В. П. Маслов, А. И. Шафаревич, Инварианты Фоменко в асимптотической теории уравнений Навье–Стокса, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2015, том 20, выпуск 3, 191–212

Инварианты Фоменко в асимптотической теории уравнений Навье—Стокса*

В. П. МАСЛОВ, А. И. ШАФАРЕВИЧ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: shafarev@yahoo.com

УДК 514.8

Ключевые слова: уравнения Навье—Стокса, инварианты Фоменко, системы вихрей.

Аннотация

Обсуждается связь между инвариантами Фоменко лиувиллевых слоений и асимптотическими решениями уравнений Навье—Стокса, описывающими различные системы вихрей в несжимаемой жидкости.

Abstract

V. P. Maslov, A. I. Shafarevich, Fomenko invariants in the asymptotic theory of the Navier–Stokes equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 3, pp. 191—212.

We discuss connections between Fomenko invariants of Liouville foliations and asymptotic solutions of the Navier–Stokes equations that describe vortex structures in an incompressible fluid.

К юбилею А. Т. Фоменко

1. Введение

Существует интересная связь между топологической теорией интегрируемых гамильтоновых систем, разработанной А. Т. Фоменко, его коллегами и учениками, и асимптотической теорией уравнений гидродинамики. Эта связь, обнаруженная в [8, 9, 19] и развитая в [12—15], основана на применении к уравнениям Навье—Стокса «многофазовой» схемы Крылова—Боголюбова—Уизема. Напомним основные этапы этой схемы.

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 13-01-0064-а, 14-01-00521-а и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-581.2014.1).

1.1. Уравнения Уизема

Схема Уизема (являющаяся обобщением на случай уравнений в частных производных известного метода Крылова—Боголюбова и, с другой стороны, нелинейным аналогом коротковолновых и квазиклассических асимптотик) применяется для описания асимптотических решений уравнений вида

$$\mathcal{L}\left(x, u, h\frac{\partial u}{\partial x}, h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, h\right) = 0. \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{L}$ — скалярный или векторный нелинейный оператор, действующий на функцию $u(x, h)$, где x — независимые переменные, а $h \to 0$ — малый параметр. Формальное асимптотическое решение ищется в виде

$$u = U\left(\frac{S(x)}{h}, x\right) + hU_1 + \dots, \tag{2}$$

где $S(x)$ — скалярная или векторная функция (фаза асимптотического решения). Обозначим через z «быстрые переменные» $z = S(x)/h$; зависимость $U(z)$ описывается «эталонными» уравнениями (аналог невозмущённой системы в классической схеме усреднения), получающимися подстановкой (2) в (1) и приравниванием к нулю коэффициента при старшей степени h:

$$L_0\left(U, \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \dots\right) = 0, \tag{3}$$

где L_0 — нелинейный оператор (старшая часть оператора $\mathcal{L}$ относительно данной асимптотической процедуры). Поправка U_1 удовлетворяет линейному неоднородному уравнению (уравнению в вариациях) вида

$$L_1[U]U_1 = F[U], \tag{4}$$

где $L_1[U]$ — линеаризованный на U оператор L_0, правая часть $F[U]$ зависит от U и её производных. Уравнения (3) и (4) играют ключевую роль в определении старшего члена асимптотики U; именно, сначала находится семейство решений нелинейного уравнения (3), а затем зависимость параметров этого семейства от «медленных» переменных x определяется из условий разрешимости уравнений для поправки (4) (эти условия в классической схеме теории возмущений приводят к усреднённой системе). Указанный метод наиболее полно развит для исследования «однофазовых» решений (т. е. решений со скалярной функцией $S(x)$) скалярных уравнений; тогда (3) и (4) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения и в качестве решений (3) можно выбирать, например, периодические траектории. Для широкого класса задач нетрудно установить существование конечномерных семейств таких траекторий и вычислить коядро (также конечномерное) линеаризованного оператора L_1; условия ортогональности F этому коядру приводят к уравнениям, определяющим зависимость U от переменных x (см., например, [3, 11]). Отметим, что семейства замкнутых траекторий уравнения (3) определяют асимптотические решения исходного уравнения (1), периодически зависящие от «быстрой» переменной z. Для описания локализованных решений (или решений типа «ударной волны») в «однофазовом» случае вместо замкнутых траекторий следует выбирать семейства сепаратрис, соединяющих два положения равновесия для (3). Соответствующая схема развита в [6], [2] и других работах, в частности, построены асимптотические решения, описывающие уединённые и (сглаженные) ударные волны для широкого класса исходных уравнений (1) (включая системы уравнений).

Значительно сложнее обстоит дело с «многофазовыми» асимптотиками (т. е. решениями, зависящими от нескольких «быстрых» переменных z — случай векторнозначных функций $S(x)$). Для построения таких решений требуется изучать уравнения в частных производных (3) и (4), первое из которых нелинейное. Вследствие этого соответствующая процедура развита в основном лишь для «интегрируемых» уравнений (т. е. в предположении, что «эталонное» уравнение (3) — бесконечномерная вполне интегрируемая гамильтонова система). В её основе лежат конечномерные семейства конечнозонных или многосолитонных решений уравнений (3), параметры которых (скорости и фазы солитонов или точка многообразия модулей римановых поверхностей, задающая конечнозонное решение) зависят от «медленных» переменных x (см. [3, 6, 11]). Отметим, что именно задачи описания эволюции «искажённых солитонов» или квазипериодических «волновых цугов» стимулировали бурное развитие схемы Уизема в последние десятилетия.

В [4, 5] изучались «однофазовые» периодические по «быстрой» переменной z асимптотические решения уравнений Навье—Стокса (в этом случае функция u и оператор $\mathcal{L}$ векторнозначны). При этом было обнаружено следующее важное обстоятельство, характерное для асимптотической теории уравнений гидродинамики: «эталонное» уравнение (3) (которое в «однофазовом» случае оказывается почти тривиальным) обладает бесконечномерным семейством точных решений, и вследствие этого коядро оператора L_1 бесконечномерно. В результате из условия разрешимости задачи (4) возникает бесконечное число уравнений, или, что то же самое, уравнения, содержащие «лишнюю» независимую переменную (в ситуации работ [5], [4] эта переменная есть просто единственная «быстрая» переменная $z = S(x)/h$). Соответствующая асимптотическая процедура развита в указанных выше работах и обобщена на уравнения магнитной гидродинамики (см., например, [6]). Отметим, что в гидродинамической задаче обтекания уравнения, возникающие из условий разрешимости (4), известны давно: это уравнения Прандтля теории пограничного слоя; уравнения работ [4—6] можно рассматривать как их (весьма нетривиальное) обобщение.

В [8, 9, 19] изучались многофазовые решения уравнений Навье—Стокса (в частности, решения, описывающие вихревые нити); при этом была обнаружена связь таких решений с топологическими инвариантами бездивергентных векторных полей и лиувиллевых слоений трёхмерных многообразий на двумерные торы. А именно, такие инварианты естественным образом возникают при рассмотрении соответствующих «эталонных» уравнений, а уравнения на «медленные параметры» (условия разрешимости для (4)) описывают эволюцию инвариантов. Сами эти уравнения по одной из переменных оказываются заданными на так называемом инварианте Фоменко, или молекуле [1], — графе, описывающем глобальную структуру лиувиллева слоения. Эта связь затем развивалась в серии работ [12—15]; в частности, с её помощью были описаны вихревые структуры типа пленок и нитей, заполняющих трёхмерный объём. Инвариант Фоменко играет центральную роль во всех этих работах; в некоторых более простых ситуациях он вырождается в так называемый граф Риба функции Морса — топологический инвариант гамильтонова поля на двумерной поверхности.

Ниже описаны асимптотические решения уравнений Навье—Стокса, связанные с уединёнными вихрями и так называемыми периодическими когерентными структурами; все они строятся с помощью указанных инвариантов.

1.2. Асимптотические решения уравнений Навье—Стокса

Поле скоростей $u(x,t)$ несжимаемой вязкой жидкости (зависящее от времени t векторное поле в $\mathbf{R}^3$) удовлетворяет уравнениям Навье—Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u,\nabla)u + \nabla\mathcal{P} = \nu\Delta u, \quad (\nabla, u) = 0. \tag{5}$$

Здесь $\mathcal{P}(x,t)$ — давление, ν — коэффициент вязкости. Вихревая структура описывается асимптотическим решением этих уравнений вида

$$u(x,t) = U\left(\frac{S(x,t)}{h}, x, t\right) + hU_1 + \ldots, \quad \mathcal{P} = \Pi\left(\frac{S(x,t)}{h}, x, t\right) + h\Pi_1 + \ldots, \tag{6}$$

где $h \to 0$, $h^2 = \nu$, $S(x,t)$ — одномерная, двумерная или трёхмерная вектор-функция; пространственные свойства такого поля определяются зависимостью функции $U(z,x,t)$ от вектора «быстрых» переменных $z = S/h$. Мы будем считать, что функция S трёхмерна и рассмотрим следующие две ситуации.

1. Уединённый вихрь. В этом случае $S \in \mathbf{R}^3$ и функция U достаточно быстро убывает при $|z| \to \infty$.
2. Когерентная структура — структура, состоящая из локализованных в одной точке вихрей, периодически расположенных в пространстве. В этом случае $S \in \mathbf{R}^3$ и функция $U(z,x,t)$ 2π-периодична по «быстрым» переменным $z = S/h$, т. е. переменные z меняются на трёхмерном торе $\mathbf{T}^3$.

Ниже подробно обсуждается конструкция уединённого вихря; в случае когерентной структуры все рассуждения очень похожи, поэтому мы укажем только на возникающие отличия — подробности можно найти в [12].

2. Асимптотическое описание точечных (уединённых) вихрей

2.1. Задача о движении уединённого вихря. Уравнения нулевого приближения и топологические инварианты лиувиллевых слоений

Движение уединённого вихря в идеальной жидкости описывается задачей Коши для уравнений Навье—Стокса (5) с начальным условием вида

$$u|_{t=0} = V_0(x) + v_0\left(\frac{x-y}{h}\right), \quad (\nabla, V_0) = 0, \quad (\nabla, v_0) = 0,$$

где $V_0(x)$ — гладкое ограниченное со всеми производными векторное поле (внешний поток), а вектор-функция $v_0(z)$ (уединённый вихрь) принадлежит пространству Шварца. Мы будем рассматривать начальные вихри специального вида — условия на v_0 приведены ниже. Асимптотическое решение такой задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} u &= V(x,t) + hV_1(x,t) + \ldots + v\left(\frac{x-R(t)}{h}, t\right) + \\ &\quad + hv^1\left(\frac{x-R(t)}{h}, x, t, h\right) + \ldots, \\ \mathcal{P} &= P(x,t) + hP_1(x,t) + \ldots + \pi_0\left(\frac{x-R(t)}{h}, t\right) + \\ &\quad + h\pi_1\left(\frac{x-R(t)}{h}, x, t, h\right) + \ldots, \end{aligned} \tag{7}$$

где $V(x,t)$, $V_1(x,t)$, $P(x,t)$, $P_1(x,t)$, $v(z,t)$, $\pi_0(z,t)$ — гладкие векторные поля и функции, причём v, v^1, π, π_1 достаточно быстро стремятся к нулю при $|z| \to \infty$. Относительно трёхмерной вектор-функции $R(t)$ будем предполагать, что кривая $x = R(t)$ — неособая траектория векторного поля $V(x,t)$ (легко проверить, что это условие необходимо для существования асимптотического решения указанного вида). Подставим (7) в (5) и рассмотрим полученные равенства вне некоторой не зависящей от h окрестности точки $R(t)$. Приравнивая к нулю возникающий коэффициент при h^0, получим для поля $V(x,t)$ уравнения Эйлера

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V, \nabla V) + \nabla P = 0, \quad (\nabla, V) = 0, \quad V|_{t=0} = V_0(x).$$

Ниже всюду предполагается, что $V(x,t)$ — гладкое при $t \in [0,T]$ решение этой задачи.

Рассмотрим теперь уравнения (5) в окрестности точки $R(t)$. Убивая возникающие при этом слагаемые порядка h^{-1} и учитывая, что $R(t)$ — траектория поля V, получаем для поля $v(z,t)$ трёхмерные стационарные уравнения Эйлера

$$(v, \nabla_z)v + \nabla_z\pi_0 = 0, \quad (\nabla_z, v) = 0. \tag{8}$$

При описании асимптотики центральную роль играют топологические инварианты эйлеровых полей с точностью до сохраняющих объём диффеоморфизмов $\mathbf{R}^3$. Ниже приводятся аргументы в пользу того, что эти инварианты параметризуют решения уравнений (8). Определим эти инварианты. Напомним (см. [10]), что решения уравнений Эйлера обладают следующими свойствами.

1. Векторное поле $\Omega = \mathrm{rot}_z v$ коммутирует с v (здесь rot_z — ротор по быстрым переменным z).
2. Векторное произведение $v \times \Omega$ является градиентом функции Бернулли $B = (v, v)/2 + \pi_0$.
3. Неособое компактное связное множество уровня функции B гомеоморфно тору; этот тор инвариантен относительно фазовых потоков полей v и Ω и движение на нём в силу любого из этих полей условно периодично.

Таким образом, топология стационарных эйлеровых полей аналогична топологии вполне интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы — такое поле определяет слоение трёхмерной области течения на двумерные торы, аналогичное лиувиллеву слоению изоэнергетической поверхности. Это обстоятельство позволяет ввести инвариант таких полей, аналогичный инварианту Фоменко (молекуле [1]), возникающему в теории гамильтоновых систем. Именно: обозначим через Γ множество компактных поверхностей уровня интеграла Бернулли B и будем рассматривать такие поля v, для которых Γ — граф, причём все внутренние точки его рёбер соответствуют неособым поверхностям уровня (т. е. двумерным торам).

Замечание 2.1. Отметим, что интеграл Бернулли B не может быть функцией Морса. Это следует из следующего простого утверждения (ср. с [1]).

Утверждение 2.1. *Любая изолированная критическая точка функции B является вырожденной.*

Доказательство. Пусть Q — изолированная критическая точка B. Если хотя бы одно из полей v, Ω в точке Q отлично от нуля, то через Q проходит траектория этого поля. Поскольку B — первый интеграл для обоих рассматриваемых полей, во всех точках этой траектории $dB = 0$, что противоречит изолированности критической точки Q. Таким образом, Q обязана быть положением равновесия сразу для двух полей v, Ω. Дифференцируя равенство $\nabla_z B = v \times \Omega$, получаем теперь, что матрица вторых производных B в точке Q тождественно равна нулю. □

Таким образом, Γ не является графом Риба. В теории топологической классификации гамильтоновых систем с двумя степенями свободы рассматриваются графы, являющиеся множествами поверхностей уровня так называемых функций Морса—Ботта [1]; для наших целей важно, что Γ — граф.

Ясно, что граф Γ, построенный по полю v, не изменится, если это поле преобразовать при помощи сохраняющего объём диффеоморфизма трёхмерного пространства. Более того, на этом графе возникает естественная параметризация, инвариантная относительно таких диффеоморфизмов. Именно: поставим в соответствие произвольной точке произвольного ребра графа (т. е. тору, инвариантному относительно потоков полей v и Ω) число I, равное объёму соответствующего полнотория, поделённому на $4\pi^2$. Тем самым определён топологический инвариант поля v — параметризованный граф Γ. На этом графе имеются дополнительные инварианты — функции частот поля v. Именно: рассмотрим произвольное ребро графа; оно определяет область трёхмерного пространства, гладко расслоённую на двумерные торы. Зафиксируем в этой области базис циклов на инвариантных торах, гладко меняющийся от тора к тору, и обозначим через $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, $\varphi_j \in [0, 2\pi]$, угловые координаты на торах, отвечающие этому базису. В координатах I, φ (которые в дальнейшем будем называть переменными действие-угол по аналогии с теорией интегрируемых гамильтоновых систем, см. [10]) поле v имеет вид

$$v = \omega_1(I)\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \omega_2(I)\frac{\partial}{\partial\varphi_2};$$

функции $\omega_j(I)$ (частоты) определены инвариантно относительно диффеоморфизмов. Таким образом, мы определили набор инвариантов поля v, состоящий из параметризованного графа Γ и пары гладких функций ω_1, ω_2 на его рёбрах.

Гипотеза 2.1. Существует такое открытое (в подходящем смысле) подмножество в множестве троек $(\Gamma, \omega_1, \omega_2)$, где Γ — параметризованный граф, а ω_j — гладкие функции на его рёбрах, что для каждой тройки из этого открытого подмножества найдётся гладкое решение v, π_0 уравнений Эйлера (8), для которого граф Γ — множество компактных поверхностей уровня интеграла Бернулли, а функции ω_j — частоты поля v на соответствующих торах.

Основания для гипотезы

2.1.1. Вариационный принцип для уравнений Эйлера [10]

Обозначим через $\mathfrak{K}$ пространство бездивергентных векторных полей v, получаемых друг из друга (или из некоторого фиксированного поля v_0) при помощи диффеоморфизмов пространства, сохраняющих объём (поля предполагаются достаточно быстро убывающими, а диффеоморфизмы — стабилизирующимися на бесконечности). Рассмотрим на этом пространстве интеграл энергии

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2}\int\limits_{R^2} v^2(z)\,dz.$$

Имеет место следующее утверждение (см., например, [10]).

Утверждение 2.2. *Уравнения* (8) — *это уравнения экстремалей функционала энергии $\mathfrak{J}$ на пространстве $\mathfrak{K}$.*

Ясно, что множество пространств $\mathfrak{K}$ параметризуется (по крайней мере) указанными выше инвариантами — графом и вектором частот на нём. Поэтому можно ожидать, что эти «параметры» сохранятся и в решениях соответствующих вариационных задач. Другими словами, если минимум функционала $\mathfrak{J}$ достигается на пространстве $\mathfrak{K}$, отвечающем некоторому значению инвариантов, то естественно ожидать существования минимума и на пространствах, задаваемых близкими значениями этих инвариантов.

2.1.2. Теория магнитной релаксации Моффатта [16—18]

В [16—18] развита формальная схема получения решений уравнений Эйлера (8) с наперёд заданной топологией линий тока (т. е. значениями топологических инвариантов). Эта схема основана на свойствах уравнений магнитной гидродинамики идеально проводящей жидкости, которые имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla_z)u + \nabla_z p = \mu\Delta_z u - H \times \mathrm{rot}_z H, \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} + \{u, H\} = 0, \\ (\nabla_z, u) = (\nabla_z, H) = 0, \end{cases}$$

где $H(z,t)$ — магнитное поле, $u(z,t)$ — поле скоростей проводящей жидкости, $\{\,,\}$ — коммутатор векторных полей, μ — коэффициент вязкости жидкости. Идея схемы Моффатта состоит в следующем. Рассмотрим для написанной системы уравнений задачу Коши

$$u|_{t=0} = 0, \quad H|_{t=0} = H_0(z), \quad (\nabla_z, H_0) = 0.$$

Если вязкость μ ненулевая (можно считать, что она достаточно велика), то по физическим соображениям естественно предполагать, что скорость жидкости затухает со временем, т. е. $u(z,t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда из второго уравнения системы магнитной гидродинамики следует, что векторное поле H (магнитное поле) стремится при $t \to \infty$ к некоторому предельному полю $H_\infty(z)$. С другой стороны, из первого уравнения получаем при этом, что H_∞ удовлетворяет уравнению

$$H_\infty \times \mathrm{rot}_z H_\infty = -\nabla_z p,$$

которое представляет собой просто другую форму записи стационарных уравнений Эйлера (8) (чтобы перейти от одной формы к другой, в (8) надо сделать замену $H_\infty = v$, $-p = v^2/2 + \pi_0$). Итак, при больших временах магнитное поле H, эволюционируя в силу уравнений магнитной гидродинамики, стремится к решению уравнений Эйлера. С другой стороны, второе уравнение системы магнитной гидродинамики означает, что векторное поле $H(z,t)$ получается из векторного поля $H_0(z)$ при помощи фазового потока поля u, т. е. (поскольку это поле бездивергентно) при помощи диффеоморфизма, сохраняющего объём. Таким образом, определённые выше топологические инварианты бездивергентного поля H не меняются со временем, поэтому у предельного поля H_∞ (которое удовлетворяет уравнениям Эйлера) они должны быть такими же, как и у начального поля H_0 (выбираемого произвольно). Отметим, что приведённые соображения носят, конечно, формальный характер (нужные для обоснования теоремы о поведении решений уравнений магнитной гидродинамики при больших временах не доказаны).

2.1.3. Структура коядра линеаризованного оператора

Наконец, третьим основанием для высказанной гипотезы является структура коядра линеаризованного оператора Эйлера, которая обсуждается ниже. В этом пространстве легко заметить пространства функций, заданных на графе Г.

2.2. Уравнения первого приближения. Коядро линеаризованных уравнений Эйлера

Уничтожим теперь слагаемые порядка h^0, возникающие при подстановке (7) в (5). Получим

$$\begin{cases} -(v,\nabla_z)v^1-(v^1,\nabla_z)v-\nabla_z\pi_1=\Phi(z,t), \\ (\nabla_z,v^1)=0, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\Phi=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}v+\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\nabla_z\right)v-\nu_0\Delta_z v$$

и матрица $\partial V/\partial x$ производных поля V вычисляется при $x=R(t)$. Система (9) представляет собой неоднородные линеаризованные уравнения Эйлера. Условия их разрешимости приводят к уравнениям на графе, которым должны удовлетворять частоты $\omega_j(I,t)$. Указанные условия связаны со структурой коядра линеаризованного оператора Эйлера, т. е. множества решений ξ уравнений

$$\begin{cases} (v,\nabla_z)\xi-\dfrac{\partial v^*}{\partial z}\xi=\nabla_z\chi, \\ (\nabla_z,\xi)=0. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь ξ — трёхмерное векторное поле, χ — скалярная функция.

Теорема 2.1. *Пусть $v(z)$ — гладкое решение уравнений* (8). *Тогда следующие гладкие векторные поля ξ удовлетворяют уравнениям* (10).

1. *Любое бездивергентное поле, коммутирующее и с $v(z)$, и с $\Omega(z)=\mathrm{rot}_z v$.*
2. *Любое постоянное векторное поле.*
3. *Любое векторное поле $\xi=Qz$, где $Q\in\mathrm{so}(3)$ — кососимметричная матрица.*

Замечание 2.2. Бездивергентные векторные поля первого типа образуют, очевидно, бесконечномерное линейное пространство. Это пространство в коядре линеаризованного оператора Эйлера порождается вариацией произвольных функций ω_1, ω_2 и может быть интерпретировано как пространство пар функций на графе Г. Действительно, введём в произвольной области трёхмерного z—пространства, гладко расслоённой на торы $B=\mathrm{const}$, описанные выше переменные действие-угол I, φ. Поля v и Ω в этих координатах имеют вид $\omega_1(I)\partial/\partial\varphi_1 + \omega_2(I)\partial/\partial\varphi_2$ и $\lambda_1(I)\partial/\partial\varphi_1 + \lambda_2(I)\partial/\partial\varphi_2$ соответственно, где $\omega_j(I)$, $\lambda_j(I)$ — частоты этих полей на соответствующем параметру I инвариантном торе. С другой стороны, любое бездивергентное коммутирующее с v и Ω поле ξ в тех же координатах имеет вид $b_1(I)\partial/\partial\varphi_1 + b_2(I)\partial/\partial\varphi_2$ ($b_j(I)$ — произвольные гладкие функции). Другими словами, лиувиллевы торы поля v являются инвариантными многообразиями и для поля ξ, которое тем самым определяется своим вектором частот b_1, b_2. Таким образом, множество бездивергентных полей, коммутирующих с v и Ω, интерпретируется как множество пар b_1, b_2 функций одной переменной I, которая меняется на графе Γ. Это обстоятельство является аргументом в пользу высказанной в предыдущем пункте гипотезы о параметризации множества решений уравнений Эйлера.

Остальные поля, указанные в теореме, порождаются симметриями уравнений Эйлера. Наличие в коядре трёхмерного пространства постоянных полей связано с инвариантностью этих уравнений относительно параллельных переносов, а наличие трёхмерного пространства, предъявленного в п. 3 — следствие инвариантности относительно поворотов.

Доказательство. Пусть ξ — поле, коммутирующее с v и Ω. Рассмотрим левую часть в уравнениях (10). Заменяя $(v,\nabla_z)\xi$ на $(\xi,\nabla_z)v = (\partial v/\partial z)\xi$, получаем

$$(v,\nabla_z)\xi - \frac{\partial v^*}{\partial z}\xi = \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v^*}{\partial z}\right)\xi = \Omega\times\xi.$$

Применим к этому полю оператор rot_z. Из стандартной формулы векторного анализа находим

$$\mathrm{rot}_z\left((v,\nabla_z)\xi - \frac{\partial v^*}{\partial z}\xi\right) = \{\xi,\Omega\} + \Omega(\nabla_z,\xi) - \xi(\nabla_z,\Omega) = 0,$$

поскольку бездивергентные поля ξ и Ω коммутируют. Пункты 2 и 3 проверяются непосредственным элементарным вычислением; функция χ в первом случае равна $-(C,v)$ (C — постоянное трёхмерное поле), а во втором — (z,Qv). $\square$

Описанная структура коядра линеаризованных уравнений Эйлера приводит к следующим условиям разрешимости системы (9).

Теорема 2.2. *Пусть существует гладкое решение системы* (9). *Тогда правая часть* Φ *удовлетворяет соотношениям*

$$\int\limits_T (\Phi,v)\,d\varphi + a_0\frac{\partial B}{\partial I} = 0, \quad \int\limits_T (\Phi,\Omega)\,d\varphi = 0. \tag{11}$$

Если при этом решение ограниченное вместе с производными, а поле v и его производные убывают при $|z|\to\infty$ как $O(|z|^{-3-\delta})$, $\delta>0$, то выполнены равенства

$$\int\limits_{R^3} \Phi\,dz = 0,$$

а если убывание порядка $O(|z|^{-4-\delta})$, $\delta > 0$, *то, кроме того,*

$$\int\limits_{R^3} (\Phi, Qz)\, dz = 0.$$

Здесь T *— произвольный неособый инвариантный тор полей* v, Ω, $d\varphi = d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$, Q *— произвольная кососимметричная матрица,* a_0 *— функция, не зависящая от* I, *т. е. одинаковая для всех неособых торов, принадлежащих одной области, в которой лиувиллево слоение неособо. Таким образом, в каждой такой области функция* a_0 *зависит только от* t.

Замечание 2.3. Выписанные условия возникают из условий ортогональности правой части в (9) указанным в теореме 2.1 пространствам в коядре линеаризованного оператора Эйлера. Именно, равенства (11) — это условия ортогональности бесконечномерному пространству из пункта 1 этой теоремы, записанные в специально выбранном «базисе оснащения этого пространства». Грубо говоря, он состоит из δ-образных полей с носителями на инвариантных торах поля v. Именно такой выбор «базиса» позволяет свести нахождение условий ортогональности к усреднению вдоль торов.

Доказательство. Докажем первое равенство в (11). Для этого умножим векторное уравнение в (9) скалярно на v. Получим

$$(\Phi, v) + (v, (v, \nabla_z)v^1 + (v^1, \nabla_z)v + \nabla_z \pi_1) = 0.$$

Преобразуя последние три слагаемых, получим

$$(\Phi, v) + (v, \nabla_z)[(v, v^1) + \pi_1] + (v^1, \nabla_z)B = 0.$$

После интегрирования по инвариантному тору T второе слагаемое пропадает; кроме того, поскольку интеграл Бернулли B постоянен на этом торе, последнее слагаемое после интегрирования будет иметь вид

$$\int\limits_T (v^1, \nabla_z)B\, d\varphi = \frac{\partial B}{\partial I} \int\limits_T v^1_I\, d\varphi,$$

где $v^1 = v^1_I \partial/\partial I + v^1_1 \partial/\partial\varphi_1 + v^1_2 \partial/\partial\varphi_2$. Отсюда будет следовать равенство (11), если проверить, что функция

$$a_0 = \int\limits_T v^1_I\, d\varphi$$

не зависит от I. Для этого проинтегрируем по тору T второе (скалярное) равенство в (9). В результате получим

$$0 = \int\limits_T (\nabla_z, v^1)\, d\varphi = \int\limits_T \left(\frac{\partial v^I}{\partial I} + \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v^1_j}{\partial \varphi_j} \right) d\varphi = \frac{\partial}{\partial I} \int\limits_T v^1_I d\varphi = \frac{\partial a_0}{\partial I},$$

что доказывает первое равенство в (11). Для доказательства второго равенства умножим векторное уравнение (9) скалярно на Ω. Получим

$$0 = (\Phi, \Omega) + (\Omega, \nabla_z)\pi_1 + (\Omega, (v, \nabla_z)v^1) + (\Omega, (v^1, \nabla_z)v) = \\ = (\Phi, \Omega) + (\Omega, \nabla_z)\pi_1 + (v, \nabla_z)(\Omega, v^1) - (v^1, (v, \nabla)\Omega) + (\Omega, (v^1, \nabla_z)v).$$

Учитывая, что поля v и Ω коммутируют, из последнего равенства получаем

$$\begin{aligned} 0 &= (\Phi, \Omega) + (\Omega, \nabla_z)\pi_1 + (v, \nabla_z)(\Omega, v^1) - (v^1, (\Omega, \nabla)v) + (\Omega, (v^1, \nabla_z)v) = \\ &= (\Phi, \Omega) + (\Omega, \nabla_z)\pi_1 + (v, \nabla_z)(\Omega, v^1) - \left(v^1, \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v^*}{\partial z}\right)\Omega\right) = \\ &= (\Phi, \Omega) + (\Omega, \nabla_z)\pi_1 + (v, \nabla_z)(\Omega, v^1) - (v^1, \Omega \times \Omega) = \\ &= (\Phi, \Omega) + (\Omega, \nabla_z)\pi_1 + (v, \nabla_z)(\Omega, v^1), \end{aligned}$$

откуда после интегрирования по тору T немедленно вытекает второе равенство в (11). Остальные равенства проверяются аналогично. □

Замечание 2.4. Условия разрешимости (11) можно представить в следующем виде. Отождествим векторное поле Φ в трёхмерном пространстве «быстрых» переменных z с дифференциальной 1-формой при помощи стандартной евклидовой структуры и ограничим полученную форму на инвариантный тор T. Обозначим через β построенную таким образом 1-форму на T. Равенства (11) имеют вид

$$\beta(v) + a_0 \frac{\partial B}{\partial I} = 0, \quad \beta(\Omega) = 0,$$

откуда можно выразить форму β:

$$\beta = \alpha_0 \frac{\partial B}{\partial I}\sigma, \quad \text{где} \quad \sigma = \frac{1}{\omega_1\lambda_2 - \omega_2\lambda_1}(\lambda_1 d\varphi_2 - \lambda_2 d\varphi_1).$$

Здесь ω_i, λ_i — частоты полей v, Ω соответственно на торе T.

Замечание 2.5. По-видимому, константа a_0, как правило, обращается в нуль. Например, если граф Γ является бинарным деревом (в терминологии [1] это означает, в частности, что все атомы, входящие в молекулу, имеют тип A или B), то нетрудно проверить, что эта функция должна обращаться в нуль во всех его вершинах степени 1, а в вершинах степени 3 удовлетворять условиям Кирхгофа (см. ниже). Отсюда немедленно следует, что $a_0 = 0$. Из последнего условия разрешимости в этом случае следует, что $\beta = 0$.

2.3. Уравнения уединённого вихря

Условия (11) приводят к уравнениям на функции частот ω_1, ω_2 (являющиеся топологическими инвариантами лиувиллева слоения). Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Равенства* (11) *эквивалентны следующим уравнениям на двумерный вектор* $\omega(I,t) = (\omega_1, \omega_2)$:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + Q\frac{\partial\omega}{\partial I} + R\omega = \nu_0\left(\mathcal{D}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial I^2} + M\frac{\partial\omega}{\partial I} + Z\omega\right) + a_0\frac{\partial B}{\partial I}G. \tag{12}$$

Здесь скалярная функция $\mathcal{D}^2$ *и элементы* (2×2)*-матриц* M, Z *выражаются через коэффициенты евклидовой метрики в трёхмерном пространстве «быстрых» переменных* z *и их производные, вычисленные в точках тора* T. *В частности,* $\mathcal{D}^2 = \langle\det g\rangle$, *где* g *— индуцированная риманова метрика на* T, *а угловыми скобками обозначено усреднение по этому тору. Элементы* (2×2)*-матриц* Q, R *имеют следующий вид:*

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^{2}\hat g^{ik}\left\langle g_{kj}\frac{\partial I}{\partial t}\right\rangle,$$

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{2}\hat g^{ik}\left\langle\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi_k},\ \frac{\partial^2 z}{\partial t\partial\varphi_j} + \frac{\partial^2 z}{\partial I\partial\varphi_j}\,\frac{\partial I}{\partial t} + \sum_{m=1}^{2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi_m\partial\varphi_j}\,\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right)\right\rangle.$$

Здесь $\hat g$ *— усреднённая по тору* T *метрика* g *(т. е.* $\hat g_{ij} = \langle g_{ij}\rangle$, *а* $\hat g^{ij}$ *— обратная к* $\hat g_{ij}$ *матрица). Вектор* G *получается из* 1*-формы* σ *при помощи метрики* $\hat g$. *Таким образом,*

$$G^i = \sum_{j=1}^{2}\hat g^{ij}\sigma^j.$$

Уравнения (12) *должны быть выполнены на каждом ребре графа* Γ.

Замечание 2.6. Если $a_0 = 0$ (см. замечание 2.5), то последнее слагаемое в правой части в (12) исчезает.

Доказательство. Для проверки равенств (12) надо вычислить форму β. Ясно, что она имеет вид $\beta_1 + \nu_0\beta_2$, где β_j не зависят от ν_0. Вычислим сперва β_1. Для этого перейдём от координат z к координатам «действие-угол» I, φ в окрестности тора T (отметим, что замена координат, вообще говоря, зависит от времени t); вектор v при этом имеет вид $v = \omega_i e_i$, где $e_i = \partial/\partial\varphi_i$ (здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 2). Рассмотрим вектор $\partial v/\partial t$. Этот вектор имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial t}\right)e_i + \omega_i\left[\frac{\partial e_i}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial t}\,\frac{\partial e_i}{\partial I} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\,\frac{\partial e_i}{\partial\varphi_k}\right].$$

Умножая его на e_j и усредняя по тору, получаем

$$\left\langle\left(e_j,\ \frac{\partial v}{\partial t}\right)\right\rangle = \hat g_{ij}\frac{\partial\omega_i}{\partial t} + \left\langle\left(e_j,\ \frac{\partial I}{\partial t}e_i\right)\right\rangle\frac{\partial\omega_i}{\partial I} + {}$$
$$+\,\omega_i\left\langle\left(e_j,\ \frac{\partial e_i}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial t}\,\frac{\partial e_i}{\partial I} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial t}\,\frac{\partial e_i}{\partial\varphi_k}\right)\right\rangle. \tag{13}$$

Докажем теперь тождества

$$\left\langle\left(v,\ \frac{\partial V}{\partial x}v+\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\ \nabla_z\right)v\right)\right\rangle=\left\langle\left(\Omega,\ \frac{\partial V}{\partial x}v+\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\ \nabla_z\right)v\right)\right\rangle=0. \qquad (14)$$

Преобразуем первое из выписанных выражений, учитывая уравнения Эйлера для v и определение интеграла Бернулли B. Получим

$$\begin{aligned}
&\left(v,\ \frac{\partial V}{\partial x}v+\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\nabla_z\right)v\right)=\left(v,\ \frac{\partial V}{\partial x}v\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\ \nabla_z\right)\frac{v^2}{2}=\\
&=\left(v,\ \frac{\partial V}{\partial x}v\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\ \nabla_z\right)B-\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\ \nabla_z\right)\pi_0=\\
&=\left(v,\ (v,\nabla_z)\frac{\partial V}{\partial x}z\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\ (v,\nabla_z)v\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\ \nabla_z\right)B=\\
&=(v,\nabla_z)\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\ v\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\ \nabla_z\right)B.
\end{aligned}$$

Для второго скалярного произведения получаем

$$\begin{aligned}
&\left(\Omega,\ \frac{\partial V}{\partial x}v+\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\ \nabla_z\right)v\right)=\left(\Omega,\ \frac{\partial V}{\partial x}v\right)+\left(\Omega,\ \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x}z\right)=\\
&=\left(\Omega,\ \frac{\partial V}{\partial x}v\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\Omega,\ \frac{\partial V}{\partial x}z\right)-\left(\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v^*}{\partial z}\right)\Omega,\ \frac{\partial V}{\partial x}z\right)=\\
&=\left(\Omega,\ \frac{\partial V}{\partial x}v\right)+\left((\Omega,\nabla_z)v,\ \frac{\partial V}{\partial x}z\right)-\left(\Omega\times\Omega,\ \frac{\partial V}{\partial x}z\right)=\\
&=(\Omega,\nabla_z)\left(v,\ \frac{\partial V}{\partial x}z\right)-\left(v,\ \frac{\partial V}{\partial x}\Omega\right)+\left(\Omega,\ \frac{\partial V}{\partial x}v\right)=\\
&=(\Omega,\nabla_z)\left(v,\ \frac{\partial V}{\partial x}z\right)+(\Omega,\operatorname{rot}V\times v)=\\
&=(\Omega,\nabla_z)\left(v,\ \frac{\partial V}{\partial x}z\right)+(\operatorname{rot}V,\ v\times\Omega)=(\Omega,\nabla_z)\left(v,\frac{\partial V}{\partial x}z\right)+(\operatorname{rot}V,\nabla_z)B.
\end{aligned}$$

Здесь вектор $\operatorname{rot}V$ вычисляется в точках кривой $x=R(t)$. Усредняя по тору T, находим из последних формул, что

$$\left\langle\left(v,\ \frac{\partial V}{\partial x}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\ \nabla_z\right)v\right)\right\rangle=\frac{\partial B}{\partial I}\langle a_I\rangle,$$

$$\left\langle\left(\Omega,\ \frac{\partial V}{\partial x}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}z,\ \nabla_z\right)v\right)\right\rangle=\frac{\partial B}{\partial I}\langle b_I\rangle.$$

Здесь

$$a=\frac{\partial V}{\partial x}z,\quad b=\operatorname{rot}V$$

и индекс I означает соответствующую компоненту вектора при разложении по базису, порождённому координатами I, φ. Докажем, что $\langle b_I\rangle=0$. Поскольку форма объёма в координатах I, φ имеет вид $dI \wedge d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$ (т. е. якобиан перехода от z к I, φ равен единице), получаем

$$b_I = b_i \frac{\partial I}{\partial z_i} = \sum_{i=1}^{3} b_i \{z_j, z_k\},$$

где индексы i, j, k образуют циклическую перестановку индексов 1, 2, 3, а фигурными скобками обозначена скобка Пуассона функций на торе T с симплектической структурой $d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$. Поскольку коэффициенты b_i не зависят от z, а среднее по тору от скобки Пуассона любых двух гладких функций равно нулю, получаем требуемое равенство. Рассмотрим теперь коэффициент $\langle a_I \rangle$. После элементарных вычислений получим

$$\langle a_I \rangle = \sum_{i=1}^{3} \left\langle a_i \frac{\partial I}{\partial z_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \langle z_j \{z_k, z_m\} \rangle = \operatorname{Sp} \frac{\partial V}{\partial x} \langle z_1 \{z_2, z_3\} \rangle,$$

где индексы i, k, m образуют циклическую перестановку индексов 1, 2, 3. Поскольку поле V бездивергентно, последнее выражение равно нулю, что доказывает (14).

Рассмотрим теперь форму β_2. Нетрудно убедиться, что координаты этой формы линейно зависят от ω_i, $\partial \omega_i / \partial I$, $\partial^2 \omega_i / \partial I^2$, причём коэффициенты выражаются через средние по тору от элементов евклидовой метрики в координатах I, φ и их производных. Вычислим коэффициенты при $\partial \omega_i / \partial I^2$. Для этого представим форму β_2 в виде

$$\beta_2 = \mu_i f_i, \quad \mu_i = -\langle g_{ij} A_j \rangle,$$

где A_j — коэффициенты разложения вектора $\operatorname{rot}_z \Omega = -\Delta_z v$ по базису, порождённому координатами действие-угол:

$$\operatorname{rot}_z \Omega = A_j \frac{\partial}{\partial \varphi_j} + a_3 \frac{\partial}{\partial I}.$$

В результате прямых, но громоздких вычислений получаем для μ_i выражения

$$\mu_1 = -\langle \det g \rangle \frac{\partial \lambda_2}{\partial I} + \mu_1^0, \quad \mu_2 = \langle \det g \rangle \frac{\partial \lambda_1}{\partial I} + \mu_2^0,$$

где μ_j^0 не содержат производных от частот λ_j вектора Ω. Записывая вектор $\operatorname{rot}_z v$ в координатах действие-угол и учитывая, что этот вектор имеет вид $\lambda_i \partial / \partial \varphi_i$, а $v = \omega_i \partial / \partial \varphi_i$, получаем после несложных вычислений, что

$$\lambda_1 = -\frac{\partial}{\partial I} (\omega_i \langle g_{i2} \rangle), \quad \lambda_2 = \frac{\partial}{\partial I} (\omega_i \langle g_{i1} \rangle).$$

Подставляя эти формулы в выражения для μ_j, получаем, что форма β_2 имеет вид

$$\beta_2 = \langle \det g \rangle \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial I^2} d\varphi_i + \beta_2^0,$$

где коэффициенты формы β_2^0 линейно выражаются через ω_i, $\partial \omega_i / \partial I$. Из последнего равенства и формул (13), (14) после элементарных выкладок следует утверждение теоремы. □

2.4. Условия Кирхгофа для уравнений уединённого вихря

2.4.1. 3-атомы и допустимые частоты на лиувиллевых торах

Каждое ребро графа Γ отвечает области трёхмерного пространства, гладко расслоённой на двумерные торы. Рассмотрим теперь произвольную вершину этого графа; она изображает особое множество уровня интеграла Бернулли B. Рассмотрим окрестность этого особого множества. Предположим, что она является 3-атомом в смысле [1], т. е. представляет собой компактное связное ориентируемое многообразие с краем, снабжённое структурой расслоения Зейферта, причём последнее либо тривиально, либо имеет тип $(1,2)$ [1]. Край многообразия состоит из нескольких торов. Поскольку все они расположены в $\mathbf{R}^3$, ровно один из этих торов является внешним (т. е. все многообразие заключено внутри него), а остальные — внутренними (атом лежит вне каждого такого тора).

Замечание 2.7. В топологической теории интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [1] окрестности особых слоёв лиувиллева слоения являются 3-атомами в силу условия Морса—Ботта на дополнительный интеграл и требования топологической устойчивости. Конечно, в нашей ситуации можно подчинить эйлерово поле v аналогичным требованиям, однако для наших целей не существенно, какие условия гарантируют «атомную» структуру особых множеств, так что мы будем считать, что такая структура нам известна априори.

Рассмотрим теперь соответствующую внутреннюю вершину графа. Этой вершине инцидентно несколько рёбер, причём ровно одно из них является выходящим, а остальные — входящими (напомним, что граф ориентирован в направлении возрастания параметра I — объёма полнотория). Именно, выходящее ребро соответствует внешнему граничному тору атома, а входящие — внутренним граничным торам. Обозначим через η, ζ допустимые базисы циклов на неособых торах атома (см. [1]); напомним их определение. Первый базисный цикл η на торе Лиувилля — это слой расслоения Зейферта; при стремлении тора к критической окружности этот цикл также стремится к этой окружности, проходимой один или два раза в зависимости от того, тривиально или нет слоение Зейферта на атоме. Второй цикл ζ дополняет η до базиса; если слоение Зейферта тривиально, этот цикл строится как пересечение тора Лиувилля с двумерной поверхностью — глобальным сечением слоения Зейферта. Если же слоение не тривиально, второй цикл определяется как пересечение тора с глобальным сечением «тривиализованного» слоения Зейферта; последнее получается выбрасыванием из атома малых окрестностей критических окружностей. При этом сечение должно удовлетворять следующему условию: его пересечение ζ' с границей трубчатой окрестности критической окружности связано со слоем η слоения Зейферта и исчезающим циклом $\varkappa$ соотношением $\eta = \varkappa + 2\zeta$.

Замечание 2.8. Допустимый базис циклов определён, конечно, неоднозначно. Именно, к каждому циклу ζ можно прибавить цикл $k\eta$, причём сумма целых чисел k по всем граничным торам данного атома должна равняться нулю (см. [1]).

Выбор базиса циклов определяет частоты поля v на неособых торах лиувиллева слоения, входящих в данный атом. Обозначим через ω_0 частоту, соответствующую циклу η (слою слоения Зейферта), а через ω' — частоту, соответствующую циклу ζ. Ясно, что ω_0 — гладкая функция на атоме, постоянная на каждом торе Лиувилля (отметим, что функция ω' негладкая — её асимптотика при прохождении через критическую окружность приведена, например, в [1]).

2.4.2. Условия Кирхгофа на 3-атоме

Теорема 2.4. *В каждой внутренней вершине* (*т. е. вершине степени, большей* 1) *графа* Γ, *соответствующей* 3-*атому, функции*

$$a,\ \mathbf{D}^2\frac{\partial B}{\partial I},\ \mathbf{D}^2\frac{\partial \omega_0}{\partial I}$$

удовлетворяют условиям Кирхгофа

$$a_{\mathrm{out}} = a_{\mathrm{in}},\quad \left(\mathbf{D}^2\frac{\partial \omega_0}{\partial I}\right)_{\mathrm{out}} = \left(\mathbf{D}^2\frac{\partial \omega_0}{\partial I}\right)_{\mathrm{in}},\quad \left(\mathbf{D}^2\frac{\partial B}{\partial I}\right)_{\mathrm{out}} = \left(\mathbf{D}^2\frac{\partial B}{\partial I}\right)_{\mathrm{in}},\tag{15}$$

где индексом «out» обозначен предел соответствующей функции в данной вершине по выходящему ребру, а индексом «in» — сумма её пределов по входящим рёбрам. Здесь $\mathbf{D}^2 = \langle g^{11}\rangle$, *где* g^{11} — *элемент евклидовой метрики в* $\mathbf{R}^3_z$ *в координатах действие-угол, соответствующий координате* I.

Доказательство. Рассмотрим гладкое финитное векторное поле v_0, совпадающее с v^1 в некоторой окрестности атома Q, и проинтегрируем по Q его дивергенцию. Получим

$$\int\limits_Q (\nabla_z, v_0)\,dz = \int\limits_{\Lambda^+} (v_0, ds) - \int\limits_{\Lambda^-} (v_0, ds),$$

причём слагаемые в правой части равенства — это потоки поля v_0 через внешнюю (Λ^+) и внутреннюю (Λ^-) границы атома Q. С другой стороны,

$$\int\limits_{\Lambda^+} (v_0, ds) = 4\pi a_{\mathrm{out}},\qquad \int\limits_{\Lambda^-} (v_0, ds) = 4\pi a_{\mathrm{in}}$$

(напомним, что $v^1 = v^1_I\partial/\partial I + v^1_{\varphi_1}\partial/\partial\varphi_1 + v^1_{\varphi_2}\partial/\partial\varphi_2$, причём $a = \langle v^1_I\rangle$). Поскольку объём атома Q может быть сделан сколь угодно малым, из приведённых формул следуют равенства Кирхгофа для функции a. Аналогично выводятся равенства Кирхгофа и для остальных функций: вместо (∇_z, v^1) надо интегрировать $\Delta_z B$ и $\Delta_z\omega_0$. □

Следствие 2.1. *Пусть все вершины графа* Γ *изображают* 3-*атомы. Для каждого ребра графа выберем на лиувиллевых торах соответствующей области трёхмерного пространства базис циклов и тем самым определим частоты*

ω_1, ω_2 поля v. На лиувиллевых торах каждого атома выберем допустимый базис циклов η, ζ (см. [13] и предыдущий раздел). С каждой вершиной степени $m+1$ графа Γ свяжем набор целочисленных двумерных векторов $A_0, A_1, \ldots, A_m$, определённых следующим образом. Рассмотрим j-е ребро графа, инцидентное данной вершине (индекс j меняется от 0 до m, причём нулевой номер имеет выходящее из вершины ребро). На лиувиллевых торах, соответствующих этому ребру, имеется базис циклов γ_1, γ_2, порождающий частоты ω_1, ω_2, и базис η, ζ. Эти базисы выражаются друг через друга. Пусть $\gamma_1 = A_j^1\eta + A_j^2\zeta$ (отметим, что те же коэффициенты выражают частоту ω_0 через частоты ω_1, ω_2). Теперь условия Кирхгофа для ω_0 в вершинах графа можно переписать в терминах частот ω_1, ω_2; именно, из предыдущей теоремы следуют формулы

$$(A_0, \omega^0) = \sum_{j=1}^{m} (A_j, \omega^j),$$

где ω^j — предел вектора частот $\omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ по j-му ребру графа в данной вершине.

Замечание 2.9. В вершинах степени 1 графа Γ (они соответствуют вырождению тора в окружность, а не перестройке торов) функция a обращается в нуль. Это проверяется аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Замечание 2.10. Предположим, что все вершины графа Γ соответствуют 3-атомам. Естественно предполагать, что эти атомы устойчивы, т. е. не рассыпаются при малой деформации (действительно, в задаче об уединённом вихре поле v зависит от дополнительного параметра — времени t, изменение которого должно, вообще говоря, привести к распаду неустойчивых атомов). Такие атомы бывают трёх типов: A (вырождение тора в окружность, ему соответствует вершина степени 1 графа G), B (перестройка двух торов в один, ему соответствует вершина степени 3, а сам атом имеет структуру тривиального расслоения Зейферта) и A^* (перестройка одного тора в один, такому атому соответствует вершина степени 2, а соответствующее расслоение Зейферта нетривиально). В этом случае условия Кирхгофа на атомах B, A^* вместе с условием обращения в нуль в вершинах, соответствующих атомам A, полностью определяют функцию a: она просто равна нулю.

2.5. О вихрях Моффатта

В [18] К. Моффатт приводит примеры семейств стационарных решений уравнений Эйлера, траектории которых расположены на инвариантных двумерных торах. Эти примеры строятся следующим образом. Рассмотрим полуплоскость p, z, $p > 0$, $z \in \mathbf{R}$, и на этой полуплоскости зададим гладкую функцию (функцию тока) $\psi(z, p)$, удовлетворяющую уравнению Грэда—Шафранова

$$2p\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 2pF(\psi) - G(\psi)G'(\psi),$$

где $F(\tau)$, $G(\tau)$ — гладкие функции одной переменной. Трёхмерное векторное поле

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{2p}G(\psi)\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial}{\partial z}, \quad p = \frac{r^2}{2}$$

удовлетворяет стационарным уравнениям Эйлера (здесь r, φ, z — цилиндрические координаты в $\mathbf{R}^3$). Траектории этого поля лежат на поверхностях $\psi = \mathrm{const}$. Если линия уровня $\psi(p, z) = c$ на полуплоскости $p > 0$ замкнута, то соответствующая поверхность гомеоморфна тору. Будем рассматривать функции ψ на полуплоскости, удовлетворяющие следующим условиям.

1. Все особые точки ψ невырожденны и нет линий уровня, соединяющих две седловые точки.
2. Функция ψ достаточно быстро убывает при $p^2 + z^2 \to \infty$ и при $p \to 0$.
3. Почти все линии уровня этой функции замкнуты.

В этих предположениях трёхмерное пространство разбивается на двумерные торы вращения $\psi(z, r^2/2) = \mathrm{const}$. Эти торы вырождаются на оси z, а также на окружностях $z = z_j$, $r = \sqrt{2p_j}$, где z_j, p_j — критические точки функции $\psi(z, p)$. Инвариант Фоменко (фактор-пространство $\mathbf{R}^3$ по торам) совпадает в данном случае с графом Риба функции $\psi(z, p)$; пара произвольных функций на этом графе, параметризующая решения уравнений Эйлера — это пара $F(\psi)$, $G(\psi)$.

3. Асимптотическое описание когерентной структуры

Обсудим кратко конструкцию когерентной структуры. Асимптотическое решение ищется в виде (6), где все функции периодически зависят от «быстрых» переменных z.

3.1. Уравнения Эйлера

Аналогично случаю уединённого вихря зависимость старшей части асимптотики от быстрых переменных определяется стационарными уравнениями Эйлера. Разница состоит в том, что теперь эти уравнения заданы на трёхмерном торе с плоской метрикой $g^{ij} = (\nabla S_i, \nabla S_j)$. Топологические инварианты эйлерова поля определяются аналогично (они основаны на инвариантах Фоменко лиувиллева слоения трёхмерного тора на двумерные). Гипотеза о параметризации формулируется так же.

3.2. Коядро линеаризованных уравнений Эйлера

Аналогично случаю уединённого вихря коядро линеаризованных уравнений Эйлера бесконечномерно, только теперь в нём нет трёхмерного пространства, порождённого вращениями $\mathbf{R}^3$.

3.3. Уравнения когерентной структуры и условия Кирхгофа

Уравнения (12) заменяются на уравнения на вектор частот следующего вида:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (w, \nabla\omega) + Q\frac{\partial\omega}{\partial I} + r\omega = \mathcal{D}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial I^2} + a\frac{\partial B}{\partial I}, \quad \frac{\partial a}{\partial I} + R = 0. \tag{16}$$

Здесь коэффициенты (2×2)-матриц Q, r, скалярные функции R, $\mathcal{D}$ и векторное поле w выражаются через ω и коэффициенты плоской метрики на $\mathbf{T}^3$, вычисленные в точках лиувиллева тора.

3.4. Напряжения Рейнольдса

Следующее утверждение доказывается интегрированием уравнений (16) по трёхмерном тору $\mathbf{T}^3$.

Теорема 3.1. *Пусть уравнения* (16) *имеют гладкое решение. Тогда справедливы равенства*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V, \nabla V) + \nabla\mathcal{P} + \overline{(w, \nabla w) + w(\nabla, w)} = 0, \quad (\nabla, V) = 0. \tag{17}$$

Здесь $V = \bar{U}$, $w = U - \bar{U}$, *черта означает усреднение по тору* $\mathbf{T}^3$.

4. Связь с теорией развитой турбулентности

Приведённое выше асимптотическое описание вихревых структур имеет ряд общих черт с теорией турбулентности.

4.1. Наличие напряжений Рейнольдса

Усреднённое поле скоростей во всех описанных случаях удовлетворяет уравнениям, аналогичным уравнениям Рейнольдса. Как известно, наличие напряжений Рейнольдса играет существенную роль в теории турбулентности, так как может приводить к росту энергии среднего поля.

4.2. Аналог турбулентной вязкости

Полученные уравнения движения вихревых структур содержат слагаемые, описывающие влияние вязкости на эти структуры. В эти слагаемые входит коэффициент, аналогичный турбулентной вязкости, вообще говоря, нелинейная функция от поля скоростей.

4.3. Колмогоровский масштаб и закон Колмогорова

Старшая часть описанных выше решений уравнений Навье—Стокса удовлетворяет уравнениям Эйлера. Поэтому они неустойчивы относительно более мелкомасштабных возмущений. Точнее, линеаризуем уравнения Навье—Стокса на решении вида (6) и рассмотрим асимптотические решения линеаризованных уравнений вида

$$u = e^{i\sigma(z,x,t)/\varepsilon}(\eta(z,x,t) + \varepsilon\eta_1(z,x,t) + \ldots), \quad \varepsilon \to 0. \tag{18}$$

Оказывается, такие решения растут со временем. Точнее, несложно доказывается следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Пусть линеаризованные уравнения Навье—Стокса допускают решения вида* (18). *Тогда функция* $\eta(z,x,t)$ *удовлетворяет системе линейных уравнений вида*

$$\dot{\eta} + A(t)\eta = 0,$$

где $\dot{\eta}$ *— производная функции* η *вдоль траекторий поля* $U(z,x,t)$, $A(t)$ *— матричная функция. Решения этой системы, вообще говоря, растут при* $t \to \infty$*; более того, существуют поля* U, *удовлетворяющие уравнениям Эйлера, для которых рост экспоненциальный.*

Неустойчивость приводит к росту мелкомасштабных возмущений и тем самым к изменению вихревой структуры U, причём возникающая новая многофазовая структура снова удовлетворяет уравнениям Эйлера, если только $\varepsilon \gg \sqrt{h}$. При этом условии растут ещё более мелкомасштабные возмущения, причём этот рост связан только с тем, что старшая часть когерентной структуры удовлетворяет уравнениям Эйлера. Таким образом, рост продолжается до тех пор, пока новый масштаб не станет равным $h\sqrt{h} = h^{3/2}$, т. е. $\nu^{3/4}$ (закон Колмогорова). В этом случае старшая часть решения удовлетворяет уравнениям типа Навье—Стокса (включающим вязкие слагаемые).

Литература

[1] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. — Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999.

[2] Вакуленко С. А., Молотков И. А. Волны в нелинейной неоднородной среде, сосредоточенные в окрестности заданной кривой // ДАН СССР. — 1982. — Т. 262, № 3. — С. 587—591.

[3] Доброхотов С. Ю., Маслов В. П. Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. — 1980. — Т. 15. — С. 3—94.

[4] Маслов В. П. Когерентные структуры, резонансы и асимптотическая неединственность для уравнений Навье—Стокса при больших числах Рейнольдса // УМН. — 1986. — Т. 41, № 6. — С. 19—35.

[5] Маслов В. П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1987.

[6] Маслов В. П., Омельянов Г. А. Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // УМН. — 1981. — Т. 36, № 3. — С. 63—126.

[7] Маслов В. П., Омельянов Г. А. Быстроосциллирующие асимптотические решения уравнений МГД в приближении Токамака // Теор. и матем. физ. — 1992. — Т. 92, № 2. — С. 879—895.

[8] Шафаревич А. И. Дифференциальные уравнения на графах, описывающие асимптотические решения уравнений Навье—Стокса, сосредоточенные в малой окрестности кривой // Дифференц. уравн. — 1998. — Т. 34, № 8. — С. 1119—1130.

[9] Шафаревич А. И. Обобщённые уравнения Прандтля—Маслова на графах, описывающие растянутые вихри в несжимаемой жидкости // Докл. РАН. — 1998. — Т. 358, № 6. — С. 752—756.

[10] Arnold V. I., Khesin B. Topological Methods in Hydrodynamics. — New York: Springer, 1998. — (Appl. Math. Sci.; Vol. 125).

[11] Flashka H., Forest M., McLaughlin D. The multiphase averaging and the inverse spectral solution of Korteweg—de Vries equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1980. — Vol. 33, no. 6. — P. 739—784.

[12] Maslov V. P., Shafarevich A. I. Rapidly oscillating asymptotic solutions of the Navier—Stokes equations, coherent structures, Fomenko invariants, Kolmogorov spectrum, and flicker noise // Russ. J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 13, no. 4. — P. 414—425.

[13] Maslov V. P., Shafarevich A. I. Asymptotic solutions of the Navier—Stokes equations describing periodic systems of localized vortices // Math. Notes. — 2011. — Vol. 90, no. 5. — P. 686—700.

[14] Maslov V. P., Shafarevich A. I. Asymptotic solutions of the Navier—Stokes equations and systems of stretched vortices filling a three-dimensional volume // Math. Notes. — 2012. — Vol. 91, no. 2. — P. 207—216.

[15] Maslov V. P., Shafarevich A. I. Asymptotic solutions of Navier—Stokes equations and topological invariants of vector fields and Liouville foliations // Theor. Math. Phys. — 2014. — Vol. 180, no. 2. — P. 967—982.

[16] Moffatt H. K. Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrary complex topology. 1 // Fundam. J. Fluid Mech. — 1985. — Vol. 159. — P. 359—378.

[17] Moffatt H. K. On the existence of Euler flows that are topologically accessible from a given flow // Rev. Brasil. Cienc. Mec. — 1987. — Vol. 9. — P. 93—101.

[18] Moffatt H. K. Generalized vortex rings with and without swirl // Fluid Dynamics Research. — 1988. — Vol. 3. — P. 22—30.

[19] Shafarevich A. I. Asymptotical and topological constructions in hydrodynamics // Operator Methods in Ordinary and Partial Differential Equations. S. Kovalevsky Symp., Univ. Stockholm, June 2000. Pt. 2. — Basel: Birkhäuser, 2002. — (Operator Theory: Advances and Applications; Vol. 132). — P. 347—359.