С. Г. Крыжевич, Критерий условной неустойчивости по первому приближению решений дифференциальных систем,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 12, 1605–1614

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 12, с. 1605–1614

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

КРИТЕРИЙ УСЛОВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2005 г. С. Г. Крыжевич

Изучается проблема условной устойчивости по первому приближению. Выясняется, при каких условиях на непрерывную линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

из n уравнений, заданную при $t \geq 0$, и на нелинейное возмущение $f(t,x)$, определенное в области $\{t, x: \ t \geq 0, \ \|x\| \leq \rho\}$ и обращающееся в нуль при $x = 0$, пространству размерности k решений системы (1), экспоненциально стремящихся к нулю при $t \to \infty$, соответствует k-мерное многообразие решений системы

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \tag{2}$$

стремящихся к нулю при $t \to \infty$. Норма $\|\cdot\|$ евклидова. Обозначим символом $\chi(\cdot)$ характеристический показатель Ляпунова, а через $x(t,0,x_0)$ – решение задачи Коши для системы (2) с начальными данными $x(0) = x_0$.

Определение 1. Пусть U – окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$, $f(t,x): \ [0,\infty) \times U \to \mathbb{R}^n$ – отображение, непрерывное по t и C^1-гладкое по x. Будем говорить, что отображение f имеет порядок малости, больший единицы, по переменной x, если выполнены следующие условия:

1) $f(t,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,0) = 0$ для любых $t \geq 0$;

2) существуют такие константы $K > 0$ и $\beta > 0$, что для любых $x^{(1)}, x^{(2)} \in U$, $t \geq 0$

$$\left\| \frac{\partial f(t,x^{(1)})}{\partial x} - \frac{\partial f(t,x^{(2)})}{\partial x} \right\| \leq K \|x^{(1)} - x^{(2)}\|^{\beta}. \tag{3}$$

Пусть $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ – показатели Ляпунова системы (1). Положим $\lambda_0 = -\infty$, $\lambda_{n+1} = \infty$. Зафиксируем некоторое $\lambda > 0$ и выберем число k таким, что $\lambda_k < -\lambda < \lambda_{k+1}$. Выберем $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ – некоторую фундаментальную матрицу системы (1), такую, что $\chi(\varphi_i(t)) \geq \lambda$ $(i = 1, \ldots, k)$, $\chi(\varphi_i(t)) < \lambda$ $(i = k+1, \ldots, n)$. Обозначим через $\Phi(t,\tau)$ матрицу Коши системы (1), через $H^s(t)$ линейное пространство, натянутое на решения системы (1) с характеристическими показателями, меньшими $-\lambda$, а через $H^u(t)$ его произвольное дополнение в пространстве решений.

Определение 2. Система (1) принадлежит классу CS_λ, если для любого возмущения $f(t,x)$, имеющего порядок малости, больший единицы, существует C^1-гладкое k-мерное многообразие $0 \in W^s_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ такое, что 1) $T_0 W^s_\lambda = H^s(0)$; 2) если $x_0 \in W^s_\lambda$, то $\chi(x(t,0,x_0)) \leq -\lambda$.

Следующий результат получен в статье [1].

Теорема 1. *Пусть система (1) приводится заменой*

$$x = L(t)y \tag{4}$$

с обобщенно-ляпуновской матрицей (т.е. такой C^1-гладкой невырожденной матрицей $L(t)$, что $\chi(\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| = 0)$) к виду

$$\dot{y} = \operatorname{diag}(B_1(t), B_2(t))y = B(t)y, \tag{5}$$

причем существует непрерывная функция $R(t)$, *определенная на* $[0,\infty)$ *и такая, что*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t R(\tau)\,d\tau=-\lambda<0,$$

являющаяся для систем

$$\dot y_1=B_1(t)y_1 \tag{6}$$

и

$$\dot y_2=B_2(t)y_2 \tag{7}$$

верхней и нижней функцией соответственно. Тогда система (1) принадлежит классу CS_λ.

В настоящей работе рассматривается задача об условной неустойчивости по первому приближению, т.е. о необходимых условиях принадлежности системы (1) классу CS_λ. Теорема 2 (см. ниже) позволяет свести исследуемую задачу к рассмотренной в работах [2–7] задаче о подвижности спектра системы (1) при экспоненциально малых линейных возмущениях, переводящих (1) в систему

$$\dot x=(A(t)+Q(t))x. \tag{8}$$

Ниже будем считать, что матрица $A(t)$ ограничена сверху по норме константой M.

Теорема 2. *Для любой непрерывной при* $t\ge 0$ *матрицы* $Q(t)$ *с отрицательным показателем Ляпунова существует такое отображение* $f(t,x)$, *имеющее порядок малости, больший единицы, и такая непрерывная функция* $T(y)$, *определенная и положительная при* $y>0$, *что любое решение* $x(t,0,x_0)$ *соответствующей системы (2) является при* $t>T(\|x_0\|)$ *решением системы (8) и, наоборот, решение системы (8) с начальными данными* $x(0)=x_0$ *совпадает при* $t>T(\|x_0\|)$ *с некоторым решением системы (2).*

Доказательство. Выберем положительные числа C и σ такими, что

$$\|Q(t)\|\le C\exp(-\sigma t) \tag{9}$$

для любого $t\ge 0$. Рассмотрим функцию $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$, заданную формулой

$$\phi(\tau)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \tau\le 0;\\ \int\limits_0^\tau \exp((s^2-s)^{-1})\,ds\Big/\int\limits_0^1\exp((s^2-s)^{-1}))\,ds, & \text{если}\quad 0<\tau<1;\\ 1, & \text{если}\quad \tau\ge 1.\end{cases}$$

Функция ϕ строго монотонна на отрезке $(0,1)$ и C^∞-гладка на всей оси, причем все ее производные суть ограниченные функции. Для $t,y\ge 0$ положим $\psi(t,y)=\phi(2y^\alpha\exp(\sigma t)-1)$. Число $\alpha\in(0,1)$ выбирается таким, что $M'\overset{\text{def}}{=}\sigma/\alpha>M+C+1$. Определим

$$f(t,x)=\psi(t,\|x\|)Q(t)x. \tag{10}$$

Отметим, что у соответствующей системы (2) существует нулевое решение, а возмущение f является C^∞-гладким по x при любых $t\ge 0$, $x\in\mathbb{R}^n$. Выделим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ три области:

$$\Omega_1=\{t,x:\ t\ge 0,\ \|x\|\ge\exp(-M't)\},$$
$$\Omega_2=\{t,x:\ t\ge 0,\ 2^{-\alpha}\exp(-M't)\le\|x\|\le\exp(-M't)\},$$
$$\Omega_3=\{t,x:\ t\ge 0,\ \|x\|\le 2^{-\alpha}\exp(-M't)\}.$$

Заметим, что в области Ω_1 система (2) с нелинейностью, построенной по формуле (10), совпадает с системой (8), а в области Ω_3 – с системой (1). Определим также для любого $i\in\{1,2,3\}$ и любого фиксированного $t\ge 0$ множество $\Omega_i^t=\{x:\ (t,x)\in\Omega_i\}$.

Лемма 1. *Любое ненулевое решение $x(t)$ построенной системы (2) попадает с течением времени в область Ω_1 и остается там при возрастании t.*

Доказательство. Фиксируем ненулевое решение $x(t)$ системы (2). Обозначив через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, получаем

$$\frac{d\|x\|}{dt}=\frac{\langle x,\dot{x}\rangle}{\|x\|}=\frac{\langle (A(t)+\psi(t,\|x\|)Q(t))x,x\rangle}{\|x\|}\geq -(M+C)\|x\|>-(M'-1)\|x\|,$$

откуда следует, что $\|x(t)\|\geq\|x(\tau)\|\exp(-(M'-1)(t-\tau))$ при $t\geq\tau\geq 0$. Последнее неравенство вместе с определением множества Ω_1 доказывает утверждение леммы.

Покажем, что возмущение f имеет порядок малости, больший единицы. Из тождества $f|_{\Omega_3}\equiv 0$ следует, что $f(t,0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,0)=0$ для любого $t\geq 0$. Проверим справедливость условия (3).

Лемма 2. *Пусть $f(t,x)=(f_1(t,x),\ldots,f_n(t,x))^{\mathrm{T}}$. Тогда существует $D>0$ такое, что для любого $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ и любых $i,j,s=1,\ldots,n$ выполнено неравенство*

$$\left|\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i\partial x_j}(t,x)\right|\leq D\|x\|^{\alpha-1}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $Q(t)=(q_{ij}(t))$. Из определения отображения f следует, что $f_s(t,x)=\psi(t,\|x\|)\sum_{r=1}^n q_{sr}(t)x_r$. Тогда для любых $t\geq 0$, $x\neq 0$ имеем

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t,x)=\frac{\partial\psi}{\partial y}(t,y)\bigg|_{y=\|x\|}\frac{x_i}{\|x\|}\sum_{r=1}^n q_{sr}(t)x_r+\psi(t,\|x\|)q_{si}(t)=$$

$$=2\alpha\phi'(2\|x\|^\alpha\exp(\sigma t)-1)\exp(\sigma t)\|x\|^{\alpha-2}\sum_{r=1}^n q_{sr}(t)x_rx_i+\psi(t,\|x\|)q_{si}(t). \tag{12}$$

Дифференцируя (12) по x_j, получаем

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i\partial x_j}(t,x)=4\alpha^2\phi''(2\|x\|^\alpha\exp(\sigma t)-1)\exp(2\sigma t)\|x\|^{2\alpha-4}\sum_{r=1}^n q_{sr}(t)x_rx_ix_j+$$

$$+2\alpha(\alpha-2)\phi'(2\|x\|^\alpha\exp(\sigma t)-1)\exp(\sigma t)\|x\|^{\alpha-4}\sum_{r=1}^n q_{sr}(t)x_rx_ix_j+$$

$$+2\alpha\phi'(2\|x\|^\alpha\exp(\sigma t)-1)\exp(\sigma t)\|x\|^{\alpha-2}(q_{sj}(t)x_j+q_{si}(t)x_i)+$$

$$+q_{si}(t)\cdot 2\alpha\phi'(2\|x\|^\alpha\exp(\sigma t)-1)\exp(\sigma t)\|x\|^{\alpha-2}x_j. \tag{13}$$

Все слагаемые правой части уравнения (13), кроме первого, удовлетворяют условиям типа (11) в силу оценки (9). Первое слагаемое из тех же соображений не превосходит $\overline{D}\exp(\sigma t)\|x\|^{2\alpha-1}$ для некоторого $\overline{D}>0$, не зависящего от x. Однако выражение $\phi''(2\|x\|^\alpha\exp(\sigma t)-1)$ и рассматриваемое слагаемое обращаются в нуль, когда $\|x\|^\alpha\geq\exp(-\sigma t)$. Таким образом, оценка (11) верна. Лемма доказана.

Заметим, что достаточно проверить справедливость условия (3) только для случая, когда $x^{(1)},x^{(2)}\in\Omega_2^t$. В самом деле, если $x^{(1)},x^{(2)}\in\Omega_1^t$, то $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x^{(1)})=\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x^{(2)})=Q(t)$ и условие (3) выполнено. Столь же очевидна его справедливость в случае, когда $x^{(1)},x^{(2)}\in\Omega_3^t$. Пусть $x^{(1)}\in\Omega_1^t$, $x^{(2)}\in\Omega_2^t$. Рассмотрим отрезок $[x^{(1)},x^{(2)}]$ в $\mathbb{R}^n$ и отметим точку $\widetilde{x}^{(1)}$ его пересечения с границей Ω_2^t. Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x^{(1)})=\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,\widetilde{x}^{(1)})=Q(t)$ и оценка (3) для $x^{(1)}$ и

$x^{(2)}$ следует из аналогичной оценки для $\widetilde{x}^{(1)}$ и $x^{(2)}$, а эти точки принадлежат Ω_2^t. Таким же образом можно поступить в ситуации, когда $x^{(1)} \in \Omega_2^t$, а $x^{(2)} \in \Omega_3^t$, и в ситуации, когда $x^{(1)} \in \Omega_1^t$, $x^{(2)} \in \Omega_3^t$. В последнем случае следует заменить как $x^{(1)}$ на $\widetilde{x}^{(1)}$, так и $x^{(2)}$ на $\widetilde{x}^{(2)}$
Итак, пусть $x^{(1)}, x^{(2)} \in \Omega_2^t$. Предположим сначала, что весь отрезок $[x^{(1)}, x^{(2)}]$ содержится во множестве Ω_2^t. Тогда в силу леммы 2 существует такое число $C_1 > 0$, не зависящее от $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, что для любых $i, s = 1, \ldots, n$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t, x^{(1)}) - \frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t, x^{(2)})\right| \leq C_1 D \max_{y \in [x^{(1)}, x^{(2)}]} \|y\|^{\alpha-1} \|x^{(1)} - x^{(2)}\|. \tag{14}$$

Но из определения множества Ω_2^t следует, что $\|y\| \geq \max(\|x^{(1)}\|, \|x^{(2)}\|)/2$ для любого $y \in \Omega_2^t$, откуда в свою очередь следует, что

$$\max_{y \in [x^{(1)}, x^{(2)}]} \|y\|^{\alpha-1} \leq (\max(\|x^{(1)}\|, \|x^{(2)}\|)/2)^{\alpha-1}. \tag{15}$$

С другой стороны, $\|x^{(1)} - x^{(2)}\| \leq 2\max(\|x^{(1)}\|, \|x^{(2)}\|)$ и, стало быть,

$$\|x^{(1)} - x^{(2)}\| \leq (2\max(\|x^{(1)}\|, \|x^{(2)}\|))^{1-\alpha} \|x^{(1)} - x^{(2)}\|^{\alpha}. \tag{16}$$

Подставляя неравенства (15) и (16) в правую часть (14), получаем с учетом включения $\alpha \in (0, 1)$, что

$$\left|\frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t, x^{(1)}) - \frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t, x^{(2)})\right| \leq 4C_1 D \|x^{(1)} - x^{(2)}\|^{\alpha},$$

откуда следует неравенство (3) при $\alpha = \beta$ для любых $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, таких, что $[x^{(1)}, x^{(2)}] \subset \Omega_2^t$.

Пусть $[x^{(1)}, x^{(2)}] \not\subset \Omega_2^t$. Рассмотрим отрезок $[\widetilde{x}^{(1)}, \widetilde{x}^{(2)}] \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_3^t \cap [x^{(1)}, x^{(2)}]$. Будем считать, что точки $\widetilde{x}^{(1)}$ и $\widetilde{x}^{(2)}$ расположены в следующем порядке: $x^{(1)}$, $\widetilde{x}^{(1)}$, $\widetilde{x}^{(2)}$, $x^{(2)}$. Отметим, что

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t, \widetilde{x}^{(1)}) = \frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t, \widetilde{x}^{(2)}) = 0.$$

Таким образом, получаем, что

$$\left|\frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t, x^{(1)}) - \frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t, x^{(2)})\right| \leq \left|\frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t, x^{(1)}) - \frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t, \widetilde{x}^{(1)})\right| + \left|\frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t, x^{(2)}) - \frac{\partial f_s}{\partial x_i}(t, \widetilde{x}^{(2)})\right| \leq$$

$$\leq 4C_1 D((\|x^{(1)} - \widetilde{x}^{(1)}\|)^{\alpha} + (\|x^{(2)} - \widetilde{x}^{(2)}\|)^{\alpha}) \leq 8C_1 D \|x^{(1)} - x^{(2)}\|^{\alpha}.$$

Из последней формулы следует справедливость оценки (3). Теорема доказана.

Пусть пространство всех решений системы (8) с характеристическим показателем, меньшим $-\lambda$, имеет размерность l. Покажем, что множество W^s начальных данных системы (2) при $t = 0$, определяющих решения с показателем, меньшим $-\lambda$, имеет ту же размерность. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и ее окрестность V такую, что $0 \notin \overline{V}$. Положим $V(t) = \{y = x(t) : x(0) \in V\}$. Из доказательства леммы 1 следует существование такого $T > 0$, что $V(t) \in \Omega_1^t$ при $t \geq T$. Но множество точек, определяющих решения системы (8) (совпадающей с (2) в области Ω_1) с показателем, меньшим $-\lambda$, при $t \to \infty$, есть пересечение $V(T)$ с некоторым определяемым системой (8) и числом T подпространством размерности l. Тогда по теореме об интегральной непрерывности множество $W^s \cap V$ либо пусто, либо является многообразием размерности l. Следовательно, множество W^s имеет размерность l. Таким образом, вопрос об условной устойчивости линейных систем при добавлении нелинейных возмущений порядка малости, большего единицы, сводится к вопросу об условной устойчивости той же системы при экспоненциально малых линейных возмущениях.

Определим число $\nabla^{(k)} = \nabla^{(k)}(A)$ формулой

$$\nabla^{(k)} = \lim_{\theta\to1+0}\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{\theta^m}\sum_{j=0}^{m}\ln\|\Phi(\theta^{j+1},\theta^j)\Pi(\theta^j)\|,$$

где $\Pi(t)$ – проектор на пространство $H^s(t)$.

Замечание. При $k = n$ число $\nabla^{(k)}$ совпадает с верхним экспоненциальным показателем Изобова [5, 6] системы (1).

Теорема 3. *Пусть система (1) принадлежит классу CS_λ. Тогда выполнены следующие три условия:*

I) $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\ln(\sphericalangle(H^s(t),H^u(t))) = 0$;

II) $\nabla^{(k)}(A) \le -\lambda$;

III) для любых двух ненулевых решений $\overline{\varphi}(t)$ и $\overline{\overline{\varphi}}(t)$, таких, что $\chi(\overline{\varphi}) \ge -\lambda > \chi(\overline{\overline{\varphi}})$, найдутся возрастающая функция $p(t)$ и функция $\psi(t)$, имеющая строгий характеристический показатель, равный нулю, непрерывные и положительные на луче $[0,\infty)$ и такие, что

$$\|\overline{\varphi}(t)\|/\|\overline{\overline{\varphi}}(t)\| = p(t)\psi(t). \tag{17}$$

Доказательство. В силу теоремы 2 и принадлежности системы (1) классу CS_λ вытекает, что у любой системы (8) с экспоненциально малым возмущением $Q(t)$ пространство решений с характеристическими показателями, меньшими $-\lambda$, имеет размерность не меньше k. Обозначим класс линейных систем, обладающих указанным выше свойством, через CS'_λ. Этот класс инвариантен относительно обобщенных ляпуновских преобразований.

Проверка условия I) представляет собой незначительную модификацию доказательства известной теоремы Миллионщикова–Былова–Изобова [8, 9].

Лемма 3. *Если система (1) принадлежит классу CS'_λ, то выполнено условие I).*

Доказательство. Пусть условие I) нарушено. Тогда найдутся такие последовательности решений $x_i^s(t) \in H^s(t)$ и $x_i^u(t) \in H^u(t)$ и числовая последовательность $\{t_i\}\uparrow\infty$, $t_{i+1}/t_i \uparrow \infty$, что $\sphericalangle(x_i^s(t_i), x_i^u(t_i)) < \varepsilon_i = \exp(-\sigma t_i)$ для некоторого $\sigma > 0$. Можно считать, что $\|x_i^s(0)\| = \|x_i^u(0)\| = 1$. Справедлива оценка

$$\limsup_{i\to\infty}\left(\max_{t\in[t_i,t_{i+1}]}\frac{1}{t}\ln\|x_i^u(t)\|\right) \ge \lambda_{k+1}.$$

В противном случае некоторая подпоследовательность $x_i^u(t)$ сходится к решению $x(t) \in H^u(t)$, причем $\chi(x(t)) < \lambda_{k+1}$, что невозможно. Не умаляя общности, можно считать, что

$$\max_{t\in[\tau_i,t_{i+1}]}\frac{1}{t}\ln\|x_i^u(t)\| > \lambda_{k+1} - \frac{1}{i}, \tag{18}$$

где τ_i – некоторые числа, такие, что $t_i/\tau_i \uparrow \infty$, $\tau_{i+1}/t_i \uparrow \infty$. Обозначим $\widetilde{\varepsilon}_i = \exp(-\sigma\tau_i)$.

Фиксируем $\delta > 0$ и $\gamma \in (0,1)$. Пусть число $m > 1$ столь велико, что при $t \ge t_m$ для всякого $x(t) \in H^s(t)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{t}\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|} < \lambda_k + \frac{\delta}{2}. \tag{19}$$

Построим возмущенную систему (8) с кусочно-непрерывной матрицей $Q(t)$, экспоненциально стремящейся к нулю, таким образом, чтобы один из ее характеристических показателей лежал в промежутке $(-\lambda, \lambda_{k+1})$. Существование непрерывной матрицы $Q(t)$ с теми же свойствами будет следовать из леммы Гробмана [2, теорема 29.2.1].

Положим $Q(t) = 0$ при $t \in [0, \tau_m - 1]$. Зафиксируем некоторое нетривиальное решение $x_0(t)$ системы (1), такое, что $\chi(x_0) \le \lambda_k$. Пусть $\beta \in \mathbb{R}$ – параметр. Обозначим

$$q(t) = \frac{1}{t}\begin{cases}\ln(\|\overline{x}_m(t)\|/\|x_0(0)\|) & \text{при} \quad 0 \le t \le t_m,\\ \ln(\|\overline{x}_m(t_m)\|/\|x_0(0)\|) & \text{при} \quad t > t_m,\end{cases}$$

где

$$\overline{x}_m(t) = \frac{\|x_0(\tau_m)\|}{\|x_0(\tau_m) + \beta x^u_m(\tau_m)\|}(x_0(t) + \beta x^u_m(t)), \quad \overline{\overline{x}}_m(t) = \frac{\|\overline{x}_m(t_m)\|}{\|x_0(t_m) + \beta x^s_m(t_m)\|}(x_0(t) + \beta x^s_m(t)).$$

Положим $F_\tau(\beta) = \max\limits_{t\in[t_{m-1},\tau]} q(t)$.

Если решения $x_0(t)$ и $x^s_m(t)$ линейно независимы, то функции F_τ непрерывны. В противном случае функция $q(t)$ может быть не определена, но поскольку в этом случае отношение $\|\overline{x}_m(t)\|/\|\overline{x}_m(t_m)\|$ не зависит от β, функцию F_τ можно доопределить до непрерывной. Переходя, если нужно, от последовательности t_k к некоторой подпоследовательности, с учетом формулы (18) можем считать, что $F_{\tau_m}(\pm\widetilde{\varepsilon}_m/2) > \lambda_{k+1} - \delta$ и

$$F_\tau(\beta) < \lambda_k + \delta \tag{20}$$

для любых $\tau > t_{m+1}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Из неравенства (19) следует, что $F_\tau(0) < \lambda_k + \delta$. Значит, найдется такое β_m, что

$$|\beta_m| \le \widetilde{\varepsilon}_m\|x_0(\tau_m)\|/(2\|\overline{x}_m(\tau_m)\|), \quad \beta_m(\pi/2 - \sphericalangle(x_0(t_m), x^u_m(t_m))) \ge 0, \tag{21}$$

$$|F_{\tau_m}(\beta_m) - \gamma\lambda_k - (1-\gamma)\lambda_{k+1}| < \delta.$$

Далее всюду будем полагать $\beta = \beta_m$. Введем обозначения $\mu = \gamma\lambda_k + (1-\gamma)\lambda_{k+1}$.

Из первой и второй формул (21) следует, что угол между векторами $\overline{x}_m(t_m)$ и $\overline{\overline{x}}_m(t_m)$ не превосходит ε_m, а угол между $x_0(\tau_m)$ и $\overline{x}_m(t_m)$ не превосходит $\widetilde{\varepsilon}_m$. Рассмотрим унитарные матрицы $U_m(t)$ и $V_m(t)$, обладающие свойствами

1) $U_m(t_m - 1) = V_m(\tau_m - 1) = E$;

2) $U_m(t_m)\overline{\overline{x}}_m(t_m)$ коллинеарно $\overline{x}_m(t_m)$, $V_m(t_m)\overline{x}_m(\tau_m)$ коллинеарно $x_0(\tau_m)$;

3) $\|U_m(t) - E\| \le \varepsilon_m$, $\|\dot{U}_m(t)\| \le \varepsilon_m$, $\|V_m(t) - E\| \le \varepsilon_m$, $\|\dot{V}_m(t)\| \le \varepsilon_m$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Тогда возмущение $Q(t)$, определенное формулой

$$Q(t) = \begin{cases} V_m^{-1}(t)A(t)V_m(t) - V_m^{-1}(t)\dot{V}_m(t) - A(t) & \text{при} \quad t \in [\tau_m - 1, \tau_m], \\ U_m^{-1}(t)A(t)U_m(t) - U_m^{-1}(t)\dot{U}_m(t) - A(t) & \text{при} \quad t \in [t_m - 1, t_m], \\ 0 & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

таково, что соответствующая система (8) имеет решение $y(t)$, равное $x_0(t)$ при $t < \tau_m - 1$; $V_m^{-1}(t)x_0(t)$ при $\tau_m - 1 \le t \le \tau_m$; $\overline{x}_m(t)$ при $\tau_m < t < t_m - 1$; $U_m^{-1}(t)\overline{x}_m(t)$ при $t_m - 1 \le t \le t_m$ и $\overline{\overline{x}}_m(t)$ при $t > t_m$.

На отрезке $[t_m, t_{m+1} - 1)$ положим $Q(t) = 0$. Строим матрицу $Q(t)$ на отрезке $[t_{m+1}, t_{m+3})$ по аналогии с тем, как она была построена на отрезке $[t_{m-1} - 1, t_{m+1} - 1)$ с той лишь разницей, что вместо решения $x_0(t)$ берем $\overline{\overline{x}}_m(t)$. Затем те же построения повторяем на отрезке $[t_{m+3} - 1, t_{m+5} - 1)$ и т.д. Получаем систему (8), которая имеет решение $y(t)$ с начальными данными $y(0) = x_0(0)$ такое, что

$$\max_{[t_m+2s-1, t_m+2s+1]} \frac{1}{t}\ln\frac{\|y(t)\|}{\|y(0)\|} \in (\mu - \delta, \mu + \delta)$$

при каждом натуральном s. Следовательно, $\chi(y) = \mu$.

Отметим, что $Q(t) = 0$ всюду, кроме некоторых отрезков вида $[\tau_j - 1, \tau_j]$ и $[t_j - 1, t_j]$, на которых выполнены оценки $\|Q(t)\| < (2M+1)\widetilde{\varepsilon}_j$ и $\|Q(t)\| < (2M+1)\varepsilon_j$ соответственно. Следовательно, матрица $Q(t)$ удовлетворяет оценке (9) при любом t.

Выберем γ так, чтобы выполнялась оценка $\mu > -\lambda$. Системы (1) и (8) совпадают на отрезках, каждый из которых может быть выбран сколь угодно длинным независимо от предыдущих. Следовательно, удаляя некоторые t_j и повторяя описанную выше процедуру построения $Q(t)$, можем добиться того, что число линейно независимых решений системы (8) с показателем, меньшим λ_{k+1}, не будет превосходить k. Но поскольку у этой системы будет решение с показателем, равным μ, решения с показателями, не большими $-\lambda$, образуют пространство размерности не больше $k-1$. Так как возмущение $Q(t)$ экспоненциально мало, система (1) не принадлежит классу CS'_λ, а значит, и классу CS_λ. Лемма доказана.

Следующий результат представляет собой аналог теоремы Перрона о приводимости линейной системы к блочно-треугольному виду [10, с. 72–73].

Лемма 4. *Если выполнено условие I), то система (1) приводится обобщенно-ляпуновским преобразованием (4) к блочно-треугольному виду (5), где* $B(t) = \operatorname{diag}(B_1(t), B_2(t))$ *– кусочно-непрерывная матрица с ограниченной диагональю. Системы (6) и (7) имеют размерности* k *и* $n-k$ *соответственно, а показатели их равны* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *и* $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$.

Доказательство. Положим $\Phi_1(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t))$, $\Phi_2(t) = (\varphi_{k+1}(t), \ldots, \varphi_n(t))$. Обозначим через $G(\Phi(t))$, $G(\Phi_1(t))$ и $G(\Phi_2(t))$ определители Грама совокупностей решений, входящих в блоки $\Phi(t)$, $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ соответственно. Из линейной алгебры известно, что

$$\rho(t) \equiv G(\Phi(t))/(G(\Phi_1(t))G(\Phi_2(t))) \geq \sin^{2m} \sphericalangle(H^s(t), H^u(t)),$$

где $m = \min(k, n-k)$. Ясно, что $\chi(\rho(t)) = \chi(1/\rho(t)) = 0$. Положим

$$\xi_i = x_i - \sum_{s=m+1}^{i-1} \langle x_i, e_s \rangle e_s, \quad e_i = \frac{\xi_i}{\|\xi_i\|}, \quad i = m+1, \ldots, k \pm (n-k) \operatorname{sign} m, \quad m \in \{0, k\},$$

Пусть $L(t) = (e_1(t), \ldots, e_n(t))$, $L_1(t) = (e_1(t), \ldots, e_k(t))$, $L_2(t) = (e_{k+1}(t), \ldots, e_n(t))$, $\Psi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$. Получим представление $\Phi(t) = L(t)\Psi(t) = (L_1(t), L_2(t)) \operatorname{diag}(\Psi_1(t), \Psi_2(t))$, где $L_i^*(t)L_i(t) \equiv E_i$ (через E_i, $i = 1, 2$, обозначены единичные матрицы соответствующей размерности, а символ $*$ обозначает эрмитово сопряжение), $\Psi_{1,2}(t)$ – верхнетреугольные матрицы с положительной диагональю размера $k \times k$ и $(n-k) \times (n-k)$ соответственно. Покажем, что преобразование (4) с построенной матрицей L искомое. Из равенства $B(t) = \dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t)$ следует, что матрица $B(t)$ имеет вид, указанный в формуле (5). Покажем, что матрица $L(t)$ является обобщенно-ляпуновской. Норма любого ее столбца равна единице, следовательно, $\|L(t)\|$ ограничена. Покажем, что $\chi(L^{-1}(t)) = 0$ или, что в данном случае то же самое, что $\chi(1/\det L(t)) = 0$. Запишем $L(t) = \Phi(t)\Psi^{-1}(t) = \Phi(t) \operatorname{diag}(\Psi_1^{-1}(t), \Psi_2^{-1}(t))$. Тогда

$$|\det L(t)|^2 = \det(L^*L) = \det((\Psi^{-1})^*\Phi^*\Phi\Psi^{-1}) = \det((\Psi^{-1})^*\Psi^{-1}) \det(\Phi^*\Phi) =$$

$$= \rho(t) \det((\Psi^{-1})^*\Psi^{-1}) G(\Phi_1) G(\Phi_2) = \rho(t) \prod_{i=1}^{2} \det((\Psi_i^{-1})^*\Psi_i^{-1}) \det(\Phi_i^*\Phi_i) =$$

$$= \rho(t) \prod_{i=1}^{2} \det((\Psi_i^{-1})^*\Phi_i^*\Phi_i\Psi_i^{-1}) = \rho(t) \prod_{i=1}^{2} \det(L_i^*L_i) = \rho(t).$$

Лемма доказана.

Сужение отображения (4) на линейную оболочку первых k координатных векторов есть унитарное преобразование. Поэтому для любых $t, \tau \in \mathbb{R}$ норма сужения $\Phi(t, \tau)$ на пространство $H^s(\tau)$ совпадает с нормой матрицы Коши $\Psi_1(t, \tau)$ системы (6). Обозначим через ∇_0 верхний показатель Изобова [5] системы (6). В силу сказанного выше $\nabla^{(k)}(A) = \nabla_0$. Так как система (1) принадлежит классу CS'_λ, то же самое можно сказать о системах (6) и (7). Тогда, поскольку все показатели системы (6) меньше $-\lambda$, при любом добавлении к матрице $B_1(t)$ экспоненциально убывающего возмущения старший показатель полученной системы меньше $-\lambda$. Из результатов работы [5] следует, что $\nabla_0 \leq -\lambda$, что и означает справедливость утверждения п. II.

Перейдем к доказательству утверждения III). Матрицу $\Phi(t)$ можно выбрать так, чтобы $\varphi_1(t) = \overline{\varphi}(t)$, а $\varphi_{k+1}(t) = \overline{\overline{\varphi}}(t)$. Не умаляя общности, считаем, что $\|\overline{\varphi}(0)\| = \|\overline{\overline{\varphi}}(0)\| = 1$. Введем обозначения $\zeta_1(t) = \|\overline{\varphi}(0)\|$, $\zeta_2(t) = \|\overline{\overline{\varphi}}(0)\|$. Приведем систему (1) обобщенным ляпуновским преобразованием (4) к блочно-верхнетреугольному виду (5). Пусть $\eta_1(t) = L^{-1}(t)\overline{\varphi}(t)$, $\eta_2(t) = L^{-1}(t)\overline{\overline{\varphi}}(t)$. Согласно лемме 4, преобразование (4) можно выбрать таким образом, что $\eta_1(t) = \operatorname{col}(\zeta_1(t), 0, \ldots, 0)$, а $\eta_2(t) = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, \zeta_2(t), 0, \ldots, 0)$, где $\zeta_2(t)$ стоит на $(k+1)$-й позиции. Очевидно, что достаточно проверить выполнение доказываемого утверждения для вектор-функций $\eta_i(t)$. Положим $a_i(t) = \zeta_i'(t)/\zeta_i(t)$. Если обозначить через $b_{ij}(t)$ элементы матрицы коэффициентов системы (5), то $b_{11}(t) = a_1(t)$, $b_{k+1\,k+1}(t) = a_2(t)$. Заметим, что

$$|a_1(t)| = \left|\frac{\|\overline{\varphi}(t)\|'}{\|\overline{\varphi}(t)\|}\right| = \left|\frac{(A(t)\overline{\varphi}(t), \overline{\varphi}(t))}{\|\overline{\varphi}(t)\|^2}\right| \le M.$$

Аналогичная оценка справедлива и для функции $a_2(t)$.

Лемма 5. *Пусть функции $a_i(t)$ удовлетворяют условию экспоненциальной разделенности [7], а именно для любого числа $\sigma > 0$ найдется такое $T_\sigma > 0$, что при любом выборе $t \ge s \ge T_\sigma$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_s^t (a_1(\tau) - a_2(\tau))\, d\tau \ge -\sigma t. \tag{22}$$

Тогда для решений $\overline{\varphi}(t)$ и $\overline{\overline{\varphi}}(t)$ выполнено утверждение п. III).

Доказательство. Определим

$$l(t) = \int\limits_0^t \frac{\zeta_2(t)\zeta_2(s)^{-1}}{\zeta_1(t)\zeta_1(s)^{-1}}\, ds = \int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_s^t (a_2(\tau) - a_1(\tau))\, d\tau\right) ds.$$

Введем обозначение $g(t) = \exp(\int_0^t (a_1(\tau) - a_2(\tau))\, d\tau)$. Тогда $l(t) = \int_0^t g(s)\, ds / g(t)$. В силу ограниченности функций $a_i(t)$ справедлива оценка $\chi(1/l(t)) \le 0$. Из условия (22) следует, что для любого $\sigma > 0$ существуют числа $C_\sigma > 0$ и $T_\sigma \ge 0$ такие, что неравенство $l(t) \le C_\sigma \exp(\sigma t)$ имеет место при $t \ge T_\sigma$, откуда вытекает неравенство $\chi(l(t)) \le 0$. Стало быть, $\chi(l(t) + l(t)^{-1}) = 0$. Положим $\widetilde{\zeta}_1(t) = \zeta_1(t)l(t)$ при $t > 0$. При $t > s > 0$

$$\frac{\widetilde{\zeta}_1(t)}{\widetilde{\zeta}_1(s)}\Big/\frac{\zeta_2(t)}{\zeta_2(s)} = \frac{\zeta_1(t)l(t)}{\zeta_1(s)l(s)}\Big/\frac{\zeta_2(t)}{\zeta_2(s)} =$$

$$= \left(\frac{\zeta_1(t)}{\zeta_1(s)}\Big/\frac{\zeta_2(t)}{\zeta_2(s)}\right)\int\limits_0^t \left(\frac{\zeta_2(t)}{\zeta_2(\tau)}\Big/\frac{\zeta_1(t)}{\zeta_1(\tau)}\right) d\tau \left(\int\limits_0^s \left(\frac{\zeta_2(s)}{\zeta_2(\tau)}\Big/\frac{\zeta_1(s)}{\zeta_1(\tau)}\right) d\tau\right)^{-1} =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{\zeta_1(\tau)}{\zeta_2(\tau)}\, d\tau \left(\int\limits_0^s \frac{\zeta_1(\tau)}{\zeta_2(\tau)}\, d\tau\right)^{-1} \ge 1.$$

Введем функции $p(t) = \widetilde{\zeta}_1(t)/\zeta_2(t)$ и $\psi(t) = 1/l(t)$. Функция $\psi(t)$ имеет строгий характеристический показатель, равный нулю, а функция $p(t)$ является возрастающей в силу сказанного выше. Выполнение равенства (17) при таком выборе $p(t)$ и $\psi(t)$ очевидно. Лемма доказана.

Пусть условие экспоненциальной разделенности не выполнено для функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$. Тогда существуют число $\sigma > 0$ и две стремящиеся к бесконечности последовательности s_m и t_m такие, что $t_m > s_m$ для любого m и при этом $\int_{s_m}^{t_m} (a_2(\tau) - a_1(\tau))\, d\tau > \sigma t_m$. Не ограничивая общности, будем считать, что $s_m > 1$ для любого m. Поскольку система (5) принадлежит классу CS'_λ, тому же классу должна принадлежать и любая система

$$\dot{z} = (B(t) + R(t))z \tag{23}$$

с экспоненциально малым возмущением $R(t)$.

Определим матрицу $R(t) = (r_{ij}(t))$ следующим образом. Выберем произвольное число $\alpha \in (0,\sigma)$ и положим $r_{k+1\,1}(t) = \exp(-\alpha t)$, а $r_{ij}(t) \equiv 0$, если $i \neq k+1$ или $j \neq 1$. Решение $z^{(1)}(t) = \operatorname{col}(z_1^{(1)}(t),\ldots,z_n^{(1)}(t))$ системы (23) с построенным возмущением $R(t)$, удовлетворяющее начальным данным $z^{(1)}(0) = \operatorname{col}(1,0,\ldots,0)$, имеет следующий вид:

$$z_1^{(1)}(t) = \exp\biggl(\int\limits_0^t a_1(\tau)\,d\tau\biggr), \quad z_{k+1}^{(1)}(t) = \int\limits_0^t \exp\biggl(\int\limits_s^t a_2(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^s a_1(\tau)\,d\tau - \alpha s\biggr)\,ds,$$

$$z_i^{(1)}(t) \equiv 0, \quad \text{если} \quad i \neq 1, \quad i \neq k+1.$$

Решение же $z^{(2)}(t)$ той же системы с начальными данными $z^{(2)}(0) = \operatorname{col}(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (единица на $(k+1)$-й позиции) таково:

$$z_{k+1}^{(2)}(t) = \exp\biggl(\int\limits_0^t a_2(\tau)\,d\tau\biggr), \quad z_i^{(2)}(t) \equiv 0, \quad \text{если} \quad i \neq k+1.$$

Пусть $s \in [s_m - 1, s_m]$. Тогда

$$\int\limits_s^{t_m} (a_2(\tau) - a_1(\tau))\,d\tau \geq \int\limits_{s_m}^{t_m} (a_2(\tau) - a_1(\tau))\,d\tau - \int\limits_s^{s_m} |a_2(\tau) - a_1(\tau)|\,d\tau \geq \sigma t_m - 2M.$$

Оценим $(k+1)$-ю компоненту вектора $z^{(1)}(t_m)$:

$$z_{k+1}^{(1)}(t_m) = \exp\biggl(\int\limits_0^{t_m} a_1(\tau)\,d\tau\biggr) \int\limits_0^{t_m} \exp\biggl(\int\limits_s^{t_m} (a_2(\tau) - a_1(\tau))\,d\tau\biggr) \exp(-\alpha s)\,ds \geq$$

$$\geq \exp\biggl(\int\limits_0^{t_m} a_1(\tau)\,d\tau\biggr) \int\limits_{s_m-1}^{s_m} \exp\biggl(\int\limits_s^{t_m} (a_2(\tau) - a_1(\tau))\,d\tau\biggr) \exp(-\alpha s)\,ds \geq$$

$$\geq \exp\biggl(\int\limits_0^{t_m} a_1(\tau)\,d\tau\biggr) \int\limits_{s_m-1}^{s_m} \exp(\sigma t_m - 2M - \alpha s)\,ds = C\exp\biggl(\int\limits_0^{t_m} a_1(\tau)\,d\tau + \sigma t_m - \alpha s_m\biggr) \geq$$

$$\geq C z_1^{(1)}(t_m)\exp((\sigma - \alpha)t_m).$$

Поскольку $\sigma > \alpha$, отсюда следует, что $\liminf\limits_{m\to\infty} t_m^{-1}\ln(\sphericalangle(z^{(1)}(t_m), z^{(2)}(t_m))) < 0$, а так как $\chi(z^{(1)}) \geq -\lambda > \chi(z^{(2)})$, то $\liminf\limits_{t\to\infty} t^{-1}\ln(\sphericalangle(\widetilde{H}^s(t), \widetilde{H}^u(t))) < 0$, где $\widetilde{H}^s(t)$ и $\widetilde{H}^u(t)$ – пространства решений системы (23) с характеристическими показателями, меньшими и не меньшими $-\lambda$ соответственно. Стало быть, система (23) не принадлежит классу CS'_λ. Полученное противоречие показывает экспоненциальную разделенность функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ и в силу леммы 5 выполнение условия III). Теорема 3 доказана.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-39001), а также Министерства образования Российской Федерации и Правительства Санкт-Петербурга (проект PD05-1.1-94), программы "Ведущие научные школы" (проект НШ-2271.2003.1) и научной программы министерства образования Российской Федерации "Университеты России".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крыжевич С.Г.* // Вестн. молодых ученых. Прикладная математика и механика. 2000. № 3. С. 34–49.
2. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., 1966.
3. *Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192.
4. *Изобов Н.А.* // Мат. заметки. 1980. Т. 28. Вып. 3. С. 459–476.
5. *Изобов Н.А.* // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5–8.
6. *Изобов Н.А.* // Весцi Акадэмii навук БССР. 1982. № 6. С. 9–16.
7. *Нурматов А.М.* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 3. С. 335–336.
8. *Былов Б.Ф., Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1794–1803.
9. *Миллионщиков В.М.* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1775–1784.
10. *Адрианова Л.Я.* Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. Спб. 1992.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию
17.01.2001 г.