А.П.Кубанская

ПОСТРОЕНИЕ И ОЦЕНКА СХОДИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛИТ СО СВОБОДНО ОПЕРТЫМИ КРАЯМИ

1°. Рассмотрим дифференциальное уравнение изгиба ортотропных плит

$$\mathfrak{D}_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\mathfrak{D}_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \mathfrak{D}_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x,y), \tag{I}$$

где

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{E_1 \delta^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1 \nu_2 + \frac{G\delta^3}{6}, \quad \mathfrak{D}_3 = \frac{E_2 \delta^3}{12(1-\nu_1\nu_2)},$$

причем $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G$ суть соответственно модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига для главных направлений, а δ - толщина плиты [I]. Будем искать приближенное решение этого уравнения в прямоугольнике $\Pi = [-a \leqslant x < a,\ 0 \leqslant y \leqslant b]$ при краевых условиях

$$w\Big|_{y=0,b} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=0,b} = 0 \tag{2}$$

- края плиты $y=0$, $y=b$ свободно оперты или закреплены шарнирно,

$$w\Big|_{x=-a,a} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=-a,a} = 0 \tag{3}$$

- края $x=-a$ и $x=a$ также свободно оперты или закреплены шарнирно.

Относительно точного решения краевой задачи (I), (2), (3) - функции $w(x,y)$, всюду ниже будем предполагать, что оно удовлетворяет условиям

$$w(x,y) \in C^{2p_1+4}_{2p+4}(\Pi), \quad w_{xx}(x,y) \in C^{2p_1+2}_{2p+2}(\Pi), \tag{4}$$

где p и p_1 - некоторые натуральные числа. При этом будем считать, что функция $w(x,y)$ экстраполирована по x за пределы $[-a,a]$ с сохранением непрерывной производной $\frac{\partial^{2p_1+4} w}{\partial x^{2p_1+4}}$

и по y за пределы $[0, b]$ с сохранением непрерывных производных $\frac{\partial^{2p+4} w}{\partial y^{2p+4}}$, $\frac{\partial^{2p+4} w}{\partial x^2 \partial y^{2p+2}}$.

2^0. На сетке равноотстоящих с шагом h прямых $y_i = ih$ $i = 1, 2, \ldots, n$ $\left(h = \frac{b}{n+1} \right)$ представим производные $\frac{\partial^2 w(x, y_i)}{\partial y^2}$ в виде

$$\frac{\partial^2 w(x, y_i)}{\partial y^2} = R_p(w(x, y_i)) + h^{2p} \theta_i^{(p,w)}(x), \tag{5}$$

где

$$R_p(w(x, y_i)) = \frac{2}{(2p)!\, h^2} \sum_{j=-p}^{p} a_p(y_i + jh) w(x, y_i + jh), \tag{6}$$

$$h^{2p} \theta_i^{(p,w)}(x) = O(h^{2p}),$$

причем

$$\begin{cases} a_p(y_i) = -(2p)! \sum\limits_{k=0}^{p-1} \dfrac{(k!)^2}{[(k+1)!]^2}, \\ a_p(y_i \pm sh) = (-1)^{s+1} (2p)! \sum\limits_{k=s-1}^{p-1} \dfrac{(k!)^2}{(k+1-s)!\,(k+1+s)!}, \quad s = 1, 2, \ldots, p \end{cases} \tag{7}$$

(см. [2] и [3]).

Докажем, что справедливо равенство

$$\sum_{s=-p}^{p} a_p(y_i + sh) = 0, \tag{8}$$

т.е.

$$\sum_{s=1}^{p} \left[(-1)^{s+1} \sum_{k=s-1}^{p-1} \frac{(k!)^2}{(k+1-s)!\,(k+1+s)!} - \frac{1}{2s^2} \right] = 0.$$

Доказательство проведем по индукции. Несложно проверить, что равенство (8) выполняется при $p = 1; 2$. Предполагая, что оно справедливо для $p-1$, докажем его справедливость для p. Имеем

$$\sum_{s=1}^{p} \left[(-1)^{s+1} \sum_{k=s-1}^{p-1} \frac{(k!)^2}{(k+1-s)!\,(k+1+s)!} - \frac{1}{2s^2} \right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{p-1} \left[(-1)^{s+1} \sum_{k=s-1}^{p-2} \frac{(k!)^2}{(k+1-s)!\,(k+1+s)!} - \frac{1}{2s^2} \right] + [(p-1)!]^2 \sum_{s=1}^{p} \frac{(-1)^{s+1}}{(p-s)!\,(p+s)!} -$$

$$-\frac{1}{2p^2}=[(p-1)!]^2\sum_{s=1}^{p}\frac{(-1)^{s+1}}{(p-s)!(p+s)!}-\frac{1}{2p^2}.$$

Покажем, что

$$2[(p-1)!]^2\sum_{s=1}^{p}\frac{(-1)^{s+1}}{(p-s)!(p+s)!}-\frac{1}{p^2}=0. \tag{9}$$

Положим в равенстве (9) $p+s=k$ и перепишем его в виде

$$2\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{(-1)^{k-p+1}}{k!(2p-k)!}-\frac{1}{(p!)^2}=0. \tag{10}$$

Принимая во внимание известное (см., например, [4]) равенство $\sum_{k=0}^{N}(-1)^k C_N^k=0$, где $C_N^k=\frac{N!}{k!(N-k)!}$ - биномиальные коэффициенты, и полагая в нем $N=2p$, получаем $\sum_{k=0}^{2p}\frac{(-1)^k}{k!(2p-k)!}=$ $=0$ или

$$2\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{(-1)^{k-p+1}}{k!(2p-k)!}-\frac{1}{(p!)^2}=0,$$

что совпадает с (10).

Производные $\frac{\partial^4 w(x,y_i)}{\partial y^4}$, $i=1,2,\ldots,n$ на рассматриваемой сетке прямых можно представить в форме

$$\frac{\partial^4 w(x,y_i)}{\partial y^4}=R_p(R_p(w(x,y_i)))+h^{2p}\vartheta_i^{(p,w)}(x), \tag{11}$$

где $h^{2p}\vartheta_i^{(p,w)}(x)$ при выполнении условий (4) суть величины порядка h^{2p}.

Действительно. Нетрудно видеть, что, если точное решение краевой задачи (1),(2),(3) - $w(x,y)$, имеет $2p+4$ непрерывных производных по y, то справедлива [2] формула

$$\frac{\partial^2 w(x,y_i)}{\partial y^2}=R_p(w(x,y_i))+\frac{\partial^{2p+2}w(x,y_i)}{\partial y^{2p+2}}\frac{4h^{2p}(p!)^2}{(2p+2)!}\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k k^{2p}}{(p+k)!(p-k)!}+O(h^{2p+2}). \tag{12}$$

Рассмотрим далее равенство

$$\frac{\partial^4 w(x,y_i)}{\partial y^4}=R_p\left(\frac{\partial^2 w(x,y_i)}{\partial y^2}\right)+O(h^{2p}).$$

Вычисляя входящую в него величину $R_p\left(\frac{\partial^2 w(x,y_i)}{\partial y^2}\right)$ применением оператора R_p к равенству (I2) и, учитывая при этом условия (4) и равенство (8), получаем

$$R_p\left(\frac{\partial^{2p+2} w(x,y_i)}{\partial y^{2p+2}}\right)=O(1), \text{ т.е. } h^{2p}\,\vartheta_i^{(p,w)}(x)=O(h^{2p}).$$

Выражения $R_p\,(w(x,y_i))$ и $R_p(R_p(w(x,y_i)))$ при $i=1,2,\ldots,2p-1,n+2-2p,\ldots,n$ содержат значения функции $w(x,y)$ в точках $y=y_{-1},y_{-2},\ldots,y_{-2p+1},y_{n+2},\ldots,y_{n+2p}$, лежащих за пределами сегмента $[0,b]$. Исключим эти значения из рассмотрения, пользуясь формулой (I2), а также равенствами

$$\frac{\partial^2 w(x,-lh)}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 w(x,lh)}{\partial y^2}+2\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial^{2k+2} w(x,0)}{\partial y^{2k+2}}\frac{(lh)^{2k}}{(2k)!}+O(h^{2p+2}), \tag{I3}$$

$$\frac{\partial^2 w(x,b+lh)}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 w(x,b-lh)}{\partial y^2}+2\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial^{2k+2} w(x,b)}{\partial y^{2k+2}}\frac{(lh)^{2k}}{(2k)!}+O(h^{2p+2}), \tag{I4}$$

$$w(x,-lh)=-w(x,lh)+2\sum_{k=0}^{p+\gamma}\frac{\partial^{2k} w(x,0)}{\partial y^{2k}}\frac{(lh)^{2k}}{(2k)!}+O(h^{2(p+\gamma+1)}), \tag{I5}$$

$$w(x,b+lh)=-w(x,b-lh)+2\sum_{k=0}^{p+\gamma}\frac{\partial^{2k} w(x,b)}{\partial y^{2k}}\frac{(lh)^{2k}}{(2k)!}+O(h^{2(p+\gamma+1)}), \tag{I6}$$

$l=1,2,\ldots,p-1,\quad \gamma=0,1.$

Рассмотрим аппроксимации

$$R_p(R_p(w(x,y_i)))=\frac{2}{(2p)!\,h^2}\sum_{j=-p}^{p}a_p(y_i+jh)R_p(w(x,y_i+jh)),\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{I7}$$

Исключим из них величины $R_p(w(x,y_1+jh)),\ j=-1,-2,\ldots,-p;$ $R_p(w(x,y_2+jh)),\ j=-2,-3,\ldots,-p;\ \ldots;\ R_p(w(x,y_{p-1}+jh)),\ j=-(p-1),-p;$ $R_p(w(x,y_p+jh)),\ j=-p$. Пользуясь формулой (I2), находим

$$R_p(w(x,0))=\frac{\partial^2 w(x,0)}{\partial y^2}-\frac{\partial^{2p+2} w(x,0)}{\partial y^{2p+2}}\frac{4h^{2p}(p!)^2}{(2p+2)!}\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k k^{2p}}{(p+k)!\,(p-k)!}+O(h^{2p+2}), \tag{I8}$$

$$R_p(w(x,-lh))=\frac{\partial^2 w(x,-lh)}{\partial y^2}-\frac{\partial^{2p+2} w(x,-lh)}{\partial y^{2p+2}}\frac{4h^{2p}(p!)^2}{(2p+2)!}\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k k^{2p}}{(p+k)!\,(p-k)!}+O(h^{2p+2}),$$

$l=1,2,\ldots,p-1.$

Пользуясь далее формулой (I3) и затем снова формулой (I2) имеем

$$R_p(w(x,-lh))=-\frac{\partial^2 w(x,lh)}{\partial y^2}+2\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial^{2k+2}w(x,0)}{\partial y^{2k+2}}\frac{(lh)^{2k}}{(2k)!}-\frac{\partial^{2p+2}w(x,-lh)}{\partial y^{2p+2}}\frac{4h^{2p}(p!)^2}{(2p+2)!}\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k k^{2p}}{(p+k)!(p-k)!}+$$

$$+O(h^{2p+2})=-R_p(w(x,lh))-\frac{4h^{2p+2}(p!)^2}{(2p+2)!}\cdot\frac{1}{h^2}\Big(\frac{\partial^{2p+2}w(x,-lh)}{\partial y^{2p+2}}-2\,\frac{\partial^{2p+2}w(x,0)}{\partial y^{2p+2}}+$$

$$+\frac{\partial^{2p+2}w(x,lh)}{\partial y^{2p+2}}\Big)\cdot\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k k^{2p}}{(p+k)!\,(p-k)!}+T_l\Big(p,h,\frac{\partial^2 w(x,0)}{\partial y^2},\ldots,\frac{\partial^{2p+2}w(x,0)}{\partial y^{2p+2}}\Big)+O(h^{2p+2}),$$

$l=1,2,\ldots,p-1$, причем

$$T_l\Big(p,h,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ldots,\frac{\partial^{2p+2}w}{\partial y^{2p+2}}\Big)\equiv 2\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\partial^{2k+2}w}{\partial y^{2k+2}}\cdot\frac{(lh)^{2k}}{(2k)!}+$$

$$+\frac{\partial^{2p+2}w}{\partial y^{2p+2}}\Big[(2p+1)(2p+2)\,l^{2p}-4(p!)^2\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k k^{2p}}{(p+k)!\,(p-k)!}\Big]\frac{2h^{2p}}{(2p+2)!}.$$

Учитывая условия (4), получаем

$$R_p(w(x,-lh))=-R_p(w(x,lh))+T_l\Big(p,h,\frac{\partial^2 w(x,0)}{\partial y^2},\ldots,\frac{\partial^{2p+2}w(x,0)}{\partial y^{2p+2}}\Big)+O(h^{2p+2}),$$
$$l=1,2,\ldots,p-1. \tag{I9}$$

Введем обозначение

$$S\Big(p,h,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\frac{\partial^{2p+2}w}{\partial y^{2p+2}}\Big)\equiv\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^{2p+2}w}{\partial y^{2p+2}}\,\frac{4h^{2p}(p!)^2}{(2p+2)!}\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k k^{2p}}{(p+k)!\,(p-k)!}.$$

С помощью формул (I8) и (I9) для аппроксимаций (I7) при $i=1,2,\ldots$ $\ldots,p$ находим следующие выражения

$$R_p(R_p(w(x,y_i)))=\frac{2}{(2p)!\,h^2}\Big[\sum_{j=1}^{p-i}[a_p(y_i-(i-j)h)-a_p(y_i-(i+j)h)]R_p(w(x,y_i-(i-j)h))+$$
$$+\sum_{j=p-i+1}^{p+i}a_p(y_i-(i-j)h)R_p(w(x,y_i-(i-j)h))\Big]+d_i^{(p,w)}(x)+O(h^{2p}), \tag{20}$$

$i=1,2,\ldots,p-1,$

$$R_p(R_p(w(x,y_p)))=\frac{2}{(2p)!h^2}\sum_{j=1}^{2p} a_p(y_p-(p-j)h)R_p(w(x,y_p-(p-j)h))+$$
$$+d_p^{(p,w)}(x)+O(h^{2p}), \tag{21}$$

где

$$d_i^{(p,w)}(x)=\frac{2}{(2p)!h^2}\Big[a_p(y_i-ih)\cdot S\Big(p,h,\frac{\partial^2 w(x,0)}{\partial y^2},\ \frac{\partial^{2p+2}w(x,0)}{\partial y^{2p+2}}\Big)+$$
$$+\sum_{j=1}^{p-i} a_p(y_i-(i+j)h)T_j\Big(p,h,\frac{\partial^2 w(x,0)}{\partial y^2},\ldots,\frac{\partial^{2p+2}w(x,0)}{\partial y^{2p+2}}\Big)\Big],\quad i=1,2,\ldots,p-1,$$

$$d_p^{(p,w)}(x)=\frac{2}{(2p)!h^2}a_p(y_p-ph)\cdot S\Big(p,h,\frac{\partial^2 w(x,0)}{\partial y^2},\ \frac{\partial^{2p+2}w(x,0)}{\partial y^{2p+2}}\Big).$$

Преобразуем теперь аппроксимации (17) для значений $i=n+1-p$, $\ldots, n$. Пользуясь формулами (12),(14), аналогичным образом выделим выражения, отличающиеся от $R_p(R_p(w(x,y_i)))$, $i=n+1-p,\ldots,n$ на величину $O(h^{2p})$ и не содержащие значений $R_p(w(x,b+lh))$, $l=0,1,\ldots,p-1$. Непосредственно из формулы (12) имеем

$$R_p(w(x,b))=S\Big(p,h,\frac{\partial^2 w(x,b)}{\partial y^2},\ \frac{\partial^{2p+2}w(x,b)}{\partial y^{2p+2}}\Big)+O(h^{2p+2}). \tag{22}$$

Пользуясь формулами (12),(14) и принимая во внимание условия (4), находим

$$R_p(w(x,b+lh))=R_p(w(x,b-lh))+T_l\Big(p,h,\frac{\partial^2 w(x,b)}{\partial y^2},\ldots,\frac{\partial^{2p+2}w(x,b)}{\partial y^{2p+2}}\Big)+O(h^{2p+2}). \tag{23}$$

На основании формул (22),(23) получаем

$$R_p(R_p(w(x,y_{n+1-p})))=\frac{2}{(2p)!h^2}\sum_{j=1}^{2p} a_p(y_{n+1-p}+(p-j)h)R_p(w(x,y_{n+1-p}+(p-j)h))+$$
$$+d_{n+1-p}^{(p,w)}(x)+O(h^{2p}), \tag{24}$$

$$R_p(R_p(w(x,y_i)))=\frac{2}{(2p)!h^2}\Big[\sum_{j=1}^{p+i-n-1}[a_p(y_i+(n+1-i-j)h)-$$

$$-a_p(y_i+(n+1-i+j)h)]R_p(w(x,y_i+(n+1-i-j)h))+$$

$$+\sum_{j=p+i-n}^{p+n+1-i} a_p(y_i+(n+1-i-j)h)R_p(w(x,y_i+(n+1-i-j)h))\Big]+d_i^{(p,w)}(x)+O(h^{2p}), \tag{25}$$

$$i=n+2-p,\ldots,n,$$

где

$$d_{n+1-p}^{(p,w)}(x)=\frac{2}{(2p)!h^2}a_p(y_{n+1-p}+ph)\cdot S\Big(p,h,\frac{\partial^2 w(x,b)}{\partial y^2},\frac{\partial^{2p+2}w(x,b)}{\partial y^{2p+2}}\Big),$$

$$d_i^{(p,w)}(x)=\frac{2}{(2p)!h^2}\Big[a_p(y_i+(n+1-i)h)\cdot S\Big(p,h,\frac{\partial^2 w(x,b)}{\partial y^2},\frac{\partial^{2p+2}w(x,b)}{\partial y^{2p+2}}\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{p+i-n-1} a_p(y_i+(n+1-i+j)h)T_j\Big(p,h,\frac{\partial^2 w(x,b)}{\partial y^2},\ldots,\frac{\partial^{2p+2}w(x,b)}{\partial y^{2p+2}}\Big)\Big],$$

$$i=n+2-p,\ldots,n.$$

Заметим, что все производные четного порядка от $w(x,y)$ по y в точках $y=0$ и $y=b$ можно определить, дифференцируя последовательно дважды по y уравнение (I) и используя граничные условия (2).

Из равенств (I7),(20),(2I),(24),(25) следуют соотношения

$$R_p(R_p(w(x,y_i)))=\frac{2}{(2p)!h^2}\{A_{2p+1}R_p^{(w)}(x)\}_i+d_i^{(p,w)}(x)+h^{2p}e_i^{(p,w)}(x), \tag{26}$$

$$i=1,2,\ldots,p,\ n+1-p,\ldots,n,$$

$$R_p(R_p(w(x,y_i)))=\frac{2}{(2p)!h^2}\{A_{2p+1}R_p^{(w)}(x)\}_i,\quad i=p+1,\ldots,n-p, \tag{27}$$

где A_{2p+1} – матрица порядка n с элементами

$$\{A_{2p+1}\}_{i,j}=\begin{cases} a_p(y_i-(i-j)h)-a_p(y_i-(i+j)h), & 1\le i<p,\ 1\le j\le p-i,\\ a_p(y_i-(i-j)h), & 1\le i<p,\ p-i<j\le p+i,\\ 0, & 1\le i<p,\ p+i<j\le n,\end{cases} \tag{28}$$

$$\left\{A_{2p+1}\right\}_{i,j}=\begin{cases} a_p(y_i-(i-j)h), & p\leqslant i\leqslant E\left(\frac{n}{2}\right)+1,\ |i-j|\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant n,\\ 0, & p\leqslant i\leqslant E\left(\frac{n}{2}\right)+1,\ |i-j|>p,\ 1\leqslant j\leqslant n, \end{cases} \tag{28'}$$

$$\left\{A_{2p+1}\right\}_{i,j}=\left\{A_{2p+1}\right\}_{n+1-i,n+1-j}; \tag{28''}$$

$$R_p^{(w)}(x)=\left(R_p(w(x,y_1)),\ldots,R_p(w(x,y_n))\right)';$$

$e_i^{(p,w)}(x)$, $i=1,2,\ldots,p,\ n+1-p,\ldots,n$ – функции, ограниченные равномерно по $x\in[-a,a]$ при $h\to 0$.

Входящие в равенства (26),(27) компоненты вектора $R_p^{(w)}(x)$ — $R_p(w(x,y_i))$, $i=1,2,\ldots,p-1,\ n+2-p,\ldots,n$ содержат значения $w(x,y_k)$, $k=-1,-2,\ldots,-(p-1),\ n+2,\ldots,n+p$. Исключим последние из рассмотрения, пользуясь формулами (I5),(I6). Имеем

$$R_p(w(x,y_i))=\frac{2}{(2p)!h^2}\Big[\sum_{j=1}^{p-i}\left[a_p(y_i-(i-j)h)-a_p(y_i-(i+j)h)\right]w(x,y_i-(i-j)h)+$$

$$+\sum_{j=p-i+1}^{p+i}a_p(y_i-(i-j)h)\,w(x,y_i-(i-j)h)\Big]+d_i^{(p,w,\gamma)}(x)+O(h^{2(p+\gamma)}),$$

$$i=1,2,\ldots,p-1,\quad \gamma=0,1,$$

$$R_p(w(x,y_p))=\frac{2}{(2p)!h^2}\sum_{j=1}^{2p}a_p(y_p-(p-j)h)\cdot w(x,y_p-(p-j)h)+d_p^{(p,w,\gamma)}(x),$$

$$R_p(w(x,y_{n+1-p}))=\frac{2}{(2p)!h^2}\sum_{j=1}^{2p}a_p(y_{n+1-p}+(p-j)h)\cdot w(x,y_{n+1-p}+(p-j)h)+d_{n+1-p}^{(p,w,\gamma)}(x),$$

$$R_p(w(x,y_i))=\frac{2}{(2p)!h^2}\Big[\sum_{j=1}^{p+i-n-1}\left[a_p(y_i+(n+1-i-j)h)-\right.$$

$$\left.-a_p(y_i+(n+1-i+j)h)\right]\cdot w(x,y_i+(n+1-i-j)h)+$$

$$+\sum_{j=p+i-n}^{p+n+1-i} a_p(y_i+(n+1-i-j)h)\cdot w(x,y_i+(n+1-i-j)h)\Big]+d_i^{(p,w,\gamma)}(x)+O(h^{2(p+\gamma)}),$$

$$i=n+2-p,\ldots,n,\quad \gamma=0,1,$$

где

$$d_i^{(p,w,\gamma)}(x)=\frac{2}{(2p)!h^2}\Big[2\sum_{j=1}^{p-i}a_p(y_i-(i+j)h)\sum_{k=0}^{p+\gamma}\frac{\partial^{2k}w(x,0)}{\partial y^{2k}}\frac{(jh)^{2k}}{(2k)!}+a_p(y_i-ih)w(x,0)\Big],$$

$$i=1,2,\ldots,p-1,$$

$$d_p^{(p,w,\gamma)}(x)=\frac{2}{(2p)!h^2}a_p(y_p-ph)\cdot w(x,0),$$

$$d_{n+1-p}^{(p,w,\gamma)}(x)=\frac{2}{(2p)!h^2}a_p(y_{n+1-p}+ph)\cdot w(x,b),$$

$$d_i^{(p,w,\gamma)}(x)=\frac{2}{(2p)!h^2}\Big[2\sum_{j=1}^{p+i-n-1}a_p(y_i+(n+1-i+j)h)\sum_{k=0}^{p+\gamma}\frac{\partial^{2k}w(x,b)}{\partial y^{2k}}\frac{(jh)^{2k}}{(2k)!}+$$

$$+a_p(y_i+(n+1-i)h)\cdot w(x,b)\Big],\quad i=n+2-p,\ldots,n.$$

Принимая во внимание равенство (6), получаем

$$R_p^{(w)}(x)=\frac{2}{(2p)!h^2}A_{2p+1}W+d^{(p,w,\gamma)}(x)+h^{2(p+\gamma)}e^{(p,w,\gamma)}(x),\quad \gamma=0,1, \tag{29}$$

где $W=(w(x,y_1),\ldots,w(x,y_n))'$,

$$d^{(p,w,\gamma)}(x)=(d_1^{(p,w,\gamma)}(x),\ldots,d_p^{(p,w,\gamma)}(x),0,\ldots,0,d_{n+1-p}^{(p,w,\gamma)}(x),\ldots,d_n^{(p,w,\gamma)}(x))',$$

$$e^{(p,w,\gamma)}(x)=(e_1^{(p,w,\gamma)}(x),\ldots,e_{p-1}^{(p,w,\gamma)}(x),0,\ldots,0,e_{n+2-p}^{(p,w,\gamma)}(x),\ldots,e_n^{(p,w,\gamma)}(x))',$$

($\gamma=0,1$) – n -мерные вектор-функции. Функции $e_\tau^{(p,w,\gamma)}(x)$, $\tau=1,2,\ldots,p-1,n+2-p,\ldots,n$, $\gamma=0,1$ ограничены равномерно по $x\in[-a,a]$ при $h\to 0$.

Подставляя выражение (29) с $\gamma=1$ в равенства (26), (27), находим

$$(R_p(R_p(w(x,y_1))),\ R_p(R_p(w(x,y_2))),\ \dots,\ R_p(R_p(w(x,y_n))))' =$$

$$= \frac{4}{[(2p)!]^2 h^4} A^2_{2p+1} W + \frac{2}{(2p)!\, h^2} A_{2p+1} d^{(p,w,1)}(x) + d^{(p,w)}(x) + h^{2p}\left(e^{(p,w)}(x) + \frac{2}{(2p)!} A_{2p+1} e^{(p,w,1)}(x)\right), \tag{30}$$

где

$$d^{(p,w)}(x) = (d_1^{(p,w)}(x), \dots, d_p^{(p,w)}(x), 0, \dots, 0, d_{n+1-p}^{(p,w)}(x), \dots, d_n^{(p,w)}(x))',$$

$$e^{(p,w)}(x) = (e_1^{(p,w)}(x), \dots, e_p^{(p,w)}(x), 0, \dots, 0, e_{n+1-p}^{(p,w)}(x), \dots, e_n^{(p,w)}(x))' -$$

– n -мерные вектор-функции.

Подставляя далее в уравнение (I) решение краевой задачи (I), (2),(3) – $w(x,y)$, и заменяя на прямых $y_i = ih$, $i = 1,2,\dots,n$ производные $\frac{\partial^2 w_{xx}(x,y_i)}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^4 w(x,y_i)}{\partial y^4}$ по формулам (5),(II) с учетом формулы (29) для $R_p^{(w_{xx})}(x)$ с $\gamma = 0$ и формулы (30) получаем следующее равенство

$$\mathfrak{D}_1 \frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{4\mathfrak{D}_2}{(2p)!\, h^2} A_{2p+1} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{4\mathfrak{D}_3}{[(2p)!]^2 h^4} A^2_{2p+1} W = F(x) + h^{2p} \zeta^{(p,w)}(x), \tag{31}$$

где

$$F(x) = (f(x,y_1), f(x,y_2), \dots, f(x,y_n))' - 2\mathfrak{D}_2\, d^{(p,w_{xx},0)}(x) - \mathfrak{D}_3\left(\frac{2}{(2p)!\, h^2} A_{2p+1} d^{(p,w,1)}(x) + d^{(p,w)}(x)\right),$$

$$\zeta^{(p,w)}(x) = -2\mathfrak{D}_2\left(e^{(p,w_{xx},0)}(x) + \theta^{(p,w_{xx})}(x)\right) - \mathfrak{D}_3\left(e^{(p,w)}(x) + \frac{2}{(2p)!} A_{2p+1} e^{(p,w,1)}(x) + \vartheta^{(p,w)}(x)\right),$$

причем

$$\theta^{(p,w_{xx})}(x) = (\theta_1^{(p,w_{xx})}(x), \theta_2^{(p,w_{xx})}(x), \dots, \theta_n^{(p,w_{xx})}(x))', \quad \vartheta^{(p,w)}(x) = (\vartheta_1^{(p,w)}(x), \vartheta_2^{(p,w)}(x), \dots, \vartheta_n^{(p,w)}(x))'.$$

Положим

$$BW = V \equiv (v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x))',$$

где B — симметричная ортогональная матрица порядка n с элементами $b_{ks}=(-1)^{k+s}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\frac{\pi ks}{n+1}$. Матрица A_{2p+1} является матричным полиномом от $A_3 - \mathcal{P}_p(A_3)$ (см. [3]), откуда следует, что

$$BA_{2p+1}B=[\mathcal{P}_p(\lambda_1^{(n)}),\ldots,\mathcal{P}_p(\lambda_n^{(n)})],\quad BA_{2p+1}^2B=[\mathcal{P}_p^2(\lambda_1^{(n)}),\ldots,\mathcal{P}_p^2(\lambda_n^{(n)})], \tag{32}$$

причем $\lambda_i^{(n)}=-2\left(1+\cos\frac{\pi i}{n+1}\right)$, $i=1,2,\ldots,n$ — собственные числа матрицы A_3 (см. [5], [6]). Таким образом, умножая равенство (31) слева на матрицу B и учитывая соотношения (32), получим следующую совокупность равенств

$$\mathcal{D}_1\frac{d^4v_i}{dx^4}+\frac{4\mathcal{D}_2}{(2p)!\,h^2}\mathcal{P}_p(\lambda_i^{(n)})\frac{d^2v_i}{dx^2}+\frac{4\mathcal{D}_3}{[(2p)!]^2h^4}\mathcal{P}_p^2(\lambda_i^{(n)})v_i=$$
$$=\{BF(x)\}_i+h^{2p}\{B\zeta^{(p,w)}(x)\}_i,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{33}$$

Теперь промежуток $[-a,a]$ разобьем на n_1+1 частей сеткой равноотстоящих с шагом h_1 $\left(h_1=\frac{2a}{n_1+1}\right)$ точек $x_m=mh_1$, $m=1,2,\ldots,n_1$. В каждом i-ом равенстве совокупности (33) заменим значения производных $\frac{d^2v_i}{dx^2}$, $\frac{d^4v_i}{dx^4}$ в точках x_m, $m=1,2,\ldots,n_1$, по формулам аналогичным (5) и (II)

$$\frac{d^2v_i(x_m)}{dx^2}=R_{p_1+1}(v_i(x_m))+h_1^{2p_1+2}\,\theta_m^{(p_1+1,v_i)}, \tag{34}$$

$$\frac{d^4v_i(x_m)}{dx^4}=R_{p_1}(R_{p_1}(v_i(x_m)))+h_1^{2p_1}\vartheta_m^{(p_1,v_i)},\quad m=1,2,\ldots,n_1. \tag{35}$$

Пользуясь для векторов $R_{p_1+1}^{(v_i)}=(R_{p_1+1}(v_i(x_1)),R_{p_1+1}(v_i(x_2)),\ldots$ $\ldots,R_{p_1+1}(v_i(x_{n_1})))'$ и $(R_{p_1}(R_{p_1}(v_i(x_1))),\ R_{p_1}(R_{p_1}(v_i(x_2))),\ldots$ $\ldots,R_{p_1}(R_{p_1}(v_i(x_{n_1}))))'$ выражениями аналогичными соответственно (29) с $\gamma=0$ и (30), исключим из формул (34), (35) для $m=1,2,\ldots$ $\ldots,2p_1-1,n_1+2-2p_1,\ldots,n_1$ значения $v_i(x_k)$, $k=-1,\ldots,-2p_1+1$, $n_1+2,\ldots,n_1+2p_1$. Подставляя получаемый при этом результат в равенства (33) находим

$$M_iV_i=F_i+h^{2p}\zeta_i^{(p,w)}+h_1^{2p_1}\zeta_1^{(p_1,v_i)}+h^{-2}h_1^{2p_1+2}\zeta_2^{(p,p_1,v_i)},\ i=1,2,\ldots,n, \tag{36}$$

где

$$M_i=4\left(\frac{\mathcal{D}_1}{[(2p)!]^2h_1^4}A_{2p_1+1}^2+\frac{2\mathcal{D}_2}{(2p)!\,(2p_1+2)!\,h^2h_1^2}\mathcal{P}_p(\lambda_i^{(n)})A_{2p_1+3}+\frac{\mathcal{D}_3}{[(2p)!]^2h^4}\mathcal{P}_p^2(\lambda_i^{(n)})E\right),$$

A_{2p_1+1} и A_{2p_1+3} — матрицы порядка n_1, с элементами определяемыми формулами (28)-(28″) для p_1 и p_1+1,

$$V_i=(v_i(x_1), v_i(x_2), \dots, v_i(x_{n_1}))',$$

$$F_i=(\{BF(x_1)\}_i, \{BF(x_2)\}_i, \dots, \{BF(x_{n_1})\}_i)' -$$

$$-\mathcal{D}_1\left(\frac{2}{(2p_1)!\,h_1^2}A_{2p_1+1}d^{(p_1,v_i,1)}+d^{(p_1,v_i)}\right)-\frac{4\mathcal{D}_2}{(2p)!\,h^2}\mathcal{P}_p(\lambda_i^{(n)})\,d^{(p_1+1,v_i,0)},$$

причем

$$d^{(p_1,v_i)}\equiv(d_1^{(p_1,v_i)}, d_2^{(p_1,v_i)}, \dots, d_{n_1}^{(p_1,v_i)})',$$

$$d^{(p_1+1-\gamma,v_i,\gamma)}\equiv(d_1^{(p_1+1-\gamma,v_i,\gamma)}, d_2^{(p_1+1-\gamma,v_i,\gamma)}, \dots, d_{n_1}^{(p_1+1-\gamma,v_i,\gamma)})', \quad \gamma=0,1,$$

при

$$d_m^{(p_1,v_i)}=\frac{2}{(2p_1)!\,h_1^2}\Big[a_{p_1}(y_m-mh_1)S\Big(p_1,h_1,\frac{d^2v_i(-a)}{dx^2}, \frac{d^{2p_1+2}v_i(-a)}{dx^{2p_1+2}}\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{p_1-m}a_{p_1}(y_m-(m+j)h_1)\,T_j\Big(p_1,h_1,\frac{d^2v_i(-a)}{dx^2},\dots,\frac{d^{2p_1+2}v_i(-a)}{dx^{2p_1+2}}\Big)\Big],\quad m=1,2,\dots,p_1-1,$$

$$d_{p_1}^{(p_1,v_i)}=\frac{2}{(2p_1)!\,h_1^2}a_{p_1}(y_{p_1}-p_1h_1)\cdot S\Big(p_1,h_1,\frac{d^2v_i(-a)}{dx^2},\frac{d^{2p_1+2}v_i(-a)}{dx^{2p_1+2}}\Big),$$

$$d_m^{(p_1,v_i)}=0,\quad m=p_1+1,\dots,n_1-p_1,$$

$$d_{n_1+1-p_1}^{(p_1,v_i)}=\frac{2}{(2p_1)!\,h_1^2}a_{p_1}(y_{n_1+1-p_1}+p_1h_1)\cdot S\Big(p_1,h_1,\frac{d^2v_i(a)}{dx^2},\frac{d^{2p_1+2}v_i(a)}{dx^{2p_1+2}}\Big),$$

$$d_m^{(p_1,v_i)}=\frac{2}{(2p_1)!\,h_1^2}\Big[a_{p_1}(y_m+(n_1+1-m)h_1)\,S\Big(p_1,h_1,\frac{d^2v_i(a)}{dx^2},\frac{d^{2p_1+2}v_i(a)}{dx^{2p_1+2}}\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{p_1+m-n_1-1}a_{p_1}(y_m+(n_1+1-m+j)h_1)\,T_j\Big(p_1,h_1,\frac{d^2v_i(a)}{dx^2},\dots,\frac{d^{2p_1+2}v_i(a)}{dx^{2p_1+2}}\Big)\Big],$$

$$m=n_1+2-p_1,\dots,n_1.$$

$$d_m^{(p_1+1-\gamma,\nu_i,\gamma)}=\frac{2}{[2(p_1+1-\gamma)]!h_1^2}\Big(2\sum_{j=1}^{p_1+1-\gamma-m}a_{p_1+1-\gamma}(y_m-(m+j)h_1)\sum_{k=0}^{p_1+1}\frac{d^{2k}v_i(-a)}{dx^{2k}}\frac{(jh_1)^{2k}}{(2k)!}+$$

$$+a_{p_1+1-\gamma}(y_m-mh_1)v_i(-a)\Big),\quad m=1,2,\dots,p_1-\gamma,$$

$$d_{p_1-\gamma+1}^{(p_1+1-\gamma,\nu_i,\gamma)}=\frac{2}{[2(p_1+1-\gamma)]!h_1^2}a_{p_1+1-\gamma}(y_{p_1-\gamma+1}-(p_1-\gamma+1)h_1)v_i(-a),$$

$$d_m^{(p_1+1-\gamma,\nu_i,\gamma)}=0,\quad m=p_1-\gamma+2,\dots,n_1-p_1-1+\gamma,$$

$$d_{n_1-p_1+\gamma}^{(p_1+1-\gamma,\nu_i,\gamma)}=\frac{2}{[2(p_1+1-\gamma)]!h_1^2}a_{p_1+1-\gamma}(y_{n_1-p_1+\gamma}+(p_1+1-\gamma)h_1)v_i(a),$$

$$d_m^{(p_1+1-\gamma,\nu_i,\gamma)}=\frac{2}{[2(p_1+1-\gamma)]!h_1^2}\Big(2\sum_{j=1}^{p_1+m-n_1-\gamma}a_{p_1+1-\gamma}(y_m+(n_1+1-m+j)h_1)\sum_{k=0}^{p_1+1}\frac{d^{2k}v_i(a)}{dx^{2k}}\frac{(jh_1)^{2k}}{(2k)!}+$$

$$+a_{p_1+1-\gamma}(y_m+(n_1+1-m)h_1)v_i(a)\Big),\quad m=n_1-p_1+1+\gamma,\dots,n_1,$$

а

$$\zeta_i^{(p,w)}=\Big(\{B\zeta^{(p,w)}(x_1)\}_i,\{B\zeta^{(p,w)}(x_2)\}_i,\dots,\{B\zeta^{(p,w)}(x_{n_1})\}_i\Big)',$$

$$\zeta_1^{(p_1,\nu_i)}=-\mathcal{D}_1\Big(e^{(p_1,\nu_i)}+\frac{2}{(2p_1)!}A_{2p_1+1}e^{(p_1,\nu_i,1)}+\vartheta^{(p_1,\nu_i)}\Big),$$

$$\zeta_2^{(p,p_1,\nu_i)}=-\frac{4\mathcal{D}_2}{(2p)!}\mathcal{P}_p(\lambda_i^{(n)})\Big(e^{(p_1+1,\nu_i,0)}+\theta^{(p_1+1,\nu_i)}\Big),$$

причем

$$\vartheta^{(p_1,\nu_i)}=(\vartheta_1^{(p_1,\nu_i)},\vartheta_2^{(p_1,\nu_i)},\dots,\vartheta_{n_1}^{(p_1,\nu_i)})',$$

$$\theta^{(p_1+1,\nu_i)}=(\theta_1^{(p_1+1,\nu_i)},\theta_2^{(p_1+1,\nu_i)},\dots,\theta_{n_1}^{(p_1+1,\nu_i)})',$$

величины же

$$e^{(p_1+1-\gamma,v_i,\gamma)}=\left(e_1^{(p_1+1-\gamma,v_i,\gamma)},\ldots,e_{p_1-1}^{(p_1+1-\gamma,v_i,\gamma)},0,\ldots,0,e_{n_1+2-p_1}^{(p_1+1-\gamma,v_i,\gamma)},\ldots,e_{n_1}^{(p_1+1-\gamma,v_i,\gamma)}\right)',$$

$$\gamma=0,1,$$

$$e^{(p_1,v_i)}=\left(e_1^{(p_1,v_i)},\ldots,e_{p_1}^{(p_1,v_i)},0,\ldots,0,e_{n_1+1-p_1}^{(p_1,v_i)},\ldots,e_{n_1}^{(p_1,v_i)}\right)'$$

суть n_1 - мерные векторы, входящие соответственно в коэффициенты при $h_1^{2p_1+2}$ и $h_1^{2p_1}$ в остаточных членах формул вида (29) для $R_{p_1+1}^{(v_i)}$ и (30) для $\left(R_{p_1}(R_{p_1}(v_i(x_1))),\ R_{p_1}(R_{p_1}(v_i(x_2))),\ldots,R_{p_1}(R_{p_1}(v_i(x_{n_1})))\right)'$.

Производные $\dfrac{d^{2\tau}v_i(\pm a)}{dx^{2\tau}}$, $\tau=1,2,\ldots,p_1+1$, входящие в написанные выше формулы, можно определить дифференцируя последовательно дважды по x уравнение (I) и используя граничные условия (3).

Краевой задаче (I),(2),(3) соотнесем аппроксимирующую задачу решения системы линейных алгебраических уравнений

$$M_i\omega_i=F_i,\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{37}$$

где

$\omega_i=(\omega_{1i},\omega_{2i},\ldots,\omega_{n_1i})',\quad i=1,2,\ldots,n$ - неизвестные векторы.

Преобразуем систему уравнений (37) в распадающуюся. Сделаем замену переменных $B_1\omega_i=u_i=(u_{1i},u_{2i},\ldots,u_{n_1i})'$, где B_1 - симметричная ортогональная матрица порядка n_1, с элементами $b_{ks}^{(1)}=(-1)^{k+s}\sqrt{\dfrac{2}{n_1+1}}\sin\dfrac{\pi ks}{n_1+1}$. Умножая каждое i -ое векторное равенство системы (37) на матрицу B_1, получаем для u_{mi}, как и в [7], распадающуюся систему уравнений

$$K_{mi}u_{mi}=\{B_1F_i\}_m,\quad m=1,2,\ldots,n_1,\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{38}$$

где

$$K_{mi}=4\left(\frac{\mathcal{D}_1}{[(2p_1)!]^2h_1^4}\mathcal{P}_{p_1}^2(\lambda_m^{(n_1)})+\frac{2\mathcal{D}_2}{(2p)!(2p_1+2)!\,h^2h_1^2}\mathcal{P}_p(\lambda_i^{(n)})\mathcal{P}_{p_1+1}(\lambda_m^{(n_1)})+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathcal{D}_3}{[(2p)!]^2h^4}\mathcal{P}_p^2(\lambda_i^{(n)})\right)>0,\quad \lambda_m^{(n_1)}=-2\left(1+\cos\frac{\pi m}{n_1+1}\right),\quad m=1,2,\ldots,n_1 -$$

- собственные числа матрицы A_3 порядка n_1, из которой находим

$$u_{mi}=\frac{\{B_1F_i\}_m}{K_{mi}},\quad m=1,2,\dots,n_1,\quad i=1,2,\dots,n. \tag{39}$$

3^0. Оценим отклонение в узлах ($x_m,\ y_i$) значений точного решения краевой задачи (I),(2),(3) – $W(x_m,y_i)$, от значений $W_{mi}\equiv\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\omega_{mk}$ – приближенного решения, получаемого методом сеток. Имеем

$$M_i(V_i-\omega_i)=h^{2p}\zeta_i^{(p,w)}+h_1^{2p_1}\zeta_1^{(p_1,v_i)}+h^{-2}h_1^{2p_1+2}\zeta_2^{(p,p_1,v_i)}.$$

Отсюда следует

$$V_i-\omega_i=B_1[K_{1i},K_{2i},\dots,K_{n_1i}]^{-1}B_1(h^{2p}\zeta_i^{(p,w)}+h_1^{2p_1}\zeta_1^{(p_1,v_i)}+h^{-2}h_1^{2p_1+2}\zeta_2^{(p,p_1,v_i)}).$$

Условимся в качестве норм вектора $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\tau)'$ и матрицы $A=\{a_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu=1}^{\tau}$ рассматривать величины $\|\alpha\|=$ $=\max\limits_{1\leq k\leq\tau}|\alpha_k|$, $\|A\|=\max\limits_{1\leq\mu\leq\tau}\sum\limits_{\nu=1}^{\tau}|a_{\mu\nu}|$. Такие нормы согласованы (см. [8]).

Принимая во внимание, что $\|\zeta_i^{(p,w)}\|<\|B\|\max\limits_{-a<x<a}\|\zeta^{(p,w)}(x)\|$ и $V=BW$, получаем

$$\max_{\substack{1\leq i\leq n\\ n\geq 1,\,n_1\geq 1}}\|\zeta_i^{(p,w)}\|\leq\|B\|\cdot L_1,\qquad \max_{\substack{1\leq i\leq n\\ n\geq 1,\,n_1\geq 1}}\|\zeta_1^{(p_1,v_i)}\|\leq\|B\|\cdot L_2,$$

$$\max_{\substack{1\leq i\leq n\\ n\geq 1,\,n_1\geq 1}}\|\zeta_2^{(p,p_1,v_i)}\|<\|B\|L_3,$$

причем величины $L_1,\ L_2,\ L_3$ не зависят от h и h_1. Таким образом,

$$\|V_i-\omega_i\|\leq\frac{\|B\|\cdot\|B_1\|^2}{\min\limits_{1\leq m\leq n_1}K_{mi}}\left(h^{2p}L_1+h_1^{2p_1}\cdot L_2+h^{-2}h_1^{2p_1+2}\cdot L_3\right). \tag{40}$$

Оценим снизу $\min\limits_{\substack{1\leq m\leq n_1\\ 1\leq i\leq n}}K_{mi}$. Имеем $|\lambda_m^{(n_1)}|>|\lambda_{n_1}^{(n_1)}|$, $m=1,2,\dots$ $\dots,n_1-1$, $|\lambda_i^{(n)}|>|\lambda_n^{(n)}|$, $i=1,2,\dots,n-1$, то есть $K_{mi}\geq K_{n_1n}$, $m=1,2,\dots,n_1$, $i=1,2,\dots,n$. Учитывая, что $\mathcal{P}_p(\lambda_n^{(n)})=$ $=-\frac{(2p)!}{2}\frac{\pi^2h^2}{b^2}+O(h^4)$, $\mathcal{P}_{p_1}(\lambda_{n_1}^{(n_1)})=-\frac{(2p_1)!}{2}\frac{\pi^2h_1^2}{4a^2}+O(h_1^4)$, $\mathcal{P}_{p_1+1}(\lambda_{n_1}^{(n_1)})=$

$$= -\frac{(2p_1+2)!}{2}\,\frac{\pi^2 h_1^2}{4a^2} + O(h_1^4)$$, находим

$$K_{n_1 n} = \pi^4\left(\frac{\mathcal{D}_1}{16a^4} + \frac{\mathcal{D}_2}{2a^2 b^2} + \frac{\mathcal{D}_3}{b^4}\right) + O(h^2) + O(h_1^2) + O(h^2\cdot h_1^2).$$

Отсюда следует, что при достаточно малых h и h_1 выполняется соотношение

$$K_{mi} > \varkappa = \mathrm{const} > 0. \tag{41}$$

Принимая во внимание (40),(41), а также, что

$$\max_{\substack{1\le m\le n_1\\ 1\le i\le n}} |w(x_m,y_i) - W_{mi}| = \max_{\substack{1\le m\le n_1\\ 1\le i\le n}} \left|\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(V_k(x_m) - \omega_{mk})\right| \le$$

$$\le \|B\| \max_{1\le i\le n} \|V_i - \omega_i\|,$$

$$\|B\| < \sqrt{\frac{2b}{h}}, \quad \|B_1\| < \sqrt{\frac{4a}{h_1}},$$ получаем

$$\max_{\substack{1\le m\le n_1\\ 1\le i\le n}} |w(x_m,y_i) - W_{mi}| < \frac{8ab}{\varkappa}\Big(h^{2p-1} h_1^{-1} L_1 + h^{-1} h_1^{2p_1-1} L_2 + \\ + h^{-3} h_1^{2p_1+1} L_3\Big). \tag{42}$$

Справедлива

ТЕОРЕМА. При выполнении условий (4) модуль разности между точным решением краевой задачи (I),(2),(3) и решением конечно-разностной аппроксимирующей задачи удовлетворяет неравенству (42). В частности, когда h и h_1 суть малые одного порядка, решение аппроксимирующей задачи при $h \to 0$ равномерно сходится к решению задачи (I),(2),(3) с порядком $h^{2(\min(p,p_1)-1)}$.

Заметим, что несложно построить многоточечную конечно-разностную схему и получить оценку вида (42) для краевой задачи рассмотренной в [9].

Литература

I. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.-Л., Гостехиздат, 1947, 355 с.

2. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Изд.5-е, М.-Л., Физматгиз, 1962, 708 с.

3. Кубанская А.П. Об одном матричном равенстве. - Зап. науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1976,58, с.47-53.

4. Ф и х т е н г о л ь ц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.П. М.-Л., Гостехиздат, 1948, 373 с.
5. Ф а д д е е в а В.Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1949, 28, с.73-103.
6. Ф а д д е е в Д.К., Ф а д д е е в а В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960, 656 с.
7. Б а д а л о в Ф. Применение метода прямых к численному решению некоторых задач теории упругости. Автореферат дисс.кандидата физ.-мат.наук. Ташкент, 1967, 15 с.
8. Л о з и н с к и й С.М. Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - Изв.высш. учебн.заведений. Математика, 1958, № 5, с.52-90.
9. К у б а н с к а я А.П. О применении многоточечной дифференциально-разностной схемы к одной краевой задаче. - Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1977, 70, с.76-88.