Алгебра и логика, 54, № 5 (2015), 589—598

DOI: 10.17377/alglog.2015.54.503 УДК 512.545

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СВОБОДНЫХ m-ПРОИЗВЕДНИЙ m-ГРУПП АВТОМОРФИЗМАМИ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

С. В. ВАРАКСИН

Напомним, что *m-группой* (G, φ) называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, \varphi \rangle$, являющаяся ℓ-группой, где дополнительная одноместная операция φ — это автоморфизм второго порядка группы $\langle G, \cdot, e, ^{-1} \rangle$ и антиизоморфизм решётки $\langle G, \vee, \wedge \rangle$, т. е. для любых $x, y \in G$ верны соотношения

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),\ \varphi(\varphi(x)) = x,$$
$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y),\ \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \vee \varphi(y).$$

В дальнейшем m-группу G с фиксированным автоморфизмом φ_G будем записывать в виде пары (G, φ_G) и, как правило, опускать индекс.

Пусть G — группа с частичным порядком P и автоморфизмом второго порядка φ. Будем говорить, что порядок P *реверсируется* автоморфизмом φ, если из соотношения $x \underset{P}{\leqslant} y$ следует $\varphi(y) \underset{P}{\leqslant} \varphi(x)$. В частности, это эквивалентно условию $\varphi(G^+) = G^-$. Назовём φ *реверсией*, а группу (G, φ) *частично упорядоченной* (ч. у.) группой с реверсией.

Пусть (G, φ_G) и (H, φ_H) — ч. у. группы с реверсиями. Порядковый гомоморфизм $\psi : G \to H$ назовём *порядковым φ-гомоморфизмом*, если $\varphi_G\psi(g) = \psi\varphi_H(g)$.

Пусть (G, φ) — ч. у. группа с реверсией. Назовём m-группу (F, φ) *свободной* над (G, φ), если

© Сибирский фонд алгебры и логики, 2015

(1) существует порядковый φ-эпиморфизм $\varepsilon : (G, \varphi) \to (F, \varphi)$, $\varphi_G \varepsilon = \varepsilon \varphi_F$;

(2) m-группа (F, φ) порождается ч. у. группой $\varepsilon(G)$;

(3) для любого порядкового φ-гомоморфизма $\alpha : (G, \varphi) \to (H, \varphi)$ в m-группу (H, φ) существует m-гомоморфизм $\beta : (F, \varphi) \to (H, \varphi)$, $\varepsilon\beta = \alpha$.

Очевидно, что любые две свободные m-группы над одной ч. у. группой с реверсией изоморфны.

Пусть Λ — некоторое линейно упорядоченное множество, и a — реверсивный автоморфизм 2-го порядка Λ, т. е. для любых $\lambda < \lambda' \in \Lambda$ верно $a(\lambda) > a(\lambda')$ и $a^2(\lambda) = \lambda$. Через $\mathrm{Aut}\,(\Lambda)$ обозначим группу всех порядковых подстановок Λ. Группу $\mathrm{Aut}\,(\Lambda)$ можно превратить в m-группу, если задать операцию φ при помощью равенства $\varphi(g) = aga$ для всякого $g \in \mathrm{Aut}\,(\Lambda)$. Имеет место обобщённая теорема Холланда [1]:

каждая m-группа допускает точное представление автоморфизмами некоторого линейно упорядоченного множества $(\mathrm{Aut}\,(S), S, a)$.

ЛЕММА 1. *Решёточный порядок M^+ на произвольной m-группе (M, φ) является пересечением правых порядков $M^+ = \bigcap\limits_{M^+ \subseteq R} R$ и $M^- = \bigcap\limits_{M^+ \subseteq R} \varphi(R)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Холлистера (см. [2]) решёточный порядок M^+ на ℓ-группе M является пересечением правых порядков. Так как φ является групповым автоморфизмом, то $M^- = \varphi(M^+) = \bigcap\limits_{M^+ \subseteq R} \varphi(R)$. $\square$

ЛЕММА 2. *Правоупорядочиваемая ч. у. группа (G, φ) с реверсией вложима в некоторую m-группу тогда и только тогда, когда её порядок является пересечением правых порядков $G^+ = \bigcap\limits_{G^+ \subseteq R} R$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ч. у. группа с реверсией (G, φ) вложима в некоторую m-группу (M, φ). Тогда её порядок $G^+ = M^+ \cap G$ является пересечением правых порядков $G^+ = \bigcap\limits_{M^+ \subseteq R} (R \cap G) = \bigcap\limits_{G^+ \subseteq R} R$ группы G.

Пусть теперь порядок ч. у. группы G с реверсией φ является пересечением правых порядков $G^+ = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$.

Определим л. у. множества $T_\lambda = (G, R_\lambda)$ и T'_λ как зеркальную копию множества T_λ с противоположным порядком. Рассмотрим m-группы $C_\lambda = \mathrm{Aut}\,(T_\lambda) \times \mathrm{Aut}\,(T'_\lambda)$ и декартово произведение $C = \prod\limits_\lambda C_\lambda$ с реверсиями φ_{C_λ}, заданной на C_λ как $\varphi_{C_\lambda}(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$, и φ_C, заданной на C как $\varphi_C|_{C_\lambda} = \varphi_{C_\lambda}$. Пусть отображения $\varepsilon_\lambda : G \to C_\lambda$ и $\varepsilon : G \to C$ определены как $\varepsilon_\lambda(g)(t, t') = (tg, t'\varphi_G(g))$ и $\varepsilon = \{\varepsilon_\lambda\}_\lambda$. Покажем, что ε является групповым и порядковым изоморфизмом и сохраняет реверсию.

(a) Для g_1, g_2 из G выполняется

$$\begin{aligned}\varepsilon_\lambda(g_1 g_2^{-1})(t, t') &= (tg_1 g_2^{-1}, t'\varphi(g_1 g_2^{-1})) = (tg_1 g_2^{-1}, t'\varphi(g_1)\varphi(g_2^{-1})) \\ &= \varepsilon_\lambda(g_2^{-1})(\varepsilon_\lambda(g_1)(t, t')) = \varepsilon_\lambda(g_1)\varepsilon_\lambda(g_2^{-1})(t, t').\end{aligned}$$

Мономорфизм очевиден.

(b) Если $g \in G^+$, то $tgt^{-1} \in G^+$ для любого $t \in G$, поэтому при любом правом порядке R_λ, содержащем G^+, верно $t \leqslant_{R_\lambda} tg$. Кроме того, $\varphi(g) \in G^-$, следовательно $t'\varphi(g)t'^{-1} \in G^-$ для любого $t' \in G$. Поэтому при любом правом порядке R_λ, содержащем G^+, справедливо $t' \geqslant_{R_\lambda} t'\varphi(g)$. Значит, $\varepsilon_\lambda(g) \geqslant e$.

Если же $\varepsilon(g) \in C^+$, то $t \leqslant tg$ для любого $t \in T$. Поэтому для любого правого порядка R_λ, содержащего G^+, и любого $t \in G$ верно $tgt^{-1} \in R_\lambda$. Так как $G^+ = \bigcap\limits_{G^+ \subseteq R_\lambda} R_\lambda$, то $tgt^{-1} \in G^+$, и $g \in G^+$.

(c) Для любых $g \in G$ и $(t, t') \in T \times T'$ выполняются равенства $\varphi_C(\varepsilon_\lambda(g))(t, t') = (t\varphi_G(g), t'g) = (t\varphi_G(g), t'\varphi_G^2(g)) = \varepsilon_\lambda(\varphi_G(g))(t, t')$. Значит, $\varphi_C\varepsilon = \varepsilon\varphi_G$.

Следовательно, отображение ε является порядковым φ-изоморфизмом. $\square$

ЛЕММА 3 [3]. *Если $f = \bigvee\limits_i \bigwedge\limits_j g_{i,j} \neq e$ в ℓ-группе M, то найдётся правый порядок R на M, содержащий M^+ и при котором $\max\limits_i \min\limits_j g_{i,j} \neq e$.*

ЛЕММА 4 [3]. *Пусть G — правоупорядоченная группа, в G $\max\limits_i \min\limits_j g_{i,j} \neq e$ и $\pi : G \to (\mathrm{Aut}\,(G), G)$ — правое регулярное представление. Тогда $\bigvee\limits_i \bigwedge\limits_j \pi(g_{i,j}) \neq e$ в $(\mathrm{Aut}\,(G), G)$.*

ЛЕММА 5 [3]. *Пусть G — ч. у. группа, порядок на которой является пересечением правых порядков, $\sigma : G \to M$ — порядковый гомоморфизм ч. у. группы G в ℓ-группу M и $m = \bigvee_i \bigwedge_j \sigma(g_{i,j}) \neq e$ в M. Тогда $\bigvee_i \bigwedge_j \pi(g_{i,j}) \neq e$ в $(\mathrm{Aut}\,(G,R),(G,R))$ для некоторого правого порядка R, содержащего G^+.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть (G,φ) — ч. у. группа с реверсией, G^+ — пересечение правых порядков, $\sigma : G \to M$ — порядковый φ-гомоморфизм ч. у. группы G в m-группу M и $m = \bigvee_i \bigwedge_j \sigma(g_{i,j}) \neq e$ в M. Тогда $\bigvee_i \bigwedge_j \varepsilon(g_{i,j}) \neq$ $\neq e$ в (C,φ).*

ТЕОРЕМА 1. *Пусть (G,φ) — ч. у. группа с реверсией, и G^+ — пересечение правых порядков. Тогда существует свободная m-группа (F,φ) над (G,φ).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что m-подгруппа (F,φ) m-группы (C,φ) из леммы 2, порождённая образами φ-эпиморфизма ε, является свободной m-группой над ч. у. группой с реверсией (G,φ). Пусть $\alpha : (G,\varphi) \to$ $\to (M,\varphi)$ — порядковый φ-гомоморфизм.

Определим отображение $\beta : (F,\varphi) \to (M,\varphi)$ следующим образом. Каждый элемент $f \in F$ представим в виде

$$f = \bigvee_i \bigwedge_j \varepsilon(g_{i,j,1})\varphi(\varepsilon(g_{i,j,2})) \cdot \ldots \cdot \varepsilon(g_{i,j,2n-1})\varphi(\varepsilon(g_{i,j,2n})) = \bigvee_i \bigwedge_j \varepsilon(g_{i,j}),$$

где $g_{i,j} = g_{i,j,1}\varphi(g_{i,j,2}) \cdot \ldots \cdot g_{i,j,2n-1}\varphi(g_{i,j,2n})$. Положим

$$\beta(f) = \bigvee_i \bigwedge_j \alpha(g_{i,j,1})\varphi(\alpha(g_{i,j,2})) \cdot \ldots \cdot \alpha(g_{i,j,2n-1})\varphi(\alpha(g_{i,j,2n})) = \bigvee_i \bigwedge_j \alpha(g_{i,j}).$$

Покажем, что β — требуемый φ-гомоморфизм.

Проверим корректность отображения. Пусть

$$g = \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \varepsilon(g_{i,j}) = \bigvee_{k\in K} \bigwedge_{l\in L_k} \varepsilon(h_{k,l}) = h.$$

Тогда

$$e = \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \varepsilon(g_{i,j}) \left(\bigvee_{k\in K} \bigwedge_{l\in L_k} \varepsilon(h_{k,l}) \right)^{-1} = \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \varepsilon(g_{i,j}) \bigwedge_{k\in K} \bigvee_{l\in L_k} (\varepsilon(h_{k,l}))^{-1}$$

$$= \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \bigvee_{l\in L} \bigwedge_{k\in K_l} \varepsilon(g_{i,j}h_{k,l}^{-1}) = \bigvee_{i\in I,\, l\in L} \bigwedge_{j\in J_i,\, k\in K_l} \varepsilon(g_{i,j}h_{k,l}^{-1}).$$

По следствию 1 получаем

$$\bigvee_{i\in I,\, l\in L} \bigwedge_{j\in J_i,\, k\in K_l} \alpha(g_{i,j}h_{k,l}^{-1}) = \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \alpha(g_{i,j}) \left(\bigvee_{k\in K} \bigwedge_{l\in L_k} \alpha(h_{k,l}) \right)^{-1} = e,$$

т. е. $\beta(g) = \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \alpha(g_{i,j}) = \bigvee_{k\in K} \bigwedge_{l\in L_k} \alpha(h_{k,l}) = \beta(h)$.

Проверим сохранение групповых операций:

$$\beta(gh) = \beta\left(\bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \varepsilon(g_{i,j}) \bigvee_{k\in K} \bigwedge_{l\in L_k} \varepsilon(h_{k,l}) \right) = \beta\left(\bigvee_{i\in I,\, k\in K} \bigwedge_{j\in J_i, l\in L_k} \varepsilon(g_{i,j}h_{k,l}) \right)$$
$$= \bigvee_{i\in I,\, k\in K} \bigwedge_{j\in J_i, l\in L_k} \alpha(g_{i,j}h_{k,l}) = \bigvee_{i\in I,\, k\in K} \bigwedge_{j\in J_i, l\in L_k} \alpha(g_{i,j})\alpha(h_{k,l})$$
$$= \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \alpha(g_{i,j}) \bigvee_{k\in K} \bigwedge_{l\in L_k} \alpha(h_{k,l}) = \beta(g)\beta(h);$$

$$\beta(g^{-1}) = \beta\left(\left(\bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \varepsilon(g_{i,j}) \right)^{-1} \right) = \beta\left(\bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J_i} \varepsilon(g_{i,j})^{-1} \right)$$
$$= \beta\left(\bigvee_{j\in J} \bigwedge_{i\in I_j} \varepsilon(g_{i,j})^{-1} \right) = \bigvee_{j\in J} \bigwedge_{i\in I_j} \alpha(g_{i,j})^{-1}$$
$$= \bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J_i} \alpha(g_{i,j})^{-1} = \left(\bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \alpha(g_{i,j}) \right)^{-1} = \beta(g)^{-1};$$

$$\beta(g \vee h) = \beta\left(\bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \varepsilon(g_{i,j}) \vee \bigvee_{k\in K} \bigwedge_{l\in L_k} \varepsilon(h_{k,l}) \right) = \beta\left(\bigvee_{i\in I\cup K} \bigwedge_{n\in N} \varepsilon(f_{i,n}) \right)$$
$$= \bigvee_{i\in I\cup K} \bigwedge_{n\in N} \alpha(f_{i,n}) = \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} \alpha(g_{i,j}) \vee \bigvee_{k\in K} \bigwedge_{l\in L_k} \alpha(h_{k,l}) = \beta(g) \vee \beta(h),$$

где $f_{i,n} = g_{i,j}$ или $h_{k,l}$;

$$\beta(\varphi(f)) = \beta\left(\varphi\left(\bigvee_{i} \bigwedge_{j} \varepsilon(g_{i,j,1})\varphi(\varepsilon(g_{i,j,2})) \cdot \ldots \cdot \varepsilon(g_{i,j,2n-1})\varphi(\varepsilon(g_{i,j,2n})) \right) \right)$$
$$= \beta\left(\bigvee_{j} \bigwedge_{i} \varphi(\varepsilon(g_{i,j,1}))\varepsilon(g_{i,j,2}) \cdot \ldots \cdot \varphi(\varepsilon(g_{i,j,2n-1}))\varepsilon(g_{i,j,2n}) \right)$$

$$= \bigvee_j \bigwedge_i \varphi(\alpha(g_{i,j,1}))\alpha(g_{i,j,2}) \cdot \ldots \cdot \varphi(\alpha(g_{i,j,2n-1}))\alpha(g_{i,j,2n}))$$

$$= \varphi\left(\bigvee_i \bigwedge_j \alpha(g_{i,j,1})\varphi(\alpha(g_{i,j,2})) \cdot \ldots \cdot \alpha(g_{i,j,2n-1})\varphi(\alpha(g_{i,j,2n}))\right)$$

$$= \varphi(\beta(f)). \ \square$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть (G, φ) — ч. у. группа с реверсией. Эквивалентны следующие условия:*

(1) *существует свободная m-группа (F, φ) над (G, φ);*

(2) *существует порядковый m-изоморфизм τ (G, φ) в некоторую m-группу (T, φ);*

(3) *G^+ — это пересечение правых порядков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что из п. (1) следует п. (2) и по лемме 2 пп. (2) и (3) эквивалентны. По теореме 1 из п. (3) следует п. (1). $\square$

Пусть теперь $\{(G_i, \varphi_i)\}$ — множество ч. у. групп с реверсиями, $G = \underset{i}{*} G_i$ — их свободное произведение в классе групп, автоморфизм φ — продолжение φ_i на G, а частичный порядок P на G порождён порядками G_i^+, $P = \langle g_i^g \mid g_i \in G_i^+, g \in G\rangle$.

ТЕОРЕМА 3. *Каждая ч. у. группа (G, φ) с порядком P и реверсией является свободным произведением ч. у. групп с реверсиями (G_i, φ_i).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что инвариантная подполугруппа P является чистой. Пусть $\left(\prod_i G_i, \varphi\right)$ — декартово произведение ч. у. групп (G_i, φ), групповой гомоморфизм $\psi : G \to \prod_i G_i$ продолжает естественные вложения групп G_i. Определим порядок Q на G как

$$Q = \{e\} \cup \{g \in G \mid \psi(g) > e\}.$$

Тогда Q — чистая нормальная подполугруппа, т. е. Q — это частичный порядок на G. Все G_i содержатся в Q, поэтому $P \subset Q$. Следовательно, P — тоже чистая полугруппа в G, т. е. частичный порядок на G. Очевидно, что порядок P реверсируется автоморфизмом φ.

Пусть (H, φ) — ч. у. группа с реверсией, $\psi_i : G_i \to H$ — семейство порядковых φ-гомоморфизмов, $\psi : G \to H$ — групповой гомоморфизм,

продолжающий ψ_i. Если $g \in P$, то $g = g_1^{\bar{g}_1} \cdot \ldots \cdot g_k^{\bar{g}_k}$, $g_i \in G_{j_i}^+$, $\bar{g}_i \in G$. Тогда $\psi(g) = \psi_{j_1}(g_1)^{\bar{h}_1} \cdot \ldots \cdot \psi_{j_k}(g_k)^{\bar{h}_k}$, $\bar{h}_i \in H$. Так как ψ — порядковые гомоморфизмы, то $\psi(g) \geqslant e$. Поэтому ψ — порядковый гомоморфизм. Автоморфизм φ является продолжением автоморфизмов φ_i, сохранение операции φ при гомоморфизме ψ очевидно. Значит, (G, φ) является свободным произведением ч. у. групп с реверсиями (G_i, φ_i). $\square$

Холланд и Скримджер [4] обобщили теорему Виноградова о линейном упорядочении свободного произведения линейно упорядоченных групп на правоупорядоченные группы:

если $\{(G_i, R_i) \mid i \in I\}$ — семейство правоупорядоченных групп, и G — их свободное произведение, то существует правый порядок R на G, такой что $R \cap G_i = R_i$ для каждого $i \in I$; если правые порядки R_i содержат частичные порядки P_i для каждого $i \in I$, то R содержит все сопряжённые в G элементы из $\bigcup\limits_{i \in I} P_i$.

Определим частичный порядок $P' = \bigcap\limits_{P \subset R} R$ на группе G.

ЛЕММА 6. *Порядок P' на свободном произведении G реверсируется автоморфизмом φ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\varphi(P) = P^{-1}$. Если $P \subset R$, то $P^{-1} = \varphi(P) \subset \varphi(R)$.

Если $g \in P'$, то для каждого правого порядка R, содержащего P, $g \in R$. Тогда $\varphi(g) \in \varphi(R)$. Так как $\varphi(R)$ — правый порядок, то $\varphi(R)^{-1}$ — тоже. Поскольку $P^{-1} \subset R^{-1}$, то $P = \varphi(P)^{-1} \subset \varphi(R)^{-1}$. Если $P \subset R$, то $P \subset \varphi(R)^{-1}$. Если $g \in R$, то $g \in \varphi(R)^{-1}$. Тогда $g^{-1} \in \varphi(R)$. Если $g \in P'$, то $g^{-1} \in \bigcap\limits_{P \subset R} \varphi(R) = \varphi(P')$. Значит, $\varphi(P') = P'^{-1}$. $\square$

Пусть теперь $\{(G_i, \varphi_i)\}$ — множество m-групп, (G, φ) — их свободное произведение в классе ч. у. групп с реверсиями, m-группа (F, φ) — свободная m-группа над ч. у. группой с порядком P' и реверсией (G, φ), существующая в силу теоремы 1. По этой теореме можно считать m-группу (F, φ) m-подгруппой m-группы $\prod\limits_{P \subset R} (\mathrm{Aut}\,(G, R) \times \mathrm{Aut}\,(G, R^{-1}), \varphi)$.

ЛЕММА 7. *m-группа (G_i, φ) допускает m-вложение в m-группу (F, φ) тогда и только тогда, когда порядок на G_i линеен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G_i не является линейно упорядоченной, и $g \vee e \neq g$, $g \vee e \neq e$. Рассмотрим произвольный правый порядок R_λ, содержащий P, и проекцию $\pi_\lambda : (F, \varphi) \to (\mathrm{Aut}\,(T_\lambda) \times \mathrm{Aut}\,(T'_\lambda), \varphi)$. Тогда $\pi_\lambda(g \vee_F e)(e, e) = (\max\limits_{R_\lambda} \{g, e\}, \min\limits_{R_\lambda} \{g, e\})$ равно либо (g, e), либо (e, g). Если в группе G_i выполняется $g_1 = g \vee e$, то $\pi_\lambda(g \vee_{G_i} e)(e, e) = \pi_\lambda(g_1)(e, e) = (g_1, g_1)$. Если же G_i линейно упорядочена, то она m-вложима в (F, φ). $\square$

Пусть ψ_i — канонические вложения m-групп (G_i, φ) в их свободное m-произведение (F, φ). Тогда ψ_i являются порядковыми φ-гомоморфизмами. Пусть ψ' — продолжение ψ_i на их свободное произведение (G, φ) в классе ч. у. групп с реверсией, ч. у. группа G' — это группа G с порядком P'.

ЛЕММА 8. *Отображение ψ' является порядковым φ-гомоморфизмом ч. у. группы (G', φ) в (F, φ).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию ψ' — это групповой φ-гомоморфизм, требуется доказать сохранение порядка. Пусть $g \in P'$ и $\psi'(g) \notin F^+$. Тогда для некоторого правого порядка R_F на F, содержащего F^+, имеет место $\psi'(g) \notin R_F$. Возьмём произвольный правый порядок P_0 на G, содержащий P, и определим правый порядок $P_G = \{g \in G \mid \psi'(g) \in R_F, \psi'(g) \neq e\} \cup (R_0 \cap \ker \psi')$ на G. Так как ψ' является порядковым гомоморфизмом G в F, то $P \subset P_G$. Если $g \notin R_G$, то $g \notin P$. Поэтому $g \in R_G$ и $g \in F^+$, т. е. ψ' — порядковый гомоморфизм G'в F. $\square$

Пусть (H, φ) — свободная m-группа над (G', φ). Каждый φ-гомоморфизм ч. у. группы с реверсией (G', φ) в произвольную m-группу продолжается до m-гомоморфизма m-группы (H, φ). Пусть $\psi : (H, \varphi) \to (F, \varphi)$ — продолжение порядкового φ-гомоморфизма $\psi' : (G', \varphi) \to (F, \varphi)$.

Для $g \in G_i$ положим $g^+ = g \vee_{G_i} e$ и $g^- = g \wedge_{G_i} e$. Пусть символы $\vee$ и $\wedge$ обозначают решёточные операции в H или F. Обозначим через $J = \langle (g^-)^{-1} \wedge g^+ \mid g \in G_i \rangle$ — m-идеал m-группы (H, φ), порождённый элементами $(g^-)^{-1} \wedge g^+$, $g \in G_i$.

Пусть (M, φ) — произвольная m-группа, и α_i — m-гомоморфизмы из (G_i, φ) в (M, φ). Тогда существует их расширение α на m-группу (H, φ), и

для любого $g \in G_i$

$$\alpha((g^-)^{-1} \wedge g^+) = (\alpha(g^-))^{-1} \wedge \alpha(g^+) = (\alpha_i(g^-))^{-1} \wedge \alpha_i(g^+) = e.$$

Поэтому $J \subseteq \ker \alpha$.

Если α_i — канонические вложения m-групп (G_i, φ) в их свободное m-произведение (F, φ), и α — их расширение на m-группу (H, φ), то $G_i \cap \cap J \subseteq G_i \cap \ker \alpha = \{e\}$. Поэтому группы G_i вложимы в H/J. Покажем, что это m-вложения. Для решёточных операций $\vee$ и $\wedge$ m-группы $(H/J, \varphi)$ справедливо

$$(g \vee e)(g^+)^{-1} = g(g^+)^{-1} \vee (g^+)^{-1} = (g^+ g^{-1} \wedge g^+)^{-1} = ((g^-)^{-1} \wedge g^+)^{-1} = e,$$

поэтому $g \vee e = (g^+)^{-1}$. Вложения $G_i \to G$ сохраняют операцию φ, вложение $G \to H$ также её сохраняет, как и естественный гомоморфизм $H \to H/J$, поэтому операция φ сохраняется при вложении.

Очевидно, что $\{\bigcup G_i\}$ порождают H/J.

ТЕОРЕМА 4. *m-группа $(H/J, \varphi)$ является свободным произведением m-групп (G_i, φ_i) в классе m-групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\psi : (H, \varphi) \to (F, \varphi)$ является m-эпиморфизмом, поэтому он индуцирует m-эпиморфизм $\bar{\psi}(H/J, \varphi) \to \to (F, \varphi)$. С другой стороны, поскольку $(F'\varphi)$ является m-свободным произведением m-групп G_i, то вложения $G_i \to H/J$ продолжаются до m-гомоморфизма $\sigma : (F, \varepsilon) \to (H/J, \varphi)$. Композиции $\bar{\psi}\sigma$ и $\sigma\bar{\psi}$ тождественны на порождающих множествах $\bigcup G_i$ и $\bigcup \alpha_i(G_i)$, поэтому отображения $\bar{\psi}$ и σ взаимно обратны и являются изоморфизмами. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Giraudet, F. Lucas*, Groups à moitié ordonnés, Fundam. Math., **139**, No. 2 (1991), 75—89.
2. *V. M. Kopytov, N. Ya. Medvedev*, The theory of lattice-ordered groups (Math. Appl. (Dordrecht), **307**), Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1994.
3. *P. F. Conrad*, Free lattice-ordered groups, J. Algebra, **16**, No. 2 (1970), 191—203.

4. *C. Holland, E. Scrimger*, Free products of lattice-ordered groups, Algebra Univers., **2** (1972), 247—254.

Поступило 11 ноября 2014 г.

Адрес автора:

ВАРАКСИН Сергей Владимирович, Алтайский гос. ун-т, пр. Ленина, 61, г. Барнаул, 656049, РОССИЯ. e-mail: varaksins@yandex.ru