Известия вузов. Математика
2015, № 1, с. 14–28

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.А. ГОРШКОВ, М.И. СУМИН

УСТОЙЧИВЫЙ ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА В СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В РАВНОМЕРНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Аннотация. Рассматривается задача выпуклого программирования в рефлексивном пространстве с операторным ограничением-равенством и конечным числом функциональных ограничений-неравенств. Для указанной задачи доказывается устойчивый к ошибкам исходных данных принцип Лагранжа в секвенциальной недифференциальной форме. Показывается, что применение секвенциального подхода в совокупности с двойственной регуляризацией существенно расширяет класс оптимизационных задач, которые могут непосредственно и устойчиво решаться на основе классической конструкции функции Лагранжа. Обсуждается возможность его применимости при решении неустойчивых оптимизационных задач.

Ключевые слова: выпуклое программирование, секвенциальная оптимизация, принцип Лагранжа, устойчивость, двойственность, регуляризация, оптимальное граничное управление.

УДК: 519.85 : 517.97

Введение

Хорошо известно, что задачам оптимизации и, в частности, условной оптимизации, характерны различные проявления некорректности (например, [1]). Некорректность возникает уже в самых “простых”, на первый взгляд, задачах и выражается в фактах несуществования классических решений как прямых, так и двойственных к ним задач, неустойчивости этих решений в зависимости от возмущений исходных данных. Последняя влечет и “неустойчивость” классических условий оптимальности, заключающуюся в выделении ими сколь угодно далеких “возмущенных” оптимальных элементов от их “невозмущенных” аналогов при сколь угодно малых возмущениях исходных данных задач. В случае достаточно сложных реальных задач, требующих для своего решения применения приближенных методов и использования компьютерных вычислений, указанные проблемы несуществования, неустойчивости являются центральными, требующими их обязательного учета. Сказанное выше в полной мере относится как к самой рассматриваемой ниже задаче выпуклого программирования, так и к классическим для нее условиям оптимальности — принципу Лагранжа,

Поступила 26.06.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов №№ 12-01-00199-а, 13-07-97028-р_поволжье_а, 13-02-12155-офи_м), Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (шифр заявки 1727), а также при поддержке гранта в рамках соглашения от 28 августа 2013 г. № 02.B.49.21.0003 между Минстерством образования и науки Российской Федерации и Нижегородским государственным университетом им. Н.И. Лобачевского.

принимающему в случае регулярности задачи на условный экстремум вид теоремы Куна–Таккера [1]–[4]. Приведем простейший пример неустойчивости задачи выпуклого программирования.

Пример 0.1. Рассмотрим задачу минимизации

$$|x|^2 \to \min, \quad Ax \le b, \quad x \in D \subset R^2, \quad A \equiv \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $D \equiv \{x \in R^2 : |x_1| \le 1,\ |x_2| \le 1\}$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что эта задача является регулярной, к ней применима классическая теорема Куна–Таккера и ее решением является вектор $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$. Далее обратимся к проверяемой таким же образом возмущенной регулярной задаче

$$|x|^2 \to \min, \quad A^\delta x \le b^\delta, \quad x \in D \subset R^2, \quad A^\delta \equiv \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad b^\delta \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ -\delta^2 \end{pmatrix}.$$

Ее решением является вектор $(\frac{1+\delta}{2}, -\delta)$, который при $\delta \to 0$ стремится к точке $(\frac{1}{2}, 0)$, отличной от решения исходной задачи.

Итак, в данном простейшем примере как исходная, так и возмущенная задачи являются регулярными, однако решение задачи ведет себя неустойчиво по отношению к ошибкам исходных данных. Естественно, одновременно, эти решения ведут себя неустойчиво и как элементы, определяемые в силу классической теоремы Куна–Таккера. Заметим, что в общей ситуации задача выпуклого программирования может и не обладать вектором Куна–Таккера, т. е. может быть неразрешимой соответствующая двойственная задача. Более того, можно утверждать, что установление факта наличия вектора Куна–Таккера в задаче выпуклого программирования представляет нелегкую задачу. Различные примеры, иллюстрирующие все эти обстоятельства, можно найти в [5]–[8].

В работах [7], [8] с целью преодоления проблем, связанных с указанными выше особенностями классических условий оптимальности и, в частности, теоремы Куна–Таккера, было предложено рассматривать так называемую регуляризованную, т. е. устойчивую секвенциальную теорему Куна–Таккера в задаче выпуклого программирования в гильбертовом пространстве, оператор ограничений в которой действует также в гильбертово пространство. Одновременно в [8] было рассмотрено приложение устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера для решения задач оптимального управления и обратных задач в гильбертовом пространстве. В основе доказательства устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера лежит метод двойственной регуляризации (например, [5]–[8]). Эта теорема формулируется в терминах минимизирующих приближенных решений в смысле Дж. Варги ([9], раздел III.2, с. 276). В отличие от классической теоремы Куна–Таккера она является устойчивой по отношению к ошибкам исходных данных, так как выделяемое ею минимизируюшее приближенное решение ведет себя устойчиво по отношению к этим возмущениям и, более того, при определенных естественных условиях на исходные данные задачи сильно сходится к ее решению. При этом факт существования или несуществования в исходной и возмущенной задачах векторов Куна–Таккера никоим образом не влияет на эту сходимость. Наличие или отсутствие вектора Куна–Таккера в задаче определяет лишь свойства вырабатываемой параллельно с минимизирующей последовательностью допустимых элементов максимизирующей последовательности двойственных переменных в задаче, являющейся двойственной к исходной задаче. В случае существования вектора Куна–Таккера указанная максимизирующая последовательность является ограниченной, в противном случае она не ограничена. Указанные обстоятельства делают возможным практическое решение на основе устойчивой секвенциальной теоремы Куна–Таккера широкого класса, в том числе, и

неустойчивых задач выпуклого программирования и сводящихся к ним задач оптимального управления сосредоточенными и распределенными системами, а также разнообразных некорректных обратных задач. Тем самым, применение секвенциального подхода в совокупности с идеологией двойственной регуляризации принципиально расширяет класс оптимизационных задач, которые могут непосредственно решаться на основе классической конструкции функции Лагранжа.

В данной работе полученные в [7], [8] результаты, связанные с устойчивой секвенциальной теоремой Куна–Таккера, распространяются на случай аналогичной задачи выпуклого программирования, допустимые элементы в которой, а также значения оператора, задающего ограничения задачи, лежат не в гильбертовых, а в рефлексивных банаховых пространствах. Подчеркнем при этом, что полученные в [7], [8] устойчивые необходимые и достаточные условия, выражаемые в секвенциальной форме, могли бы в равной степени носить название и устойчивого секвенциального принципа Лагранжа, так как они "обслуживают" как регулярный, так и нерегулярный случаи задачи одновременно. Именно эта терминология применена в статье [10] для случая задачи выпуклого программирования, допустимые элементы в которой, а также значения оператора, задающего ограничения, лежат в гильбертовых пространствах. Она же используется нами и в рамках данной работы. Применение рефлексивных пространств существенно расширяет по сравнению с [10] класс задач оптимального управления, обратных задач, которые могут быть непосредственно решены на основе получаемого в работе устойчивого секвенциального принципа Лагранжа. Прежде всего, это происходит за счет присоединения к нему новых оптимизационных и обратных задач, связанных с уравнениями в частных производных. Последнее, в частности, объясняется:

1) улучшением свойств регулярности решений уравнений в частных производных с увеличением степени суммируемости их коэффициентов и, как следствие, улучшением свойств дифференцируемости функции Лагранжа задачи;

2) улучшением аналогичных свойств решений сопряженных уравнений принципа максимума в задачах оптимального управления при погружении образов операторов, задающих ограничения, в функциональные классы суммируемых с p-й степенью функций при $p > 1$, $p \neq 2$, $p \neq +\infty$.

В заключение статьи приводится пример задачи оптимального граничного управления для параболического уравнения, иллюстрирующий первое из отмеченных выше двух обстоятельств. В целях более компактного изложения будем считать для определенности в рамках данной работы рефлексивное пространство допустимых элементов оптимизационной задачи равномерно выпуклым, а лежащее в нем множество допустимых элементов ограниченным.

1. Постановка задачи выпуклого программирования в равномерно выпуклом пространстве

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$f^0(z) \to \min, \quad A^0 z = b^0, \quad g^0(z) \leq 0, \quad z \in D \subset Z, \tag{1}$$

где $f^0 : D \to R$ — липшицевый строго равномерно выпуклый функционал (определение строго равномерно выпуклого функционала см., например, в [1], гл. 4, § 7; [11], сс. 12, 13), $A^0 : Z \to B$ — линейный непрерывный оператор, $g_i^0 : D \to R$, $i = 1, \ldots, m$, — липшицевы выпуклые функционалы, $g^0(z) \equiv (g_1^0(z), \ldots, g_m^0(z))^*$, $b^0 \in B$ — заданный элемент, D — выпуклое замкнутое ограниченное множество, Z, B — рефлексивные пространства. Верхний индекс 0 в исходных данных задачи (1) означает, что эти данные соответствуют ситуации их точного задания. Для упрощения изложения будем считать пространство Z равномерно

выпуклым. Последнее в силу теоремы 6 в [11] обеспечивает строгую равномерную выпуклость на D любого функционала вида $\|z\|^\gamma$, $z \in D$, при $\gamma > 1$. Заметим, что определение равномерно выпуклого пространства можно найти в ([11], с. 21; [12], гл. 12, упр. 32; [13], гл. II, § 4, опр. 27; [14], гл. 1, § 4, п. 8).

Пусть решение задачи (1) существует. Обозначим это решение (в соответствии с теоремой 1 в [11] единственное, так как функционал f^0 непрерывный строго равномерно выпуклый, а $D^0 \equiv \{z \in D : A^0 z = b^0,\ g_i^0(z) \le 0,\ i = 1, \dots, m\}$ — выпуклое замкнутое множество) через z^0.

Центральным понятием в данной работе является понятие минимизирующего приближенного решения в задаче (1) в смысле Дж. Варги ([9], раздел III.2, с. 276). Введя обозначения

$$D^{0\varepsilon} \equiv \{z \in D : \|A^0 z - b^0\| \le \varepsilon,\ g_i^0(z) \le \varepsilon,\ i = 1, \dots, m\}, \quad D^{00} \equiv D^0,$$

напомним, что под минимизирующим приближенным решением в задаче (1) понимается такая последовательность $z^i \in D$, $i = 1, 2, \dots$, для которой справедливы соотношения $f^0(z^i) \le \beta^0 + \delta^i$, $z^i \in D^{0\varepsilon^i}$, где δ^i, ε^i, $i = 1, 2, \dots$, — сходящиеся к нулю последовательности неотрицательных чисел. Здесь β^0 — обобщенная нижняя грань в задаче (1), определяемая равенством

$$\beta^0 \equiv \lim_{\varepsilon \to +0} \beta_\varepsilon^0, \quad \beta_\varepsilon^0 \equiv \inf_{z \in D^{0\varepsilon}} f^0(z), \quad \beta_\varepsilon^0 \equiv +\infty, \quad \text{если} \quad D^{0\varepsilon} \quad \text{пусто}.$$

Очевидно, в ситуации оптимизационной задачи общего вида $\beta^0 \le \beta_0^0$, где β_0^0 — классическое значение задачи. Но в случае поставленной выше задачи (1) имеет место равенство $\beta^0 = \beta_0^0$.

Справедлива следующая важная для дальнейшего лемма, доказательство которой основано на стандартных рассуждениях, связанных с классическими свойствами слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в рефлексивных банаховых пространствах и непосредственно опирается на определение строгой равномерной выпуклости функционала.

Лемма 1.1. *При сделанных предположениях для любого минимизирующего приближенного решения z^i, $i = 1, 2, \dots$, задачи* (1) *справедливы предельные соотношения*

$$f^0(z^i) \to f^0(z^0), \quad z^i \to z^0 \quad \text{слабо в} \quad Z, \quad i \to \infty.$$

Более того, если функционал f^0 является субдифференцируемым в смысле выпуклого анализа в точках D, то справедлива и сильная сходимость

$$z^i \to z^0, \quad i \to \infty.$$

Доказательство. Первая часть этого утверждения доказывается на основе стандартных рассуждений (например, [6], сс. 178, 179), связанных с полунепрерывностью снизу непрерывных выпуклых функционалов и слабой компактностью замкнутых ограниченных выпуклых множеств в рефлексивных банаховых пространствах (например, [1], гл. 8, § 2), и опирается на хорошо известный факт, в соответствии с которым строго равномерно выпуклый функционал достигает минимума в единственной точке выпуклого замкнутого множества в таких пространствах (см. [1], гл. 8, § 2, теорема 11). Покажем сильную сходимость по аргументу минимизирующего приближенного решения в случае субдифференцируемости f^0. Пользуясь определениями субдифференцируемости и строгой равномерной выпуклости, при всех $\alpha \in (0, 1)$ можем записать

$$\langle \partial f^0(z^0), \alpha(z^i - z^0) \rangle + f^0(z^0) \le f^0(\alpha z^i + (1-\alpha) z^0) \le$$
$$\le \alpha f^0(z^i) + (1-\alpha) f^0(z^0) - \alpha(1-\alpha)\delta(\|z^i - z^0\|)$$

или

$$(1-\alpha)\delta(\|z^i - z^0\|) + \langle \partial f^0(z^0), z^i - z^0\rangle \le f^0(z^i) - f^0(z^0),$$

где $\delta(\cdot)$ — модуль выпуклости функционала f^0. Отсюда при $\alpha \to +0$ получаем

$$f^0(z^i) - f^0(z^0) - \langle \partial f^0(z^0), z^i - z^0\rangle \ge \delta(\|z^i - z^0\|).$$

Далее, используя первое утверждение леммы, имеем

$$\delta(\|z^i - z^0\|) \to 0, \quad i \to \infty. \tag{2}$$

Проведя рассуждения как в ([1], гл. 4, § 7) выясняем, что модуль выпуклости $\delta(t)$, $t \in [0, \operatorname{diam} D]$, строго равномерно выпуклого функционала f^0 можно, без ограничения общности, считать непрерывным в окрестности нуля и монотонно возрастающим при $t \ge 0$, а значит, можем заключить, что $t \to 0$ при $\delta(t) \to 0$ и, следовательно, из (2) получаем сильную сходимость по аргументу. □

Задаче (1) соответствует набор f^0, A^0, b^0, g^0 невозмущенных исходных данных. Введем соответствующий набор возмущенных исходных данных f^δ, A^δ, b^δ, g^δ, $\delta \in (0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$, — некоторое фиксированное число. Будем считать, что

$$|f^\delta(z) - f^0(z)| \le C\delta, \quad |g^\delta(z) - g^0(z)| \le C\delta \ \ \forall z \in D, \quad \|b^\delta - b^0\| \le C\delta, \tag{3}$$
$$\|A^\delta z - A^0 z\| \le C\delta(1 + \|z\|) \ \ \forall z \in Z,$$

где $C > 0$ не зависит от δ и от $z \in Z$.

С учетом приближенного задания исходных данных вместо задачи (1) имеем семейство задач, зависящих от величины δ, характеризующей ошибку задания исходных данных,

$$f^\delta(z) \to \min, \quad A^\delta z = b^\delta, \quad g_i^\delta(z) \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad z \in D \subset Z, \tag{4}$$

и соответствующие множества удовлетворяющих ограничениям с “допуском” ε элементов

$$D^{\delta\varepsilon} \equiv \{z \in D : \|A^\delta z - b^\delta\| \le \varepsilon, \ g_i^\delta(z) \le \varepsilon, \ i = 1, \dots, m\}.$$

Далее введем нормы элементов (l, r) и (λ, μ) соответственно в пространствах $B \times R^m$ и $B^* \times R^m$ посредством равенств (например, [13], с. 103; [14], с. 47):

$$\|(l, r)\| = (\|l\|^k + |r|^k)^{\frac{1}{k}}, \quad l \in B, \quad r \in R^m, \quad \|(\lambda, \mu)\| = (\|\lambda\|^k + |\mu|^k)^{\frac{1}{k}}, \quad \lambda \in B^*, \quad \mu \in R^m,$$

где $1 \le k < \infty$. Здесь и ниже обозначение $|x|$ для вектора $x \in R^m$ означает любую стандартную фиксированную p-норму (p-модуль) в R^m с $1 < p < +\infty$.

Двойственность между $B \times R^m$ и $B^* \times R^m$ определяется стандартным образом с помощью функционала (например, [14], с. 48)

$$\langle(\lambda, \mu), (l, r)\rangle = \langle \lambda, l\rangle + \langle \mu, r\rangle, \quad (\lambda, \mu) \in B^* \times R^m, \quad (p, r) \in B \times R^m.$$

Введем, наконец, регулярный функционал Лагранжа задачи (4)

$$L^\delta(z, \lambda, \mu) \equiv f^\delta(z) + \langle \lambda, A^\delta z - b^\delta\rangle + \langle \mu, g^\delta(z)\rangle, \quad z \in D, \quad \lambda \in B^*, \quad \mu \in R^m,$$

и двойственную к ней задачу

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \inf_{z \in D} L^\delta(z, \lambda, \mu) \to \sup, \quad (\lambda, \mu) \in B^* \times R^m_+.$$

Заметим также, что в силу оценок (3) и ограниченности D справедлива следующая оценка (доказательство см., например, в [6]):

$$|V^\delta(\lambda, \mu) - V^0(\lambda, \mu)| \le C\delta(1 + \|\lambda\| + |\mu|), \tag{5}$$

в которой постоянная $C > 0$ не зависит от λ, μ, δ.

Следствием классической несимметричной теоремы о минимаксе ([4], гл. 6, § 2, теорема 7) является

Лемма 1.2. *Имеет место минимаксное равенство*

$$\inf_{z\in D}\sup_{(\lambda,\mu)\in B^*\times R^m_+} L^0(z,\lambda,\mu) = \sup_{(\lambda,\mu)\in B^*\times R^m_+}\inf_{z\in D} L^0(z,\lambda,\mu),$$

которое может быть переписано в виде соотношения двойственности

$$f^0(z^0) = \sup_{(\lambda,\mu)\in B^*\times R^m_+} V^0(\lambda,\mu). \tag{6}$$

Ввиду строгой равномерной выпуклости при любых $\lambda \in B^*$, $\mu \in R^m_+$ функционала Лагранжа $L^\delta(z,\lambda,\mu)$, $z \in D$, значение $V^\delta(\lambda,\mu)$ достигается на единственном элементе

$$z^\delta[\lambda,\mu] \equiv \operatorname{argmin}\{L^\delta(z,\lambda,\mu), \quad z\in D\}, \quad \lambda\in B^*, \quad \mu\in R^m_+.$$

Ниже при формулировке и доказательстве основных результатов нам понадобятся также следующие важные вспомогательные утверждения.

Лемма 1.3. *Элемент $z^\delta[\lambda,\mu]$ при каждом фиксированном $\delta \geq 0$ липшицевым образом зависит от $(\lambda,\mu) \in B^* \times R^m_+$.*

Доказательство этого утверждения проводится по аналогии с доказательством утверждения леммы 1.3 в [5] (см. также [6]).

Лемма 1.4. *Производная Фреше функционала V^δ во внутренней точке (λ,μ) множества $B^* \times R^m_+$ задается формулой*

$$\partial V^\delta(\lambda,\mu) = (A^\delta z^\delta[\lambda,\mu] - b^\delta, g^\delta(z^\delta[\lambda,\mu])).$$

Доказательство этой леммы проводится в точном соответствии с доказательством аналогичной леммы 2 в [7] (см. также [6]) в случае гильбертова пространства B. Заметим, что, в отличие от [7], при доказательстве сформулированной выше леммы вместо понятия проксимальной нормали к замкнутому множеству гильбертова пространства следует оперировать с понятиями так называемых нормалей Фреше (например, [15]–[17]) к замкнутым множествам в банаховых пространствах и соответствующих им обобщенных субдифференциалов [17].

2. Метод двойственной регуляризации в рефлексивном банаховом пространстве

С целью доказательства устойчивого секвенциального принципа Лагранжа в задаче (1) получим предварительно теорему сходимости соответствующей ему версии метода двойственной регуляризации [5]–[8]. Рассмотрим для этого функционал

$$R^{\delta,\alpha}(\lambda,\mu) \equiv V^\delta(\lambda,\mu) - \alpha\|(\lambda,\mu)\|^k, \quad (\lambda,\mu)\in B^*\times R^m_+, \quad \alpha>0, \quad k>2, \tag{7}$$

который является вогнутым, непрерывным и коэрцитивным. При этом о коэрцитивности некоторого вогнутого функционала F на множестве M в линейном нормированном пространстве V мы говорим, если ([18], с. 44) $\lim F(v) = -\infty$ при $v \in M$, $\|v\| \to \infty$. В силу вогнутости, непрерывности и коэрцитивности $R^{\delta,\alpha}$ множество всех точек максимума этого функционала на $B^*\times R^m_+$ является непустым, ограниченным, выпуклым и замкнутым, а любая максимизирующая последовательность для него на множестве $B^*\times R^m_+$ сходится к указанному множеству всех точек максимума, которое обозначим через $M^{\delta,\alpha}$ (например, [1]). Заметим, что множество $M^{\delta,\alpha}$ может состоять и не из одной точки. Далее будем работать с некоторой произвольно выбранной точкой максимума из множества $M^{\delta,\alpha}$, обозначаемой через $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)})$.

С учетом введенной нормы в пространстве $B^* \times R^m$ выражение (7) запишем в виде

$$R^{\delta,\alpha}(\lambda,\mu) = V^\delta(\lambda,\mu) - \alpha\|\lambda\|^k - \alpha|\mu|^k, \quad \lambda \in B^*, \quad \mu \in R^m_+, \quad k > 2.$$

Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0 \ \text{ при } \ \delta \to 0. \tag{8}$$

Покажем, что регуляризованные элементы $z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$ при дополнительном предположении субдифференцируемости f^0 сильно сходятся при $\delta \to 0$ к решению z^0 задачи (1).

Записывая классические условия экстремума (см., например, теорему Куна–Таккера в субдифференциальной форме в [2], с. 262) для точки $(\lambda^{\delta,\alpha}, \mu^{\delta,\alpha})$ с учетом леммы 1.4, липшицевой зависимости элементов $z^\delta[\lambda,\mu]$ от $(\lambda,\mu) \in B^* \times R^m_+$ (см. лемму 1.3) и предложения 10 в ([4], гл. 4, § 3) имеем неравенство

$$\langle(\lambda,\mu) - (\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}), (A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - b^\delta - \alpha k\lambda'\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|^{k-1},$$
$$g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) - \alpha k\mu'|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|^{k-1})\rangle \le 0 \ \ \forall(\lambda,\mu) \in B^* \times R^m_+, \tag{9}$$

где $\lambda' \in B$, $\mu' \in R^m$ — такие элементы, для которых выполняются соотношения $\langle\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \lambda'\rangle = \|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|$, $\|\lambda'\| = 1$, $\langle\mu^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu'\rangle = |\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|$, $|\mu'| = 1$.

Из неравенства (9) непосредственно вытекают соотношения

$$A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - b^\delta - \alpha k\lambda'\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|^{k-1} = 0, \tag{10}$$

$$\langle\mu - \mu^{\delta,\alpha(\delta)}, g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) - \alpha k\mu'|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|^{k-1}\rangle \le 0 \ \ \forall\mu \in R^m_+. \tag{11}$$

Из (11) следует, что если $\mu_j^{\delta,\alpha(\delta)} > 0$ для некоторого $j \in \{1,\dots,m\}$, то

$$g_j^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) - \alpha k\mu'|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|^{k-1} = 0, \ \mu_j^{\delta,\alpha(\delta)}(g_j^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \ \mu^{\delta,\alpha(\delta)}])) > 0. \tag{12}$$

Если $\mu_j^{\delta,\alpha(\delta)} = 0$ для некоторого $j \in \{1,\dots,m\}$, то из (11) вытекает

$$g_j^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \le 0.$$

Отсюда и из (10) получаем

$$\langle(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}), (A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - b^\delta, g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]))\rangle \ge 0. \tag{13}$$

Элементы $A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - b^\delta$ и $g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}])$ являются ограниченными равномерно по δ в силу ограниченности D. Поэтому из оценок (10), (12) и в силу $\|\lambda'\| = 1$ и $|\mu'| = 1$ заключаем

$$\alpha(\delta)\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|^{k-1} \le C_3, \quad \alpha(\delta)|\mu^{\delta, \ \alpha(\delta)}|^{k-1} \le C_3, \tag{14}$$

откуда следует

$$\delta\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\| \to 0, \quad \delta|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}| \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{15}$$

Далее можно утверждать, что справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\delta\to+0} V^0(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}) = \sup_{(\lambda,\mu)\in B^*\times R^m_+} V^0(\lambda,\mu). \tag{16}$$

Для его обоснования достаточно практически дословно повторить рассуждения доказательства аналогичного предельного соотношения в [8] (см. также [6]) в случае гильбертова пространства B.

В силу (16), непрерывности функционала значений V^0 и вариационного принципа Экланда [19] для каждого $\alpha \in (0, \alpha_0]$ найдется пара $(\lambda'^\alpha, \mu'^\alpha) \in B^* \times R^m_+$, удовлетворяющая неравенствам

$$\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)} - \lambda'^\alpha\| + |\mu^{\delta,\alpha(\delta)} - \mu'^\alpha| \le \varepsilon(\alpha), \quad V^0(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}) \le V^0(\lambda'^\alpha, \mu'^\alpha) \tag{17}$$

и являющаяся решением задачи

$$-V^0(\lambda, \mu) + \varepsilon(\alpha)(\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)} - \lambda'^\alpha\| + |\mu^{\delta,\alpha(\delta)} - \mu'^\alpha|) \to \min, \quad (\lambda, \mu) \in B^* \times R^m_+,$$

где $\varepsilon(\alpha) \to 0$, $\alpha \to 0$. Тогда можно утверждать, что справедливы соотношения соответствующего принципа Лагранжа (например, [2], § 3.3.1)

$$A^0 z^\delta[\lambda'^\alpha, \mu'^\alpha] - b^0 + \varepsilon(\alpha)\zeta = 0, \quad \|\zeta\| \le 1,$$

$$-g^0(z^\delta[\lambda'^\alpha, \mu'^\alpha]) + \varepsilon(\alpha)\theta - (\xi_1, \dots, \xi_m) = 0, \ |\theta| \le 1, \quad \xi_i \mu_i'^\alpha = 0, \quad \xi_i \ge 0,$$

в которых величины ξ_i, $i = 1, \dots, m$, являются множителями Лагранжа.

Отсюда в силу глобальной липшицевости по $(\lambda, \mu) \in B^* \times R^m_+$ элемента $(A^0 z^\delta[\lambda, \mu] - b^0, g^0(z^\delta[\lambda, \mu]))$ (см. лемму 1.3), условия близости (17) и сходимости $\varepsilon(\alpha) \to 0$, $\alpha \to 0$, получаем два предельных соотношения:

$$\|A^0 z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - b^0\| \to 0, \quad g^0_i(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \le \phi(\delta) \to 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \delta \to 0, \tag{18}$$

или в силу ограниченности D два соответствующих эквивалентных предельных соотношения:

$$\|A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - b^\delta\| \to 0, \quad g^\delta_i(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \le \overline{\phi}(\delta) \to 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \delta \to 0. \tag{19}$$

Далее, так как элемент $z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$ доставляет минимальное значение функционалу Лагранжа $L^\delta(z, \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)})$, $z \in D$, то

$$f^\delta(z) - f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) + \langle \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, A^\delta z - A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\rangle + \\ + \langle \mu^{\delta,\alpha(\delta)}, g^\delta(z) - g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\rangle \ge 0 \quad \forall z \in D,$$

откуда в силу неравенства (13) выводим

$$f^\delta(z) - f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) + \langle \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, A^\delta z - b^\delta\rangle + \langle \mu^{\delta,\alpha(\delta)}, g^\delta(z)\rangle \ge 0 \quad \forall z \in D \tag{20}$$

или

$$f^\delta(z^0) - f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) + \langle \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, A^\delta z^0 - b^\delta\rangle + \langle \mu^{\delta,\alpha(\delta)}, g^\delta(z^0)\rangle \ge 0.$$

Из последнего неравенства в силу (3), (8), (14) получаем

$$f^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \le f^0(z^0) + \phi(\delta), \quad \phi(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{21}$$

Итак, любая последовательность элементов $z^{\delta^k}[\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}, \mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k)}]$, $k = 1, 2, \dots$, с неотрицательными сходящимися к нулю числами δ^k, $k = 1, 2, \dots$, как вытекает из соотношений (18), (21), является минимизирующим приближенным решением задачи (1). Следовательно, согласно лемме 1.1 имеем предельные соотношения

$$f^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \to f^0(z^0), \quad z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta^k,\alpha(\delta)}] \to z^0 \ \text{ слабо в } \ Z, \tag{22}$$

а при условии субдифференцируемости f^0 и

$$\|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - z^0\| \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{23}$$

Одновременно в силу (22), ограниченности D, (5), (6), (8) и (16) можем утверждать, что справедливо и предельное соотношение

$$\langle (\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}), (A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - b^\delta, g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]))\rangle \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{24}$$

Итогом проведенных рассуждений является

Теорема 2.1 (сходимость алгоритма двойственной регуляризации)**.** *Вне зависимости от того, имеется или нет вектор Куна–Таккера в задаче* (1) *или, другими словами, разрешима или нет двойственная к ней задача, при выполнении условия согласования* (8) *выполняются соотношения* (15), (18), (19), (22) *и* (24). *Если же строго равномерно выпуклый функционал* f^0 *является и субдифференцируемым в точках* D, *то справедливо и предельное соотношение* (23).

3. Устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа в задаче выпуклого программирования со строго равномерно выпуклым функционалом качества

Теорема 2.1 открывает возможность сформулировать в терминах классической конструкции функции Лагранжа и доказать следующий устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа в задаче (1). Подчеркнем, что его формулировка за счет применения секвенциального подхода учитывает одновременно как регулярный, так и нерегулярный случаи задачи.

Теорема 3.1. *Для того чтобы в задаче* (1) *существовало минимизирующее приближенное решение, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность двойственных переменных* $(\lambda^k, \mu^k) \in B^* \times R^m_+$, $k = 1, 2, \dots$, *такая, что* $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполняются соотношения*[1]

$$z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in D^{0\varepsilon^k}, \ \varepsilon^k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{25}$$

$$\langle (\lambda^k, \mu^k), (A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] - b^{\delta^k}, g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]))\rangle \to 0, \quad k \to \infty. \tag{26}$$

Последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \dots$, *является искомым минимизирующим приближенным решением, и в случае субдифференцируемости* f^0 *элементы* $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$ *сильно сходятся при* $k \to \infty$ *к* z^0. *Как следствие соотношений* (25) *и* (26), *выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^k, \mu^k) \to \sup_{(\lambda', \mu') \in B^* \times R^m_+} V^0(\lambda', \mu'). \tag{27}$$

Доказательство. Для проверки необходимости, прежде всего, заметим, что в случае существования минимизирующего приближенного решения задача (1) разрешима. Включение (25) и предельное соотношение (26) являются следствиями теоремы 2.1, если в качестве точек (λ^k, μ^k) взять точки $(\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}, \ \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k)})$, $k = 1, 2, \dots$. Также в силу справедливого в этом случае первого предельного соотношения в (22), ограниченности D, (5), (6), (8) и (26) можем утверждать, что справедливо и (27). При этом на основании слабой полунепрерывности сверху вогнутого непрерывного функционала V^0 любая слабая предельная точка последовательности $(\lambda^k, \mu^k) \in B^* \times R^m_+$, $k = 1, 2, \dots$, доставляет максимум в невозмущенной двойственной задаче.

Для доказательства достаточности заметим, что в силу включения $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in D^{0\varepsilon^k}$, ограниченности последовательности $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \dots$, и условий на исходные данные задачи (1) множество D^0 не пусто, следовательно, задача (1) разрешима. Поскольку точка

[1] Легко видеть (см. (19)), что включение (25) можно заменить на эквивалентное в данном случае включение $z^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in D^{\delta^k \varepsilon^k}$, $\varepsilon^k \to 0$, $k \to \infty$.

$z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$ минимизирует функционал Лагранжа $L^{\delta^k}(\cdot,\lambda^k,\mu^k)$, то можно записать

$$f^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]) + \langle(\lambda^k,\mu^k),(A^{\delta^k}z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]-b^{\delta^k},g^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]))\rangle \le$$
$$\le f^{\delta^k}(z)+\langle(\lambda^k,\mu^k),(A^{\delta^k}z-b^{\delta^k},g^{\delta^k}(z))\rangle \ \ \forall z\in D.$$

Отсюда в силу условий теоремы получаем

$$f^{\delta^k}(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]) \le f^{\delta^k}(z)+\langle(\lambda^k,\mu^k),(A^{\delta^k}z-b^{\delta^k},g^{\delta^k}(z))\rangle+\psi^k \ \ \forall z\in D, \quad \psi^k\to 0, \quad k\to\infty.$$

Подставляя в последнее неравенство $z=z^0$ и пользуясь тем, что $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|\to 0$, $k\to\infty$, имеем $f^0(z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k])\le f^0(z^0)+\psi^k$, $\psi^k\to 0$, $k\to\infty$. Так как $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\in D^{0\varepsilon^k}$, то благодаря лемме 1.1 из последних двух фактов заключаем, что последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\dots$, является минимизирующим приближенным решением и имеет место сходимость $z^{\delta^k}[\lambda^k,\mu^k]\to z^0$ при $k\to\infty$ в случае субдифференцируемости f^0. Легко сообразить, что в этом случае выполняется и предельное соотношение (27). □

4. Приложение устойчивого секвенциального принципа Лагранжа в задачах выпуклого программирования в равномерно выпуклых пространствах для решения задач оптимального управления

Основной целью данного раздела является иллюстрация того, какой выигрыш в конкретных задачах дает, по сравнению со случаем гильбертова пространства, использование равномерно выпуклого банахова пространства в качестве несущего пространства допустимых элементов исходной оптимизационной задачи. Рассмотрим выпуклую задачу оптимального управления с функциональными ограничениями для линейного параболического уравнения в дивергентной форме. Ее особенностью является то, что функционалы, задающие ограничения типа равенства и неравенства определяются посредством значений решения параболического уравнения в некотором дискретном наборе точек, возможно и граничных, области изменения независимых переменных начально-краевой задачи. Последнее обстоятельство требует погружения множества допустимых элементов в рефлексивное, а именно, в равномерно выпуклое банахово пространство суммируемых с p-й степенью, $2<p<+\infty$, функций.

Пусть $U\subset R^1$ — выпуклый компакт, $Q_T\equiv\Omega\times(0,T)$, $S\equiv\partial\Omega$, $S_T\equiv\{(x,t):x\in S,\ t\in(0,T)\}$, Ω — ограниченная область в R^n, $n\ge 2$, $D\equiv\{u\in L_r(S_T):u(x,t)\in U$ п. в. на $S_T\}$, $D\subset L_r(S_T)\equiv Z$, $r>n+1$. Для обозначения элементов пространства Z используем традиционную для оптимального управления букву u. Одновременно определим и гильбертово пространство $L_2(S_T)\equiv H$, норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_H$.

Рассмотрим задачу оптимального управления или, другими словами, задачу условной минимизации строго равномерно выпуклого функционала

$$f(u)\to\min,\quad g_1(u)=0,\quad g_2(u)\le 0,\quad u\in D\subset Z\subset H. \tag{P_{OC}}$$

Решение задачи (P_{OC}) предполагаем существующим. Используем обозначение u^0 для этого ее единственного решения.

Заметим, что существование единственного решения задачи (P_{OC}) при условии непустоты множества допустимых управлений, выделяемых ограничениями типа равенства и неравенства, является в силу теоремы 11 в ([1], гл. 8, § 2) следствием выпуклости самой задачи, строгой равномерной выпуклости функционала f и его полунепрерывности снизу. Последняя является следствием его непрерывности, вытекающей из налагаемых ниже на исходные данные задачи (P_{OC}) условий а)–е) и следующих из них априорных оценок (30), (31).

Строго равномерно выпуклый функционал $f : D \to R^1$ и векторные функционалы $g_1 : D \to R^l$, $g_2 : D \to R^m$ задаются равенствами

$$f(u) \equiv \langle A_{0,1}(\cdot,\cdot)z[u](\cdot,\cdot), z[u](\cdot,\cdot)\rangle_{L_2(Q_T)} +$$
$$+ \langle A_{0,2}(\cdot)z[u](\cdot,T), z[u](\cdot,T)\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle A_{0,3}(\cdot,\cdot)z[u](\cdot,\cdot), z[u](\cdot,\cdot)\rangle_{L_2(S_T)} + \|u\|^{\gamma}_{r,S_T}, \quad \gamma > 1,$$
$$g_1(u) \equiv A_1 z_q[u], \quad g_2(u) \equiv (h_1(z_q[u]), \ldots, h_m(z_q[u])),$$
$$z_q[u] \equiv (z[u](x_1,t_1), \ldots, z[u](x_q,t_q))^*, \quad (x_i,t_i) \in \overline{Q}_{\iota,T}, \quad i = 1,\ldots,q, \quad \iota \in (0,T),$$

где $z[u]$ — решение класса $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения дивергентного вида

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}) + a(x,t)z + w_0(x,t) = 0,$$
$$z(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial N} + \sigma(x,t)z = u(x,t), \quad (x,t) \in S_T. \tag{28}$$

Здесь и ниже используем обозначения функциональных пространств и норм их элементов, принятые в монографии ([20], с. 10–15), $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве.

В (28), как и в ([20], гл. III, § 5, с. 197), $\frac{\partial z(x,t)}{\partial N} \equiv a_{i,j}(x,t)z_{x_j}(x,t)\cos\alpha_i(x,t)$, $\alpha_i(x,t)$ — угол, образованный внешней нормалью к S с осью x_i.

Далее будут необходимы следующие условия на исходные данные оптимизационной задачи (P_{OC}):

a) функции $A_{0,1} : Q_T \to R^1$, $A_{0,2} : \Omega \to R^1$, $A_{0,3} : S_T \to R^1$ являются измеримыми по Лебегу и выполняются оценки
$$0 \le A_{0,1}(x,t) \le L \ \text{ при п. в. } \ (x,t) \in Q_T, \quad 0 \le A_{0,2}(x) \le L \ \text{ при п. в. } \ x \in \Omega,$$
$$0 \le A_{0,3}(x,t) \le L \ \text{ при п. в. } \ (x,t) \in S_T,$$
где L — некоторая положительная постоянная;

b) функции $a_{i,j}, a : \Omega\times[0,T] \to R^1$, $i,j = 1,\ldots,n$, измеримы в смысле Лебега, $v_0 \in C(\overline{\Omega})$, $w_0 \in L_p(Q_T)$, $p > n/2+1$, A_1 — заданная $l \times q$-матрица, $h_i : R^q \to R^1$, $i = 1,\ldots,m$, — заданные выпуклые конечные функции;

c) справедливы неравенства
$$\nu|\xi|^2 \le a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2 \ \ \forall (x,t) \in Q_T,$$
где $\nu > 0$, $\mu > 0$ — некоторые постоянные;

d) справедливы включения и оценки
$$a \in L_p(Q_T), \quad \sigma \in L_r(S_T), \quad a(x,t) \ge C_0 \ \text{ п. в. на } \ Q_T, \quad \sigma(x,t) \ge C_0 \ \text{ п. в. на } \ S_T,$$
где $p > n/2+1$, $r > n+1$;

e) граница S является липшицевой.

Пусть F — множество всевозможных наборов исходных данных $\mathsf{f} \equiv \{A_{0,i},\ i = 1,2,3,\ A_1,\ h_j,\ j = 1,\ldots,m,\ a,\ v_0,\ w_0,\ \sigma\}$, для каждого из которых выполняются условия a)–e) с независящими от набора постоянными L, C_0. Определим наборы невозмущенных f^0 и возмущенных f^δ исходных данных соответственно: $\mathsf{f}^0 \equiv \{A^0_{0,i},\ i = 1,2,3,\ A^0_1,\ h^0_j,\ j = 1,\ldots,m,\ a^0,\ v^0_0,\ w^0_0,\ \sigma^0\}$ и $\mathsf{f}^\delta \equiv \{A^\delta_{0,i},\ i = 1,2,3,\ A^\delta_1,\ h^\delta_j,\ j = 1,\ldots,m,\ a^\delta,\ v^\delta_0,\ w^\delta_0,\ \sigma^\delta\}$, $\delta \in (0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число. Будем считать, что выполняются следующие оценки:

$$\|A^\delta_{0,1} - A^0_{0,1}\|_{\infty,Q_T}, \quad |A^\delta_{0,2} - A^0_{0,2}|^{(0)}_{\overline{\Omega}}, \quad \|A^\delta_{0,3} - A^0_{0,3}\|_{\infty,S_T}, \quad |A^\delta_1 - A^0_1| \le \delta,$$

$$|h_j^\delta(z) - h_j^0(z)| \le \delta(1+|z|) \ \ \forall\, z \in R^1, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\|a^\delta - a^0\|_{p,Q_T}, \ |v_0^\delta - v_0^0|_{\overline{\Omega}}^{(0)}, \ \|w_0^\delta - w_0^0\|_{p,Q_T}, \ \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{r,S_T} \le \delta. \tag{29}$$

Обозначим задачу (P_{OC}), функционал f, векторные функционалы g_1, g_2, решение $z[u]$ и т. п., соответствующие набору исходных данных f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$, через (P_{OC}^δ), f^δ, g_1^δ, g_2^δ, $z^\delta[u]$ соответственно.

Прежде всего, заметим, что из условий а)–е) (на самом деле их можно ослабить) и теорем существования слабого (обобщенного) решения третьей краевой задачи для линейного параболического уравнения дивергентного вида, которые могут быть найдены в ([20], гл. III, § 5), а также в [21], следует разрешимость начально-краевой задачи (28) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$. Соответствующее утверждение формулирует

Предложение 4.1. *Для любого $u \in L_2(S_T) \equiv H$ при любом $T > 0$ и любом наборе исходных данных $\mathsf{f} \in \mathsf{F}$ исходная (прямая) задача (28) однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T)$ и справедлива априорная оценка*

$$|z[u]|_{Q_T} + \|z[u]\|_{2,S_T} \le C_T(\|u\|_{2,S_T} + \|v_0\|_{2,\Omega} + \|w_0\|_{2,Q_T}), \tag{30}$$

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных f и управления $u \in H$.

Одновременно отметим, что для полной определенности постановки задачи (P_{OC}) сформулированного выше утверждения недостаточно, так как оно не гарантирует необходимого включения $z[u] \in C(\overline{Q}_T)$.

Однако, из условий а)–е) и теорем существования слабого решения третьей краевой задачи для линейного параболического уравнения дивергентного вида [22] следует одновременно и нужная разрешимость начально-краевой задачи (28) в классе $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$. Можно утверждать, что справедливо аналогичное предложению 4.1

Предложение 4.2. *Для любого $u \in L_r(S_T) \equiv Z$ при любом $T > 0$ и любом наборе исходных данных $\mathsf{f} \in \mathsf{F}$ задача (28) однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ и при $p > n/2 + 1$, $r > n + 1$ справедлива априорная оценка*

$$|z[u]|_{\overline{Q}_T}^{(0)} \le C_T(\|u\|_{r,S_T} + |v_0|_{\overline{\Omega}}^{(0)} + \|w_0\|_{p,Q_T}), \tag{31}$$

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных f и управляющего параметра $u \in Z$.

В силу априорной оценки (31) при любом наборе исходных данных f значения непрерывного функционала $f : D \to R^1$ и непрерывных векторных функционалов $g_1, g_2 : D \to R^l$ определены на каждом элементе $u \in D$. Более того, по указанной причине все эти функционалы определены и непрерывны на всем равномерно выпуклом пространстве $L_r(S_T) \equiv Z$. Одновременно функционал $f : D \to R^1$ является строго равномерно выпуклым и его модуль выпуклости, благодаря условиям на исходные данные, не зависит от набора f.

Сведем задачу (P_{OC}^0) данного раздела к задаче выпуклого программирования раздела 1. Для этого обозначим через $z_0^\delta[u]$ решение возмущенной начально-краевой задачи (28) при $v_0^\delta = 0$, $w_0^\delta = 0$. Тогда имеем очевидное равенство $z^\delta[u] = z_0^\delta[u] + z^\delta[0]$, $\delta \in [0, \delta_0]$. Задача (P_{OC}^δ) может быть переписана в эквивалентной форме задачи выпуклого программирования раздела 1:

$$f^\delta(u) \to \min, \quad \widetilde{g}_1^\delta(u) = b^\delta, \quad g_2^\delta(u) \le 0, \quad u \in D \subset Z, \tag{$\widetilde{P}_{OC}^\delta$}$$

с линейным непрерывным оператором $\widetilde{g}_1^\delta : Z \to R^l$, который задается равенством $\widetilde{g}_1^\delta(u) \equiv A_1^\delta z_{0,q}^\delta[u]$, $z_{0,q}^\delta[u] \equiv (z_0^\delta[u](x_1, t_1), \dots, z_0^\delta[u](x_q, t_q))^*$, и с элементом $b^\delta = -A_1^\delta z_q^\delta[0]$, $b^0 = 0$,

$\delta \in [0, \delta_0]$. Липшицевость функционалов f, $\widetilde{g}_1$, g_2 является следствием априорной оценки утверждения 4.2 и свойств функций h_j, $j = 1, \ldots, m$ (см. следствие 2.2 в [3]).

Оценки (29) отклонения возмущенных исходных данных от точных в исходной задаче (P^0_{OC}) в совокупности с априорной оценкой утверждения 4.2 приводят к оценкам отклонения исходных данных возмущенной задачи выпуклого программирования $(\widetilde{P}^\delta_{OC})$ от исходных данных соответствующей невозмущенной задачи $(\widetilde{P}^0_{OC})$=(P^0_{OC})

$$|f^\delta(u) - f^0(u)| \le C\delta, \quad |g^\delta_2(u) - g^0_2(u)| \le C\delta \quad \forall u \in D, \quad \|b^\delta - b^0\| \le C\delta, \tag{32}$$
$$\|\widetilde{g}^\delta_1(u) - \widetilde{g}^0_1(u)\| \le C\delta(1 + \|u\|) \quad \forall u \in Z$$

с независящей от $\delta \in [0, \delta_0]$, $u \in Z$ постоянной $C > 0$. При $u \in D$, $\lambda \in R^l$, $\mu \in R^m_+$, определим функционал Лагранжа

$$L^\delta(u, \lambda, \mu) \equiv f^\delta(u) + \langle \lambda, \widetilde{g}^\delta_1(u) - b^\delta \rangle + \langle \mu, g^\delta_2(u) \rangle = f^\delta(u) + \langle \lambda, g^\delta_1(u) \rangle + \langle \mu, g^\delta_2(u) \rangle,$$

его единственный минимизирующий элемент $u^\delta[\lambda, \mu]$ и двойственную задачу

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \inf_{u \in D} L^\delta(u, \lambda, \mu) \to \sup, \quad \lambda \in R^l, \quad \mu \in R^m_+.$$

Обозначим через $(\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}) \in R^l \times R^m_+$ произвольную фиксированную точку, являющуюся решением на этом множестве задачи

$$V^\delta(\lambda, \mu) - \alpha(\delta)\|(\lambda, \mu)\|^k \to \max, \quad (\lambda, \mu) \in R^l \times R^m_+, \quad k > 2, \quad \delta/\alpha(\delta) \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0, \ \delta \to 0.$$

Учитывая оценки (32), для решения задачи $(\widetilde{P}^0_{OC})$, а следовательно, и (P^0_{OC}), можно применить устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа теоремы 3.1. В результате можно утверждать, что справедлива

Теорема 4.1 (устойчивый секвенциальный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления)**.** *Для того чтобы в задаче (P^0_{OC}) существовало минимизирующее приближенное решение u^k, $k = 1, 2, \ldots$ (u, следовательно, сильно сходилось к u^0 при $k \to \infty$)*[1]*, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность двойственных переменных $(\lambda^k, \mu^k) \in R^l \times R^m_+$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $\delta^k\|(\lambda^k, \mu^k)\| \to 0$, $k \to \infty$ и выполняются соотношения*

$$u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in D^{\delta^k \varepsilon^k} \equiv \{u \in D : \|g^{\delta^k}_1(u)\| \le \varepsilon^k, \ h^{\delta^k}_i(z^\delta_q[u]) \le \varepsilon^k, \ i = 1, \ldots, m\}, \ \ \varepsilon^k \to 0, \ \ k \to \infty,$$
$$\langle (\lambda^k, \mu^k), (g^{\delta^k}_1(u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]), g^{\delta^k}_2(u^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k])) \rangle \to 0, \quad k \to \infty.$$

Одновременно последовательность $(\lambda^k, \mu^k) \in R^l \times R^m_+$, $k = 1, 2, \ldots$, является максимизирующей в соответствующей двойственной задаче $V^0(\lambda, \mu) \to \sup$, $(\lambda, \mu) \in R^l \times R^m_+$. В качестве точек (λ^k, μ^k), $k = 1, 2, \ldots$, могут быть выбраны точки $(\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}, \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k)})$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\delta^k > 0$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$.

Замечание. В частном случае при $f^0(u) \equiv \|u\|^\gamma$ ($A^0_{0,i} = 0$, $i = 1, 2, 3$), $g^0_2(u) \equiv 0$ задача (P^0_{OC}) принимает вид обратной задачи дискретного граничного наблюдения для параболического уравнения.

Итак, в данном разделе мы рассмотрели задачу оптимального управления (P^0_{OC}) в равномерно выпуклом пространстве $Z \equiv L_r(S_T)$, что автоматически обеспечивает при некоторых дополнительных естественных условиях на ее исходные данные, а именно, при дифференцируемых функциях h^0_j, $j = 1, \ldots, m$, и дифференцируемость в смысле Фреше по u

[1]Сильная сходимость имеет место в силу дифференцируемости по Фреше строго равномерно выпуклого функционала f^0 в данной конкретной задаче.

в пространстве B как функционалов $g_1^0, g_2^0 : D \to R^l$, так и всего функционала Лагранжа задачи (P_{OC}^0) в целом. Последнее обстоятельство представляется весьма важным с точки зрения организации реального вычислительного процесса по решению задачи (P_{OC}^0) и, в частности, процесса решения задачи минимизации функционала Лагранжа, являющегося базовым при решении задачи (P_{OC}^0), например, на основе устойчивого секвенциального принципа Лагранжа теоремы 4.1. В данной работе, преследуя цель более компактного изложения ее результатов, не приводим формулы для производных Фреше указанных выше функционалов.

Отметим, наконец, что формально можно было бы рассмотреть задачу (P_{OC}^0) и в гильбертовом пространстве $L_2(S_T) \equiv H$. Однако в этом случае функционал f^0 и векторные функционалы $g_1^0 : D \to R^l$, $g_2^0 : D \to R^l$ не являются непрерывными на всем гильбертовом пространстве H, так как они не определены для элементов $u \in H \setminus L_r(S_T)$. Одновременно, так как эти функционалы, строго говоря, не определены для указанных элементов, то они не являются заведомо дифференцируемыми в гильбертовом пространстве H. Изучению такой задачи (без ограничений-неравенств) с точки зрения применимости для ее решения алгоритма двойственной регуляризации была посвящена работа [23], в которой было показано как может быть применен принцип максимума Понтрягина для нахождения точек минимума недифференцируемого функционала Лагранжа исходной задачи, т. е. для решения базовой задачи этого алгоритма.

Литература

[1] Васильев Ф.П. *Методы оптимизации.* В 2-х кн. (МЦМНО, М., 2011).

[2] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление* (Наука, М., 1979).

[3] Обэн Ж.-П. *Нелинейный анализ и его экономические приложения* (Мир, М., 1988).

[4] Обэн Ж.-П., Экланд И. *Прикладной нелинейный анализ* (Мир, М., 1988).

[5] Сумин М.И. *Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **47** (4), 602–625 (2007).

[6] Сумин М.И. *Некорректные задачи и методы их решения.* Материалы к лекциям для студентов старших курсов (Изд-во Нижегородск. гос. ун-та, Н. Новгород, 2009).

[7] Сумин М.И. *Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве,* Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **51** (9), 1594–1615 (2011).

[8] Sumin M.I. *On the stable sequential Kuhn–Tucker theorem and its applications*, Appl. Math., Special issue "Optimization" **3** (10A), 1334–1350 (2012).

[9] Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями* (Наука, М., 1977).

[10] Сумин М.И. *Об устойчивом секвенциальном принципе Лагранжа в выпуклом программировании и его применении при решении неустойчивых задач*, Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН **19** (4), 231–240 (2013).

[11] Владимиров А.А., Нестеров Ю.Е., Чеканов Ю.Н. *О равномерно выпуклых функционалах*, Вестн. Московск. ун-та. Сер. выч. матем. и кибернетики (3), 12–23 (1978).

[12] Рудин У. *Функциональный анализ* (Мир, М., 1975).

[13] Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы.* Т. I. *Общая теория* (Ин. лит., М., 1962).

[14] *Функциональный анализ* (Сер. "Справочная матем. библ.") / Под ред. С.Г. Крейна (Наука, М., 1972).

[15] Borwein J.M., Strojwas H.M. *Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space*, I: *Theory*, Can. J. Math. **38** (2), 431–452 (1986).

[16] Borwein J.M., Strojwas H.M. *Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space*, II: *Applications*, Can. J. Math. **39** (2), 428–472 (1987).

[17] Mordukhovich B.S. *Variational analysis and generalized differentiation.* I: *Basic theory* (Springer, Berlin, 2006).

[18] Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы* (Мир, М., 1979).

[19] Ekeland I. *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (2), 324–353 (1974).

[20] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа* (Наука, М., 1967).

[21] Плотников В.И. *Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений*, ДАН СССР **165** (1), 33–35 (1965).
[22] Casas E., Raymond J.-P., Zidani H. *Pontryagin's principle for local solutions of control problems with mixed control-state constraints*, SIAM J. Control Optim. **39** (4) 1182–1203 (2000).
[23] Сумин М.И. *Двойственная регуляризация и принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального граничного управления для параболического уравнения с недифференцируемыми функционалами*, Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН **17** (1), 229–244 (2011).

А.А. Горшков
аспирант, кафедра теории функций,
Нижегородский государственный университет,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия,
e-mail: tiger-nn@mail.ru

М.И. Сумин
заведующий кафедрой теории функций,
Нижегородский государственный университет,
пр-т Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия,
e-mail: m.sumin@mail.ru

A.A. Gorshkov and M.I. Sumin

Stable Lagrange principle in sequential form for the problem of convex programming in uniformly convex space and its applications

Abstract. We consider the convex programming problem in a reflexive space with operator equality constraint and finite number of functional inequality constraints. For this problem we prove the stable with respect to the errors in the initial data Lagrange principle in sequential nondifferential form. It is shown that the sequential approach and dual regularization significantly expand a class of optimization problems that can be solved on a base of the classical design of the Lagrange function. We discuss the possibility of its applicability for solving unstable optimization problems.

Keywords: convex programming, sequential optimization, Lagrange principle, stability, duality, regularization, optimal boundary control.

A.A. Gorshkov
Postgraduate, Chair of Function Theory,
Nizhni Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod, 603950 Russia,
e-mail: tiger-nn@mail.ru

M.I. Sumin
Head of the Chair of Function Theory,
Nizhni Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod, 603950 Russia,
e-mail: m.sumin@mail.ru