \max(\|T\|_{\Lambda(\varphi)\to\Lambda(\varphi)}, \|T\|_{L_\infty\to L_\infty}) \leq 1 + \varepsilon. \tag{55}$$

Построим последовательность неотрицательных убывающих функций $f_s(t)$ и $g_s(t)$ вида (43) (соответствующих некоторой последовательности $h_s \downarrow 0$) таких, что $f_s \uparrow \bar{f}$, $g_s \downarrow \bar{g}$. Тогда $\mathscr{K}(t, f_s) \uparrow \mathscr{K}(t, \bar{f})$ и $\mathscr{K}(t, g_s) \downarrow \mathscr{K}(t, \bar{g})$.

Так как функция $\mathscr{K}(t,\bar f)$ линейна на отрезках $[a_i,a_{i-1}]$ $(i=2,3,\dots,m+1,$ $a_{m+1}=0)$ и постоянна на $[a_1,\infty)$ и аналогичными свойствами обладает функция $\mathscr{K}(t,\bar g)$, ввиду неравенства (54) для любого $\varepsilon>0$ при некотором достаточно большом $s\in\mathbb{N}$

$$\mathscr{K}(t,g_s)\le(1+\varepsilon)\mathscr{K}(t,f_s)\quad(t>0).$$

Пусть $f_s=f$, а $g_s=g$, где f и g определены в (43). Тогда если функция φ удовлетворяет условию теоремы, то опять из соотношения (45) и теоремы 2 вытекает существование линейного оператора $B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ такого, что

$$B\big((x_k)_{k=1}^n\big)=\frac{1}{1+\varepsilon}(y_k)_{k=1}^n,\quad \max(\|B\|_{\lambda_v^n\to\lambda_v^n},\|B\|_{l_\infty^n\to l_\infty^n})\le 1,$$

где $v=(v_k)_{k=1}^n$, $v_k=\varphi(hk)-\varphi(h(k-1))$.

Пусть

$$M_1z(t)=\frac{f(t)}{\bar f(t)}z(t),\quad \text{если}\quad \bar f(t)\ne 0,\quad \text{и}\quad M_1z(t)=0,\quad \text{если}\quad \bar f(t)=0,$$

и

$$M_2z(t)=\frac{\bar g(t)}{g(t)}z(t),\quad \text{если}\quad g(t)\ne 0,\quad \text{и}\quad M_2z(t)=0,\quad \text{если}\quad g(t)=0.$$

Так как норма этих операторов в пространствах $\Lambda(\varphi)$ и L_∞ не превосходит 1, для оператора $T=(1+\varepsilon)M_2IBSM_1$ получаем (55) (операторы I и S определены соотношением (46)). Теорема доказана.

Замечание 4. Если $\varphi(t)=a$, то $\Lambda(\varphi)=aL_\infty$; если $\varphi(t)=at$, то $\Lambda(\varphi)=aL_1$. В наиболее интересном случае $\varphi(t)=a(1-q^t)$ ввиду равенств

$$\lim_{t\to 0+}\varphi(t)/t=a\ln(1/q),\quad \lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=a$$

получаем $\Lambda(\varphi)=L_1+L_\infty$ с нормой

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)}=a\ln(1/q)\int\limits_0^\infty x^*(t)q^t\,dt.$$

Замечание 5. С утверждением теоремы 4 интересно сопоставить тот факт, что пара $(\Lambda(\varphi),L_\infty)$ обладает свойством точной $\mathscr{K}$-монотонности относительно пары (L_1,L_∞) для любой непрерывной возрастающей вогнутой функции $\varphi(t)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(\infty)=\infty$ [15]. Точнее, справедливо следующее утверждение. Если $x\in\Lambda(\varphi)+L_\infty$, $y\in L_1+L_\infty$, то из неравенства

$$\mathscr{K}(t,y;L_1,L_\infty)\le\mathscr{K}(t,x;\Lambda(\varphi),L_\infty)\tag{56}$$

вытекает существование линейного оператора $T:\Lambda(\varphi)+L_\infty\to L_1+L_\infty$ такого, что

$$y=Tx\quad\text{и}\quad\max(\|T\|_{\Lambda(\varphi)\to L_1},\|T\|_{L_\infty\to L_\infty})\le 1.\tag{57}$$

Простое доказательство этого можно дать, используя одну идею из [8, теорема 2]. Пусть $\tilde x$ — невозрастающая перестановка функции x^* относительно меры $d\nu=d\varphi(t)=\varphi'(t)\,dt$ на $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$. Тогда ввиду [13, с. 108]

$$\mathscr{K}(t,\tilde x;L_1(d\nu),L_\infty(d\nu))=\int\limits_0^t\tilde x(s)\,ds=\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)}x^*(s)\,d\varphi(s)=\mathscr{K}(t,x;\Lambda(\varphi),L_\infty)$$

и, значит, по теореме Кальдерона — Митягина [2] существует линейный оператор $T_1 : L_1(d\nu) + L_\infty(d\nu) \to L_1 + L_\infty$ такой, что

$$y = T_1 x^* \quad \text{и} \quad \max(\|T_1\|_{L_1(d\nu)\to L_1}, \|T_1\|_{L_\infty(d\nu)\to L_\infty}) \le 1.$$

Через T_2 обозначим тождественный оператор, т. е. $T_2 z = z$. Так как [13, с. 94]

$$\|T_2 z\|_{L_1(d\nu)} = \int_0^\infty |z(s)|\, d\varphi(s) \le \int_0^\infty z^*(s)\, d\varphi(s) = \|z\|_{\Lambda(\varphi)},$$

то $\max(\|T_2\|_{\Lambda(\varphi)\to L_1(d\nu)}, \|T_2\|_{L_\infty \to L_\infty(d\nu)}) = 1$.

Наконец, опять по теореме Кальдерона — Митягина [2] для некоторого линейного оператора $T_3 : L_1 + L_\infty \to L_1 + L_\infty$

$$x^* = T_3 x \quad \text{и} \quad \max(\|T_3\|_{L_1\to L_1}, \|T_3\|_{L_\infty\to L_\infty}) \le 1.$$

Поскольку $\Lambda(\varphi)$ — точное интерполяционное пространство относительно пары (L_1, L_∞) [13, с. 148], отсюда $\|T_3\|_{\Lambda(\varphi)\to\Lambda(\varphi)} \le 1$. Осталось заметить, что оператор $T = T_1 T_2 T_3$ удовлетворяет условиям (57).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я.* Функторы вещественной интерполяции // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 1. С. 14–17.
2. *Calderón A. P.* Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz // Studia Math. 1966. V. 26, N 3. P. 273–299.
3. *Митягин Б. С.* Интерполяционная теорема для модулярных пространств // Мат. сб. 1965. Т. 66, № 4. С. 473–482.
4. *Седаев А. А., Семенов Е. М.* О возможности описания интерполяционных пространств в терминах $\mathscr{K}$-метода Питре // Оптимизация: Тр. ин-та математики/ АН СССР. Сиб. отд-ние. 1971. Вып. 4. С. 98–114.
5. *Седаев А. А.* Описание интерполяционных пространств пары $(L^p_{a_0}, L^p_{a_1})$ и некоторые родственные вопросы // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209, № 4. С. 798–800.
6. *Peetre J.* Banach couples: Technical report. Lund, 1971.
7. *Sparr G.* Interpolation of weighted L_p-spaces // Studia Math. 1978. V. 62. P. 229–271.
8. *Cwikel M.* Monotonicity properties of interpolation spaces. II // Arc. Mat. 1981. V. 19, N 1. P. 123–136.
9. *Маркус А. С.* Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 1. С. 34–36.
10. *Маркус А. С.* Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 4. С. 93–123.
11. *Митягин Б. С.* Нормированные идеалы промежуточного типа // Изв. АН СССР. 1964. Т. 28. С. 819–832.
12. *Узбеков Р. Ф.* $\mathscr{K}$-монотонные пары конечномерных пространств // Вестн. СамГУ. 2001. № 2. С. 47–54.
13. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
14. *Мастыло М.* О $\mathscr{K}$-монотонности пар симметричных пространств // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: Изд-во Яросл. ун-та, 1986. С. 49–56.
15. *Дмитриев В. И.* К интерполяционной теореме Кальдерона — Митягина // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215, № 3. С. 518–512.

Асташкин Сергей Владимирович
Самарский гос. университет, ул. Акад. Павлова, 1, Самара 443011
astashkn@ssu.samara.ru