МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 3 (1980)

ДОКТОРСКИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Н. А. Изобов. **К теории характеристических показателей Ляпунова линейных и квазилинейных дифференциальных систем.**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Диссертация защищена 7 июня 1979 г. на заседании Специализированного совета Д 063.57.30 при Ленинградском государственном университете имени А. А. Жданова. Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор В. М. Алексеев; доктор физико-математических наук, профессор Ю. Н. Бибиков; доктор физико-математических наук, профессор Ю. С. Богданов. Библ. 38 назв.

Для решения задачи об устойчивости движения по линейному приближению А. М. Ляпунов предложил метод характеристических показателей, являющийся составной частью его первого метода. В его основе лежит понятие характеристического показателя функции, сравнивающего ее рост при неограниченном возрастании аргумента с экспоненциальной функцией. Указанный метод по существу сводится к вычислению (оценке) отклонений характеристических показателей решений возмущенной системы с линейными и более высокого порядка малости нелинейными возмущениями от соответствующих характеристических показателей исходной линейной системы.

Обзор результатов и методов теории характеристических показателей Ляпунова (с библиографией до 1974 г.) содержится в [22]. Остановимся на направлениях этой теории, к которым непосредственно примыкает тема диссертации.

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1980

Метод замораживания (см. [22, § 10]). Идея метода замораживания восходит к работе П. Боля [37]. Им и позднее Н. Я. Лященко были построены первые оценки в методе замораживания. В. М. Алексеевым и Р. Э. Виноградом [1] для n-мерной вещественной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с непрерывной кусочно-дифференцируемой и ограниченной матрицей $A(t)$ была получена оценка

$$\lambda_A \leqslant \rho + c\delta^{1/n+1} \tag{2}$$

ее старшего показателя λ_A через точную верхнюю границу $\rho \equiv \sup\limits_{t \geqslant 0} \lambda(t)$ наибольшей вещественной части $\lambda(t)$ характеристических чисел (х. ч.) $\lambda_i(t)$ матрицы $A(t)$ и параметр $\delta \equiv \sup\limits_{t \geqslant 0} \|A'(t)\|$, $c = c(n)$ — не зависящая от δ постоянная. Там же и в монографии [5, стр. 138] была поставлена задача о достижимости (неулучшаемости) оценки (2); при этом было отмечено, что оценка $\lambda_A \geqslant \rho + c_0\delta^{1/n}$, $c_0 > 0$, уже реализуется линейными системами. Вопрос о неулучшаемости оценки (2) и случаях ее уточнения оставался открытым.

Канонический вид линейной системы (см. [22, § 12]). Если система (1) приводимая, то она вещественным преобразованием Ляпунова переводится в вещественную стационарную систему с матрицей жорданова вида (Н. П. Еругин [13]). Если система (1) имеет слабую (по Персидскому) вариацию в бесконечности (в частности, если $A'(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует ляпуновское преобразование $y = L_\varepsilon(t)x$, переводящее ее в систему

$$\dot{y} = \operatorname{diag}[\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)]y + Q(t)y, \tag{3}$$

где $\|Q(t)\| \leqslant \varepsilon$ (К. П. Персидский [34]). Приводимость в указанном выше смысле системы (1) с матрицей $A(t)$, удовлетворяющей условию $\|A(t) - A(\tau)\| \leqslant \delta\ |t - \tau|$ с достаточно малым δ, к виду (3) следует из более общего результата Ю. Л. Далецкого и М. Г. Крейна [18]. Оставался открытым важный в методе замораживания вопрос о приводимости системы (1) к виду (3) с установлением точной по $\delta \leqslant 1$ оценки $\|Q(t)\| \leqslant \text{const} \times \delta^\alpha$, $t \geqslant 0$, в которой наибольшее из возможных число $\alpha = \alpha(n) \geqslant 0$ подлежит вычислению.

Устойчивость показателей (см. [22, § 7]). Показатели $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ системы (1) с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей $A(t)$ называются устойчивыми, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что показатель $\lambda[y]$ всякого решения $y(t) \neq 0$ любой возмущенной системы

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad \|Q(t)\| \leqslant \delta, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

удовлетворяет неравенству $\min\limits_i |\lambda[y] - \lambda_i| \leqslant \varepsilon$.

О. Перрон [38] доказал, что разделенность диагонали

$$a_{i+1}(t) - a_i(t) \geqslant \text{const} > 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad t \geqslant 0,$$

влечет устойчивость характеристических показателей диагональной системы. Б. Ф. Былов и Р. Э. Виноград (см. [5, теорема 15.2.1]) доказали устойчивость характеристических показателей для более широкого класса систем (1). Вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий устойчивости характеристических показателей оставался открытым.

Стабилизация системы равномерно малыми возмущениями ее коэффициентов (см. [22, § 9]). Оставался открытым вопрос о вычислении (оценках) нижней границы изменения старшего показателя λ_{A+Q} возмущенных систем (4) с малыми возмущениями — так называемого минимального показателя

$$\lambda \equiv \lim_{\delta \to 0} \inf_{\|Q(t)\| \leqslant \delta} \lambda_{A+Q}$$

системы (1).

Устойчивость по линейному приближению (см. [22, § 13]). Основной здесь является теорема Ляпунова [27, стр. 52—55] (см. также [29]): нулевое решение системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y) \tag{5}$$

с m-возмущением f вблизи $y = 0$, $\|f(t, y)\| \leqslant N_f \|y\|^m$, $m > 1$, асимптотически устойчиво при выполнении неравенства $(m-1)\lambda_A + \sigma_Л < 0$, где $\sigma_Л$ — коэффициент неправильности Ляпунова [27, стр. 38] системы (1).

Эта теорема затем была уточнена Д. М. Гробманом [10]. Признак устойчивости по линейному приближению получил И. Г. Малкин [28, стр. 379]. Эти признаки обобщает признак Р. Э. Винограда [5, стр. 232—238], содер-

жащийся в его более позднем необходимом (в определенном смысле) и достаточном признаке [8] асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения системы (5) с m-возмущением.

Оставался открытым вопрос о вычислении m-показателя системы (1)

$$\Omega_m \equiv \sup_{\|r\|/\|v\|^m \leqslant \mathrm{const}} \lim_{\rho \to 0} \lambda_f(\rho),$$

где $\lambda_f(\rho)$ есть точная верхняя граница множества показателей выходящих из ρ-окрестности начала решений системы (5) (показателем непродолжимого бесконечно вправо решения считаем, согласно Ю. С. Богданову [3], $+\infty$).

Отметим, что признаки устойчивости по первому приближению с однородными правыми частями получены Н. Н. Красовским, В. И. Зубовым, А. А. Шестаковым, Л. Э. Рейзинем и другими, по первому существенно нелинейному приближению — Ю. С. Богдановым, распространившим метод характеристичных чисел Ляпунова на системы с ведущей нелинейной частью, а по правильному линейному приближению Пфаффа — Э. И. Грудо. Признаки неустойчивости по первому приближению построены Н. Г. Четаевым и Н. П. Еругиным.

Цель диссертации — построение точных оценок характеристических показателей Ляпунова как исходной линейной системы, так и возмущенных с малыми линейными и более высокого порядка малости нелинейными возмущениями.

В диссертации защищаются следующие результаты:

1. Достижимость оценки В. М. Алексеева — Р. Э. Винограда в методе замораживания в двумерном случае и ее уточнение для линейной системы с мало отличающимися х. ч. матрицы коэффициентов, интегральный вариант этой оценки;

2. Каноническая форма линейной общей двумерной и n-мерной с различными вещественными х. ч. (кусочно дифференцируемой матрицы коэффициентов) систем;

3. Необходимые и достаточные условия устойчивости показателей n-мерной линейной системы;

4. Коэффициентные признаки устойчивости показателей и полупериодов решений двумерной линейной системы;

5. Минимальный показатель линейной системы, его оценка снизу;

6. Формула вычисления минимального показателя в двумерном случае;

7. Вычисление точной верхней границы множества старших показателей возмущенных линейных систем с экспоненциально убывающими возмущениями фиксированного порядка;

8. В задаче Ляпунова об устойчивости по линейному приближению в некритическом случае решен последний основной остававшийся открытым вопрос построения алгоритма вычисления по его матрице Коши точной верхней границы множества старших показателей возмущенных систем с возмущениями порядка $m > 1$ вблизи начала (так называемого m-показателя линейной системы) и, как следствие, границ областей асимптотической устойчивости и неустойчивости этих систем.

Основным приложением является использование результатов и методов диссертации в задачах устойчивости и, в частности, стабилизации систем. Результаты первой главы дают точные коэффициентные признаки асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы, второй — критерии устойчивости ее показателей, позволяющие их вычислять. В этих главах построены также представления решений рассматриваемых систем. Из результатов третьей главы следует, что в случае неположительного минимального показателя линейной системы ее сколь угодно малыми возмущениями можно сделать асимптотически устойчивой (стабилизируемой), а в случае положительного — сама система и все близкие к ней системы неустойчивы. В последней главе решены вопросы, остававшиеся открытыми в некритическом случае задачи Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

1 глава посвящена асимптотическому интегрированию вещественной линейной n-мерной системы (1) с кусочно дифференцируемой и ограниченной (постоянной M) матрицей коэффициентов, имеющей малую производную $\delta \equiv \sup\limits_{t \geqslant 0} \|A'(t)\|$, сводящемуся к построению асимптотических по параметру δ оценок отклонений характеристик, определяющих поведение решений системы (1), от соответствующих, легко вычисляемых, характеристик

стационарной (замороженной) системы

$$dx/d\tau = A(t)x, \quad t = \text{fix}, \quad \tau \geqslant 0.$$

Первый решаемый здесь вопрос — задача о достижимости оценки Алексеева — Винограда (2). Предполагалось, что линейные системы, реализующие оценку

$$\lambda_A \geqslant \rho + c_0\delta^{1/n+1}, \quad c_0 > 0, \tag{6}$$

если таковые существуют, следует искать среди систем (1) с совпадающими х. ч. $\lambda_i(t)$ матрицы $A(t)$ — в определенном смысле наихудших с точки зрения доказательства оценки (2). Оказалось, что это не так [1]):

ТЕОРЕМА 1.1 [17]. *Старший показатель λ_A двумерной системы* (1) *с совпадающими* (*или мало отличающимися*: $|\lambda_2(t) - \lambda_1(t)| \leqslant \text{const} \times \delta^{1/2}$) *х. ч. матрицы $A(t)$ удовлетворяет оценке* [2])

$$\lambda_A \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau + c\delta^{1/2}$$

с независящей от δ постоянной $c = c(n)$.

При этом системы, реализующие оценку (6), *следует строить в классе систем* (1) *со свойством*

$$|\lambda_2(t) - \lambda_1(t)| \geqslant c_0\delta^{1/3}, \quad c_0 > 0, \quad t \geqslant 0,$$

х.ч. $\lambda_i(t)$ зависящих от параметра $\delta > 0$ их матриц коэффициентов.

Для доказательства достижимости оценки (2) в двумерном случае необходимо построить двумерную кусочно дифференцируемую по t, зависящую от параметра $\delta > 0$, равномерно ограниченную на полуоси $t \geqslant 0$ и при всех $\delta > 0$ матрицу $A(t, \delta)$ с производной $\|\partial A(t, \delta)/\partial t\| \leqslant \delta$, $t \geqslant 0$ такую, что старший показатель системы (1) с этой матрицей при всех достаточно малых $\delta > 0$ удовлетворял бы неравенству (6) при $n = 2$ с независящей от δ постоянной $c_0 > 0$. Это осуществляет следующая

---

[1]) Первая и вторая цифры номера теоремы указывают соответственно главу и параграф диссертации, в которых она содержится. Нумерация теорем в автореферате совпадает с их нумерацией в диссертации.

[2]) Обратим внимание и на второе полученное здесь уточнение оценки (2): величина ρ заменена соответствующим не превосходящим ее верхним пределом от наибольшей вещественной части $\lambda(t)$ х.ч. $\lambda_i(t)$.

ТЕОРЕМА 1.2 [18]. *Существует такая зависящая от параметра* $\delta > 0$ *кусочно дифференцируемая положительная периодическая по* t *функция* $q(t, \delta)$ *с производной* $|q_t'(t, \delta)| \leqslant \delta$, *что старший показатель системы* $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -q(t, \delta)x_1$ *при всяком* $\delta > 0$ *не менее величины* $c_0\delta^{1/3}$.

Достижимость оценки (2) для $n \geqslant 3$ была доказана позднее Ю. И. Елефтериади [12].

И хоть оценка (2) достижима в указанном выше смысле, она допускает в двумерном случае уточнение до своего интегрального варианта

$$\lambda_A \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau + c\delta^{1/3}.$$

Эту оценку устанавливает в качестве следствия следующая теорема о канонической форме системы (1), представляющая, пожалуй, бóльший самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 1.3 [19]. *Всякая двумерная система* (1) *вещественным преобразованием Ляпунова приводится к виду*

$$\dot{y} = \operatorname{diag}[\mu(t),\ \lambda(t)]y + Q(t)y,$$

в котором $\mu(t) \leqslant \lambda(t)$ — *вещественные части х. ч. матрицы* $A(t)$, *а норма матрицы* $Q(t)$ *удовлетворяет оценке* $\|Q(t)\| \leqslant q\delta^{1/3}$, $t \geqslant 0$, *с независящей от* δ *постоянной* q.

При этом оценка для $\|Q(t)\|$, в силу доказанной в теореме 1.2 достижимости оценки (2), является точной.

Следствие. *Для всякого решения* $x(t)$ *двумерной системы* (1) *с совпадающими вещественными частями х. ч. матрицы коэффициентов справедлива оценка*

$$\overline{\lim_{t-s\to\infty}} \frac{1}{t-s} \left| \ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} - \int_s^t \lambda(\tau)\,d\tau \right| \leqslant c\delta^{1/3}.$$

Далее выясняется вопрос о том, в каком виде метод Эйлера интегрирования линейной стационарной системы с вещественными различными х. ч. матрицы A переносится на системы (1). Основной здесь является

ТЕОРЕМА 1.4.1 [21]. *Система* (1) *с различными вещественными на некотором отрезке* $[t_1, t_2]$ *х. ч.* $\lambda_i(t)$ *матрицы* $A(t)$, $\min\limits_{i\neq j} |\lambda_j(t) - \lambda_i(t)| \equiv \Lambda(t) > 0$, *на всяком таком отрезке времени преобразованием* $x = S(t)y$, *матрица которого составлена из соответствующих ха-*

рактеристических векторов $a_i(t)$ *матрицы* $A(t)$, *переводится в систему*

$$\dot{y} = \operatorname{diag}[\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)]y + Q(t)y$$

со справедливыми на нем оценками

$$|q_{ij}(t)| \leqslant \delta \left[\frac{2nM}{\Lambda(t)}\right]^n$$

элементов матрицы $Q(t)$.

С помощью этой теоремы и решается поставленная выше задача:

ТЕОРЕМА 1.4.2 [21]. *У системы* (1) *с отделенными х. ч.*

$$\lambda_{i+1}(t) - \lambda_i(t) \geqslant \Delta > 0 \tag{7}$$

матрицы коэффициентов в области $\Delta \geqslant 4nM\delta^{1/n+1}$ *параметров* Δ *и* δ *для всякого* $k = 1, \ldots, n$ *существует* k*-мерное многообразие решений* $x(t)$, *удовлетворяющих оценкам*

$$\overline{\lim_{t-s\to\infty}} \frac{1}{t-s}\left|\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} - \int_s^t \lambda_k(\tau)\,d\tau\right| \leqslant 4\delta\left(\frac{2nM}{\Delta}\right)^n,$$

$$\sin \measuredangle \{x(t), a_k(t)\} \leqslant 2n\sqrt{\delta(2nM/\Delta)^{3n-1}}, \quad t \geqslant 0.$$

Следствие. *Показатели системы* (1) *с отделенными х. ч.* (7) *матрицы коэффициентов и параметрами* $\Delta \geqslant 4nM\delta^{1/n+1}$ *являются устойчивыми.*

Теорема 1.4.2 указывает границы изменения норм и направлений решений n-мерной системы (1) с отделенными х. ч. ее матрицы коэффициентов, а следствие к теореме 1.3 — границы изменения норм решений двумерной системы (1) с совпадающими вещественными частями х.ч. И в этом последнем случае, когда траектории рассматриваемой системы совершают, как правило, вращательное движение, встает вопрос о построении асимптотических формул для вычисления (наименьшего) полупериода [36, стр. 96] $T = T(t_0, x_0)$ всякого решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), определяемого равенством $x(t_0 + T, t_0, x_0) = cx_0$, $0 > c$ — скаляр.

ТЕОРЕМА 1.5 [23]. *Для полупериода* T *всякого решения двумерной системы* (1) *с х.ч.* $\lambda_{1,2}(t) = \lambda(t) \pm b(t)\sqrt{-1}$, $b(t) \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, *матрицы коэффициентов в области* $\delta M T_0^3 < 1$ *параметров* δ, M *и* $T_0 = T_0(t_0)$, *определяемо-*

го равенством $\int_{t_0}^{t_0+T_0} b(\tau)\,d\tau = \pi$, *справедлива оценка* $|T - T_0| < (1/4)\delta M T_0^4$. *Вместе с тем для любых конечных* δ, M *и* T_0 *из области* $\delta M T_0^3 > (e^{2\pi} - 1)^3$ *существует такая реализующая эти параметры матрица* $A(t)$, *для которой* $\int_{t_0}^{\infty} b(\tau)\,d\tau = \infty$ *и ни одно решение системы* (1) *не имеет конечного полупериода.*

II глава. В ней построены критерий устойчивости показателей n-мерной системы (1) с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей $A(t)$ и коэффициентные признаки устойчивости показателей и полупериодов решений двумерной системы (1) с такой же матрицей.

Критерий устойчивости показателей диагональной системы. Совокупность функций $\{p_1(t), \ldots, p_n(t)\}$ разобьем на q групп $P_1, \ldots, P_q$, относя в группу P_k те n_k функций $p_i(t)$, для которых

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t p_i(\tau)\,d\tau = \Lambda_k,$$

причем $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_q$ и $n_1 + \ldots + n_q = n$.

ТЕОРЕМА 2.1 [6]. *Для устойчивости характеристических показателей диагональной системы*

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[p_1(t), \ldots, p_n(t)]x$$

необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:

А) *группы* P_k *и* P_{k+1} *интегрально разделены, т. е. для любых* $p_i \in P_k$ *и* $p_j \in P_{k+1}$ *и любых* $t \geqslant s \geqslant 0$ *выполнены неравенства*

$$\int_s^t (p_j - p_i)\,d\tau \geqslant c(t-s) - d, \quad c > 0, \quad d \geqslant 0;$$

Б) *верхний и нижний* $\overline{\omega}_k$ *центральные показатели группы* P_k *совпадают.*

С помощью этой теоремы получен общий

Критерий устойчивости показателей линейной системы. Пусть система (1) имеет различные показатели $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_q$ соответственно кратностей $n_1, \ldots, n_q$.

ТЕОРЕМА 2.2.1 [7]. *Если показатели системы* (1) *устойчивы, то существует ляпуновское преобразование, приводящее ее к блочно-треугольному виду* $\dot{z} = \operatorname{diag}[P_1, \ldots, P_q]z$, *в котором каждая из матриц* $P_k(t)$ *является*

верхней треугольной порядка n_k, а все решения системы-блока

$$\dot{z}^{(k)} = P_k(t) z^{(k)} \tag{8}$$

имеют показатели Λ_k.

ТЕОРЕМА 2.2.2 [7]. *Для устойчивости характеристических показателей системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы существовало ляпуновское преобразование ее к блочно-треугольному виду, для систем-блоков* (8) *которого выполнены условия*:

А) *диагональные коэффициенты $p_i(t)$, $i \in n_k$, k-го блока и $p_j(t)$, $j \in n_{k+1}$, $k+1$-го блока интегрально разделены*;

Б) *для каждого блока верхний Ω_k и нижний $\overline{\omega}_k$ ($k = 1, \ldots, q$) центральные показатели совпадают.*

Примечание. Достаточность этого критерия была доказана ранее в монографии [5] в теореме 15.2.1, а необходимость — В. М. Миллионщиковым [33] и независимо, но с использованием его метода поворотов [31], [32], Б. Ф. Быловым и автором [6], [7].

Следствие 1. *Если система* (1) *имеет различные показатели, то для их устойчивости необходимо и достаточно, чтобы существовало ляпуновское преобразование ее к диагональному виду с интегрально разделенными коэффициентами.*

Следствие 2. *Если система* (1) *имеет различные показатели, то для их устойчивости необходимо и достаточно, чтобы существовала фундаментальная система решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, для которой выполнено условие интегральной разделенности*

$$\frac{\|x_{i+1}(t)\|}{\|x_{i+1}(s)\|} : \frac{\|x_i(t)\|}{\|x_i(s)\|} \geqslant d\, e^{a(t-s)}, \qquad a, d > 0, \quad t \geqslant s \geqslant 0,$$

$$i = 1, \ldots, n-1.$$

Коэффициентный признак устойчивости показателей двумерной системы. Векторы $a(t)$ и $b(t)$ будем называть отделенными, если существуют два замкнутых пересекающихся лишь в начале координат двусторонних сектора, содержащих соответственно лишь множества значений этих векторов при всех $t \geqslant 0$.

ТЕОРЕМА 2.3 [20]. *Показатели двумерной системы* (1) *с отделенными характеристическими векторами матрицы коэффициентов, соответствующими ее отделенным характеристическим числам, устойчивы.*

Следствие. *Показатели двумерной системы* (1) *с отделенными от нуля положительными* (*отрицательными*) *внедиагональными коэффициентами устойчивы.*

Возникает связанный с предыдущей теоремой вопрос: какие устойчивые характеристики присущи двумерным системам (1) с матрицами коэффициентов, имеющими комплексные при всех $t \geqslant 0$ х.ч. $\lambda_{1,2}(t) = \lambda(t) \pm ib(t)$, например, в случае отделенности от нуля $b(t)$? При этом показатели ими быть не могут, общий прием построения соответствующих примеров содержится в монографии [5, стр. 124].

Критерий устойчивости полупериодов двумерной системы. Полупериоды решений двумерной системы (1) называем устойчивыми, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется не зависящее от t_0 и x_0 число $\delta > 0$ такое, что для полупериодов $T_x = T_x(t_0, x_0)$ и $T_y = T_y(t_0, x_0)$ решений $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) и $y(t, t_0, x_0)$ всякой возмущенной (4) при всех t_0 и x_0 справедливо неравенство $|T_y(t_0, x_0) - T_x(t_0, x_0)| \leqslant \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 2.4 [23]. *Для устойчивости полупериодов решений двумерной системы* (1) *достаточно выполнения при всяком малом* $\Delta > 0$ *неравенства*

$$\sup_{\tau}\left\{\left[\int_{\tau}^{\tau+\Delta}(a_{22}-a_{11})\,d\xi\right]^2 + 4\int_{\tau}^{\tau+\Delta}a_{12}\,d\xi \times \int_{\tau}^{\tau+\Delta}a_{21}\,d\xi\right\} < 0,$$

а если у каждого решения системы (1), *заданной на всей оси, существует отрицательный* [1]) *полупериод, то и необходимо.*

Глава III. В случае системы (1) с неустойчивыми показателями возникает задача о построении точных границ изменения показателей возмущенной системы (4) с малыми возмущениями, в том числе и наиболее важный для приложений частный случай этой задачи — построение границ изменения ее старшего показателя λ_{A+Q}. Формула вычисления точной верхней границы построена Р. Э. Виноградом и В. М. Миллионщиковым. В настоящей главе строится оценка снизу для точной нижней границы — минимального показателя

$$\lambda \equiv \lim_{\delta\to 0}\ \inf_{\|Q(t)\|\leqslant\delta}\ \lambda_{A+Q}$$

---

[1]) Величину $\Theta(t_0, x_0) < 0$ называем отрицательным полупериодом решения $x(t, t_0, x_0)$, если $x(t_0 + \Theta, t_0, x_0) = cx_0$, $c < 0$.

n-мерной системы (1) с кусочно непрерывными и ограниченными коэффициентами, доставляющая в двумерном случае формулу его вычисления.

Пусть $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — нормальная система решений системы (1), разбитая на старший $x_1(t), \ldots, x_q(t)$ минимальной размерности q, $1 \leqslant q \leqslant n$, и младший $x_{q+1}(t), \ldots, x_n(t)$ блоки с интегрально разделенными решениями, $G(t)$ — грамиан старшего блока. Тогда система (1) преобразованием Ляпунова приводится к блочно-треугольному виду (см. [5, стр. 267], [35, стр. 14]), состоящему из q-мерной системы старшего блока

$$\dot{z} = B(t)z, \quad \operatorname{Sp} B(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t),$$

и младшего $\dot{w} = C(t)w$.

ТЕОРЕМА 3.1 [26]. *Минимальный показатель системы* (1) *совпадает с минимальным показателем системы ее старшего блока.*

Пусть $d_1(t, \tau) \leqslant \ldots \leqslant d_n(t, \tau)$ — положительные квадратные корни из собственных значений матрицы $X^T(t, \tau)X(t, \tau)$.

ТЕОРЕМА 3.2 [26]. *Для всякой фундаментальной системы решений* $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ (*с определителем Вронского* $W(t)$) *системы* (1) *и любых* $\tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$ *справедливо неравенство*

$$\max_{(k_1, \ldots, k_n)} \prod_{i=1}^{n} \| x^{(k_i)}(\tau_i) \| \geqslant d\, | W(\tau_1) | \prod_{i=2}^{n} d_{k_i}(\tau_i, \tau_1)$$

для всех перестановок $(k_j, \ldots, k_n)$ *из чисел* $j, \ldots, n$ ($j = 1,2$) *и некоторой постоянной* $d = d(n) > 0$.

Пусть $X(t, \tau)$ — матрица Коши, $x(t, \theta, x_0)$ — решение, $R^q(t)$ — пространство решений старшего блока системы (1), $e \in \mathbf{R}^n$, $\|e\| = 1$. Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $T > 0$, целочисленных (кратных T) $\tau = \mathrm{fix}$ и $t \geqslant 0$ разложим пространство $R^q(t)$ в прямую сумму

$$R^q(t) = M_\tau(t) \oplus N_\tau(t), \quad M_\tau(t+0) = M_\tau(t) \neq \varnothing,$$

таких пространств, для которых:

1) $x(t, \theta, x_0) \in M_\tau(t)$ для всех $t \geqslant \theta \geqslant \tau$ и всех $t \leqslant \theta \leqslant \tau$, если $x_0 \in M_\tau(\theta)$;

2) для любых $e_M \in M_\tau(sT)$ и $e_N \in N_\tau(sT)$ справедливо неравенство

$$\| x(sT + T, sT, e_N) \| : \| x(sT + T, sT, e_M) \| > \exp \varepsilon T.$$

Введем функцию целочисленных переменных $\theta \leqslant t$:

$$m(t, \theta) \equiv \inf_{M_\tau} \prod_{sT=\theta}^{t-T} \sup_{e \in M_\tau(sT)} \| X(sT+T, sT)\, e \|,$$

где inf вычисляется по всем пространствам M_τ с фиксированным τ и всем $\tau \in [\theta, t]$.

ТЕОРЕМА 3.3 [26]. *Пусть $R_X^q(t)$—пространство решений какого-то старшего блока системы* (1). *Тогда для любых $\alpha > 0$ и $h > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого подпространства $M_\tau^X(t)$ пространства $R_X^q(t)$ существует подпространство $M_\tau^Y(t)$ соответствующего пространства $R_Y^q(t)$ решений системы* (4), *обладающее следующими свойствами*:

1) *$M_\tau^Y(t)$ принадлежит конусу $K_{\tau, h}(t)$ раствора h вокруг пространства $M_\tau^X(t)$*;

2) *для решений $y(t, \theta, y_0)$ системы* (4) *при любых $y_0 \in M_\tau^Y(sT)$ справедливо неравенство*

$$\| y(sT+T, sT, y_0) \| \leqslant \| y_0 \| e^{\alpha T} m(sT+T, sT).$$

С помощью теорем 3.1—3.3 и доказывается устанавливающая оценку снизу для минимального показателя

ТЕОРЕМА 3.4 [26]. *Для минимального показателя λ системы* (1) *в нетривиальном случае*[1]) *$q > 1$ справедлива оценка*

$$\lambda \geqslant \varlimsup_{\tau_k \geqslant \tau_1 \to \infty} \frac{\ln \prod_{k=2}^{q} \sqrt{G(\tau_k)}/m(\tau_k, \tau_1)}{(q-1)(\tau_1 + \ldots + \tau_q)} \equiv \Lambda_{\varepsilon, T}$$

для любых $\varepsilon, T > 0$.

Эта оценка в двумерном случае является точной, она доставляет следующую формулу вычисления минимального показателя:

ТЕОРЕМА 3.5 [24], [25]. *Минимальный показатель λ двумерной системы* (1) *в нетривиальном случае $q > 1$ вычисляется по формуле*

$$\lambda = \lim_{\varepsilon \to 0} \varlimsup_{T \to \infty} \Lambda_{\varepsilon, T}.$$

---

[1]) В тривиальном случае $q = 1$ минимальный показатель системы (1) совпадает с ее старшим показателем.

Следствие. *Для минимального показателя* λ *двумерной абсолютно регулярной системы В. М. Миллионщикова* [30] *с показателями* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ *справедливо представление* [25]

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + l_0}, \quad l_0 \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{T \to \infty} \overline{\lim_{k \to \infty}} (t_k / t_{k+1}).$$

IV глава посвящена вычислению m-показателя Ω_m системы (1) и, как следствие, чисел $m_0 \geqslant m_\infty$, начиная с которых наблюдается соответственно асимптотическая устойчивость при $m > m_0$ и неустойчивость при $m < m_\infty$ нулевого решения системы (5) с m-возмущением. Эти вопросы оставались открытыми в решении Р. Э. Винограда [8] задачи Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

В первом воспомогательном параграфе изложен представляющий и самостоятельный интерес способ построения по матрице Коши системы (1) ее так называемого σ-показателя [1]) [16]

$$\Delta(\sigma) \equiv \sup_{\|Q(t)\| e^{\sigma t} \leqslant \mathrm{const}} \lambda_{A+Q}, \quad \sigma > 0.$$

Этот способ с соответствующим видоизменением будет использован затем и для вычисления Ω_m.

ТЕОРЕМА 4.1 [16]. *Для* σ*-показателя* $\Delta(\sigma)$ *системы* (1) *справедливо представление* $\Delta(\sigma) = \lim_{k \to \infty} (1/k) \xi_k$, *где последовательность* $\{\xi_k\}$, $k \geqslant 0$, *определяется равенствами*

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_k = \max_{i < k} \{\ln \| X(k, i) \| + \xi_i - \sigma i\}.$$

ТЕОРЕМА 4.1.1 [16]. σ*-показатель* $\Delta(\sigma)$ *системы* (1) *является непрерывной функцией параметра* $\sigma > 0$.

Вычисление m-показателя Ω_m системы (1), точно описывающего асимптотику решений возмущенной системы, осуществляется с помощью вводимого ниже конструктивного показателя, непосредственно вычисляемого по матрице Коши.

---

[1]) Эта задача восходит к задаче Ю. С. Богданова о построении «точного» коэффициента неправильности линейной системы. Отметим также, что при $\sigma_л + \varepsilon$- и $\sigma_г + \varepsilon$-возмущениях показатели исходной и возмущенной систем совпадают (см. [2] и [10]), для $n=2$ перроновский $\sigma_п$-показатель совпадает с λ_A [14].

Определение. Конструктивным m-показателем Ω''_m системы (1) называем величину [15]

$$\Omega''_m = \lim_{\alpha \to -\infty} \overline{\lim_{k \to \infty}} (1/k)\, \xi_k^{(\alpha)}, \tag{9}$$

где последовательность $\{\xi_k^{(\alpha)}\}$, $k \geqslant 0$, определяется равенствами

$$\xi_0^{(\alpha)} = \alpha, \quad \xi_k^{(\alpha)} = \max_{i<k} \{\ln \| X(k, i) \| + m\xi_i^{(\alpha)}\}. \tag{10}$$

Основной результат главы IV устанавливает

ТЕОРЕМА 4.2 [15]. *m-показатель Ω_m системы* (1) *совпадает с конструктивным Ω''_m, если последний положителен или существенно отрицателен (существует такое m', $1 < m' < m$, для которого $\Omega''_{m'} < 0$).*

На основании работы [8] в случае отрицательности оценочного показателя Ω'_m справедливо неравенство $\Omega_m \leqslant \Omega'_m$. Поэтому доказательство теоремы 4.2 сводится к доказательству при всех $m > 1$ неравенства $\Omega_m \geqslant \Omega''_m$ и равенства $\Omega'_m = \Omega''_m$ в случае положительности и существенной отрицательности Ω''_m.

ТЕОРЕМА 4.3.1 [15]. *m-показатель Ω_m системы* (1) *при любом $m > 1$ не менее конструктивного m-показателя Ω''_m этой системы.*

ТЕОРЕМА 4.3.2 [15]. *Оценочный m-показатель Ω'_m совпадает с конструктивным, если последний положителен или существенно отрицателен.*

Обратной к предыдущей является

ТЕОРЕМА 4.3.3. *Конструктивный m-показатель Ω''_m совпадает с оценочным в области определения последнего.*

Введем в рассмотрение числа

$$m_\infty = \sup \{m\colon\ m > 1,\ \Omega''_m > 0\} \tag{11}$$

и не меньшее его

$$m_0 = \inf \{m\colon\ m > 1,\ \Omega''_m < 0\}. \tag{12}$$

Из теоремы 4.2 и монотонности Ω_m как функции m вытекает

ТЕОРЕМА 4.3.4. *В области $m > m_0$ конструктивный m-показатель Ω''_m является невозрастающей функцией.*

Подводя итог (он приведен также в работе Р. Э. Винограда и автора [9]) исследованиям параграфов 2, 3 этой главы и работы [8], мы можем в следующем виде сформулировать

Решение задачи Ляпунова. Если конструктивный m-показатель Ω''_m [15] системы (1), вычисляемый по ее матрице Коши посредством формул (9)—(10), положителен, то среди систем (5) с m-возмущениями всегда есть неустойчивые (теорема 4.3.1). Если же Ω''_m существенно отрицателен, то все системы (5) с m-возмущениями асимптотически устойчивы ([8]; теорема 4.3.2) и Ω''_m точно описывает асимптотику их решений, т. е. является точной верхней границей множества старших показателей $\lambda_f \equiv \lim\limits_{\rho\to+0} \lambda_f(\rho)$ систем (5) с m-возмущениями (теорема 4.2). Значения m_∞ и m_0, начиная с которых наблюдается соответственно неустойчивость при $m < m_\infty$ и асимптотическая устойчивость при $m > m_0$, определяются равенствами (11) и (12) ([8]; теоремы 4.2, 4.3.4 и 4.3.2).

Основные результаты диссертации докладывались на 5-й Международной конференции по нелинейным колебаниям, 2-й Всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений, 2-й —4-й Республиканских конференциях математиков Белоруссии, на семинарах по обыкновенным дифференциальным уравнениям при Московском, Ленинградском, Белорусском университетах, Институте математики АН БССР и изложены в работах [6], [7], [15]—[26].

Институт математики АН БССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Алексеев В. М., Виноград Р. Э., К методу «замораживания», Вестник МГУ, Сер. матем., механ., № 5 (1966), 30—35.

[2] Богданов Ю. С., Характеристические числа систем линейных дифференциальных уравнений, Матем. сб., **41**, № 4 (1957), 481—498.

[3] Богданов Ю. С., Обобщенные характеристические числа неавтономных систем, Дифф. уравнения, **1**, № 9 (1965), 1140—1148.

[4] Былов Б. Ф., О приведении системы линейных уравнений к диагональному виду, Матем. сб., **67**, № 3 (1965), 338—344.

[5] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., «Наука», 1966.

[6] Былов Б. Ф., Изобов Н. А., Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей диагональной системы, Дифф. уравнения, 5, № 10 (1969), 1785—1793.
[7] Былов Б. Ф., Изобов Н. А., Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы, Дифф. уравнения, 5, № 10 (1969), 1794—1803.
[8] Виноград Р. Э., Необходимый и достаточный критерий и точная асимптотика устойчивости по первому приближению, Дифф. уравнения, 5, № 5 (1969), 800—813.
[9] Виноград Р. Э., Изобов Н. А., Решение задачи Ляпунова об устойчивости по первому приближению, Дифф. уравнения, 6 № 2 (1970), 230—242.
[10] Гробман Д. М., Характеристические показатели систем, близких к линейным, Матем. сб., 30, № 1 (1952), 121—166.
[11] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., «Наука», 1970.
[12] Елефтериади Ю. И., Достижимость оценки старшего показателя в методе замораживания в случае $n > 2$, Дифф. уравнения, 10, № 8 (1974), 1379—1386.
[13] Еругин Н. П., Приводимые системы, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 13, Л.— М., Изд-во АН СССР, 1946.
[14] Изобов Н. А., Об устойчивости по первому приближению, Дифф. уравнения, 2, № 7 (1966), 898—907.
[15] Изобов Н. А., О старшем показателе системы с возмущениями порядка выше первого, Вестник Белорусск. ун-та, Сер. 1, № 3 (1969), 6—9.
[16] Изобов Н. А., О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями, Дифф. уравнения, 5, № 7 (1969), 1186—1192.
[17] Изобов Н. А., Уточнение оценки в методе замораживания для двумерной системы с совпадающими характеристическими числами, Дифф. уравнения, 7, № 6 (1971), 990—996.
[18] Изобов Н. А., Случаи уточнения и достижимость оценки старшего показателя в методе замораживания, Дифф. уравнения, 7, № 7 (1971), 1179—1191.
[19] Изобов Н. А., О канонической форме линейной двумерной системы с переменными коэффициентами, Дифф. уравнения, 7, № 12 (1971), 2136—2142.
[20] Изобов Н. А., Коэффициентный признак устойчивости показателей Ляпунова двумерной линейной системы, Укр. матем. ж., 24, № 3 (1972), 306—315.
[21] Изобов Н. А., Обобщенный метод Эйлера интегрирования линейной системы с переменными коэффициентами, Дифф. уравнения, 9, № 6 (1973), 1001—1018.
[22] Изобов Н. А., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Матем. анализ, Итоги науки и техники, 12 (1974), 71—146.
[23] Изобов Н. А., О полупериодах решений двумерных линейных систем, Дифф. уравнения, 11, № 5 (1975), 782—797.

[24] Изобов Н. А., Минимальный показатель двумерной диагональной системы, Дифф. уравнения, **12**, № 11 (1976), 1954—1966.
[25] Изобов Н. А., Минимальный показатель двумерной линейной дифференциальной системы, Дифф. уравнения, **13**, № 5 (1977), 848—858.
[26] Изобов Н. А., Оценка снизу для минимального показателя линейной системы, Дифф. уравнения, **14**, № 9 (1978), 1576—1588.
[27] Ляпунов А. М., Собрание сочинений, т. 2, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1956.
[28] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, М., «Наука», 1966.
[29] Массера Х. Л., К теории устойчивости, Математика, **1**, № 4 (1957), 81—101.
[30] Миллионщиков В. М., Критерий устойчивости вероятного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами, Докл. АН СССР, **179**, № 3 (1968), 538—541.
[31] Миллионщиков В. М., К теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Матем. заметки, **4**, № 4 (1968), 483—490.
[32] Миллионщиков В. М., Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем, Сиб. матем. ж., **10**, № 1 (1969), 99—104.
[33] Миллионщиков В. М., Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений, Дифф. уравнения, **5**, № 10 (1969), 1775—1784.
[34] Персидский К. П., О характеристических числах дифференциальных уравнений, Изв. АН КазССР, Сер. матем., механ., **1**, (1947), 5—47.
[35] Плисс В. А., Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений, М., «Наука», 1977.
[36] Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р., Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений, М., «Наука», 1974.
[37] Bohl P., Über Differentialgleichungen, J. Reine Angew. Math., **144** (1913), 284—318.
[38] Perron O., Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reel ist, J. Reine Angew. Math., **142** (1931), 254—270.