Х. М. Суннатов, О возникновении вихрей в идеальной жидкости, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 128–133

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ВИХРЕЙ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Х. М. Суннатов

Одним из важных аспектов задач, связанных с завихренными течениями идеальной жидкости, является проблема математического описания процесса возникновения вихря. Подобная задача, очевидно, нестационарна, но первым шагом на пути соответствующего исследования может быть изучение свойств решений стационарных гидродинамических уравнений Эйлера. При этом наличие или отсутствие вихря должно быть обусловлено выбором значений, определяющих течений параметров.

Двумерные уравнения Эйлера напишем в так называемой форме Лэмба [1]

$$\begin{aligned} &-v\,(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y) + \partial\gamma/\partial x = 0,\\ &u\,(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y) + \partial\gamma/\partial y = 0, \\ &\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(внешние силы отсутствуют) и ее рассмотрим в прямоугольнике

$$V = \{(x,\ y)\colon\ |\,x\,| < \alpha,\quad 0 < y < 1\}$$

при граничных условиях вида

$$\begin{aligned} &u\,(-\alpha,\ y) = a\,(y),\quad u\,(\alpha,\ y) = b\,(y),\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1;\\ &v\,(x,\ 0) = v\,(x,\ 1) = 0,\ \ |\,x\,| \leqslant \alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

На $a\,(y)$ и $b\,(y)$ налагаем дополнительное требование, соответствующее интегральному условию

$$\int_0^1 [a\,(y) - b\,(y)]\,\mathrm{d}y = 0.$$

Функция $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$, входящая в уравнения (1), называется завихренностью или вихрем.

Последнее из уравнений (1) позволяет ввести в рассмотрение функцию $\psi\,(x,\ y)$ таким образом, что

$$u = \partial\psi/\partial y,\quad v = -\partial\psi/\partial x. \tag{3}$$

В односвязной области функция $\psi(x, y)$, называемая функцией тока, является однозначной функцией, определенной с точностью до постоянной. Линии уровня функции $\psi(x, y)$ суть линии тока, т. е. интегральные кривые уравнения

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = v(x, y)/u(x, y). \tag{4}$$

В терминах вихря ω и функции тока ψ уравнения (1) запишутся в (эквивалентном) виде

$$\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = -\omega,$$
$$\partial\psi/\partial x\cdot\partial\omega/\partial y = \partial\psi/\partial y\cdot\partial\omega/\partial x. \tag{5}$$

Одним из способов построения решений уравнения Эйлера является априорное задание вихря ω, после чего задача отыскания течения становится линейной. Вихрь, однако, при этом должен быть допустимым, т. е. система (5) должна быть совместной. Но, во всяком случае, каждое течение, для которого существуют связи (с достаточно гладкой функцией f) $\omega = \lambda f(\psi)$, $\lambda = \mathrm{const}$ является допустимым. Из этой связи обычно выделяется простейший класс течений (потенциальных), определяемых требованием $f(\psi) \equiv 0$.

Потенциальные течения характеризуются именно отсутствием вихрей. Возможные особенности векторного поля (u, v) суть седловые точки семейства линий тока — интегральных кривых обыкновенного уравнения (4).

В работе [2] приведена классификация потенциальных течений в зависимости от свойств функций $a(y)$, $b(y)$. Классификация рассматриваемых потенциальных течений по характеру и расположению особенностей проводится за счет исследования структуры линий уровня функции тока ψ, являющейся в случае потенциальных течений, гармонической.

В смысле простоты после потенциальных течений считают течения, определяемые требованием $f(\psi) \equiv 1$. В этом случае функция тока ψ, удовлетворяющая уравнению $-\Delta\psi = \lambda$, уже не будет гармонической и может иметь точки экстремума, лежащие внутри V, соответствующие центрам вихрей поля (u, v). В этой же работе [2] наряду с потенциальными течениями в отдельных случаях рассмотрен вопрос об изменении структуры этих течений при переходе от $\omega = 0$ к различным значениям $\omega = \lambda$. Были указаны критические значения параметра λ, при переходе через которые у векторного поля появляются особые точки типа центра (возникают вихри).

Следующим (после потенциальных и с постоянной завихренностью) классом течений естественно считать течения, определяемые требованием $f(\psi) \equiv \psi$.

В настоящей заметке мы рассмотрим подробно такой класс течений, порождаемых граничными условиями вида (2) при

$$a(y) = \mu\cos(m\pi y), \quad b(y) = \nu\cos(m\pi y),$$
$$\mu^2 + \nu^2 \neq 0, \quad m \in \mathbf{N}. \tag{6}$$

Отметим, что случай $\mu = 1$, $m = 1$ и $\nu = 0$ рассмотрен в работе [3]. Интересующая нас задача — изучение появления особенностей типа центра уравнения (4) в зависимости от значений параметров, входящих в (6), и параметра λ. Центральным моментом исследований является анализ функции тока ψ, связанной с задачей, приводимым ниже равенством (9).

В данном случае функция тока удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 + \lambda\psi = 0. \tag{7}$$

Воспользовавшись равенствами (3) и условиями (6), имеем (положив $\psi(-\alpha, 0) = 0$)

$$\psi(-\alpha, y) = \frac{\mu}{m\pi}\sin(m\pi y), \quad \psi(\alpha, y) = \frac{\nu}{m\pi}\sin(m\pi y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$\psi(x, 0) = \psi(x, 1) = 0, \quad |x| \leqslant \alpha. \tag{8}$$

Задача (7) — (8) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда λ не принадлежит множеству собственных чисел $\lambda = \lambda_k(n)$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ оператора $-\Delta$, рассматриваемого в V при однородных граничных условиях, где $\lambda_k(\beta) = (k\pi)^2 + (\pi\beta/2\alpha)^2$, $\beta \in \mathbf{R}$. Функция тока соответствующего течения имеет вид

$$\psi(x, y) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\mu\,\mathrm{sh}\sqrt{\delta}(\alpha - x) + \nu\,\mathrm{sh}\sqrt{\delta}(\alpha + x)}{\pi m\,\mathrm{sh}\,2\alpha\sqrt{\delta}}\sin m\pi y & \text{при} \quad \delta > 0, \\ \dfrac{\mu(\alpha - x) + \nu(\alpha + x)}{2\pi m\alpha}\sin m\pi y & \text{при} \quad \delta = 0, \\ \dfrac{\mu\sin\sqrt{-\delta}(\alpha - x) + \nu\sin\sqrt{-\delta}(\alpha + x)}{\pi m\sin 2\alpha\sqrt{-\delta}}\sin m\pi y & \\ & \text{при} \quad \delta < 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\delta = (m\pi)^2 - \lambda$.

Проведем анализ формулы (9). Удобно, прежде чем переходить к общему рассмотрению, отметить некоторые частные случаи.

1. $\mu > 0$, $\nu = 0$.

1 (а). При $\lambda < \lambda_m(1/2)$ течения характеризуется отсутствием вихрей. Область течения разбивается на m ячеек, причем границы ячеек состоят из нулевых уровней функции ψ. В каждой из ячеек все линии тока начинаются на стороне $x = -\alpha$ и заканчиваются на этой же стороне.

1 (б). При переходе λ через $\lambda_m(1/2)$ в точках $(-\alpha, y_k)$ (где в дальнейшем раз и навсегда $k = 1, 2, \ldots, m$, $y_k = (2k - 1)/2m$ в случае нечетности (четности) k возникают левые (правые) вихри, центры которых при увеличении λ смещаются вправо и приближаются вплотную к точкам $(-0, y_k)$ при $\lambda \to \lambda_m(1) - 0$). Возник-

новения вихрей носят монотонный характер и течения сохраняют структуру при всех λ из интервала $\lambda_m(1/2) < \lambda < \lambda_m(1)$.

1 (в). При переходе λ через собственные числа $\lambda_m(1)$ происходит резкое нарушение установившейся картины течения: в области V возникают вихревые камеры

$$V_\varepsilon^k = \{(x, y)\colon -\alpha + \varepsilon < x < \alpha,\ (k-1)/m < y < k/m\},$$

$$\varepsilon = 2\alpha - \pi/\sqrt{-\delta},$$

имеющие структуру правого (левого) вихря, если k нечетно (четно), и заполняющие почти весь объем V ($\varepsilon \to +0$ при $\lambda \to \to \lambda_m(1) + 0$). Центры вихрей при $\lambda = \lambda_m(1) + 0$ расположены в точках $(+0, y_k)$. При увеличении λ они смещаются вправо; камеры V_ε^k сжимаются, а их левые стороны, сдвигаясь вправо, останавливаются при $\lambda = \lambda_m(3/2)$ в положении $x = -\alpha/3$. Течения сохраняют свою структуру при всех λ из интервала $\lambda_m(1) < \lambda < < \lambda_m(3/2)$.

1 (г). При переходе λ через $\lambda_m(3/2)$ в точках $(-\alpha, y_k)$ возникают новые вихри: если k нечетно (четно) левые (правые) вихри, развивающиеся в последовательности, описанной в пункте 1 (б); структура течения не меняется при варьировании λ в пределах $\lambda_m(3/2) < \lambda < \lambda_m(2)$. Такова схема дальнейших изменений.

Здесь отметим, что если $\mu < 0$, $\nu = 0$, то направления линий уровня противоположны только что рассмотренному случаю. А случай $\mu = 0$, $\nu \neq 0$ аналогичен случаю $\mu \neq 0$, $\nu = 0$. Разница в том, что стороны $x = -\alpha$ и $x = \alpha$ меняются ролями.

2. $\mu = \nu > 0$.

2(а). При $\lambda < \lambda_m(0)$ течения характеризуются отсутствием вихрей.

2(б). При переходе λ через $\lambda_m(0)$ в точках $(0, y_k)$ возникают правые (левые) вихри, если k четно (нечетно).

2(в). При переходе λ через собственные числа $\lambda_m(1)$ происходит резкое нарушение установившейся картины течения: в области V возникают вихревые камеры

$$V_\varepsilon^k = \{(x, y)\colon -\alpha + \varepsilon < x < \alpha - \varepsilon,\ (k-1)/m < y < k/m\},$$

$$\varepsilon = \alpha - \pi/2\sqrt{-\delta},$$

имеющие структуру левого (правого) вихря, если k четно (нечетно) и заполняющие почти весь объем V ($\varepsilon \to +0$ при $\lambda \to \to \lambda_m(1) + 0$). Центры вихрей при $\lambda = \lambda_m(1) + 0$ расположены в точках $(+0, y_k)$. При увеличении λ камеры V_ε^k сжимаются, а их левые (правые) стороны, сдвигаясь вправо (влево), останавливаются при $\lambda = \lambda_m(2) - 0$ в положении $x = -\alpha/2 - 0$ ($x = = \alpha/2 + 0$). Течения сохраняют свою структуру при всех λ из интервала $\lambda_m(1) < \lambda < \lambda_m(2)$.

2(г). При переходе λ через λ_m (2) в точках $(\pm\alpha,\ y_k)$ возникают новые вихри: если k четно (нечетно) правые (левые) вихри, развивающиеся в последовательности, описанной в пункте 2(в), структура течения не меняется при варьировании λ в пределах $\lambda_m(2) < \lambda < \lambda_m(3)$. Такова схема дальнейших изменений. Отметим, в случае $\mu = \nu < 0$, направления линий уровня меняются на противоположные.

3. $\mu = -\nu > 0$.

3(а). При $\lambda < \lambda_m(1)$ течения характеризуются отсутствием вихрей.

3(б). При переходе λ через собственные числа λ_m (1) в точках $(-\alpha,\ y_k)$ $[(\alpha,\ y_k)]$ в случае четности (нечетности) k возникают правые (левые) вихри, а в случае нечетности (четности) k левые (правые) вихри, центры которых при увеличении λ смещаются вправо (влево) и приближаются вплотную к точкам $(-\alpha/2 - 0,\ y_k)$ $[(\alpha/2 + 0,\ y_k)]$ при $\lambda \to \lambda_m(2) - 0$. Возникновения вихрей носят монотонный характер и течения сохраняют структуру при всех λ из интервала $\lambda_m(1) < \lambda < \lambda_m(2)$.

3(в). При переходе λ через собственные числа λ_m (2) происходит резкое нарушение установившейся картины течения: в области V возникают вихревые камеры

$$V_\varepsilon^k = \{(x,\ y)\colon -\alpha + \varepsilon < x < 0;\ 0 < x < \alpha - \varepsilon,\ (k-1)/m < y < k/m\},$$

$$\varepsilon = 2\,(\alpha - \pi/\sqrt{-\delta}),$$

имеющие структуру левого (правого) вихря, если k нечетно (четно) и заполняющие почти весь объем V ($\varepsilon \to +0$ при $\lambda \to \lambda_m(2) + 0$). Центры вихрей при $\lambda = \lambda_m(2) + 0$ расположены в точках $(-\alpha/2 + 0,\ y_k)$ $[(\alpha/2 - 0,\ y_k)]$. При увеличении λ они смещаются вправо (влево): камеры V_ε^k сжимаются, а их левые (правые) стороны, сдвигаясь вправо (влево), останавливаются при $\lambda = \lambda_m(3) - 0$ в положении $x = -2\alpha/3 - 0$ ($x = 2\alpha/3 + 0$). Течения сохраняют свою структуру при всех λ из интервала $\lambda_m(2) < \lambda < \lambda_m(3)$. Такова схема дальнейших изменений.

В случае $\mu = -\nu < 0$ направления линий тока противоположны случаю $\mu = -\nu > 0$.

В общем случае имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Для рассматриваемого класса течений область V прямыми вида $y = p/m$, ($p = 0, 1, 2, \ldots, m$) разбивается на m равных частей. Если $\lambda < \varphi_m^1(\tau)$, то течения характеризуются отсутствием вихрей. Значения $\lambda = \varphi_m^n(\tau)$ ($n = 1, 2, \ldots$) являются критическими значениями параметра λ, при переходе через которые в каждой из частей области течения возникают вихри. Течения имеют одну и ту же структуру, если $\lambda \in (\varphi_m^n(\tau),\ \lambda_m(n))$*

или $\lambda \in (\lambda_m(n), \varphi_m^{n+1}(\tau))$. *Здесь* $\tau = \mu/\nu$,

$$\varphi_m^n(\tau) = \begin{cases} (m\pi)^2 + \left(\dfrac{(n-1)\pi + \arccos\tau}{2\alpha}\right)^2 & \textit{при} \quad |\tau| \leqslant 1, \\ (m\pi)^2 + \left(\dfrac{(n-1)\pi + \arccos\tau^{-1}}{2\alpha}\right)^2 & \textit{при} \quad |\tau| \geqslant 1, \end{cases}$$

если $n = 2l - 1$,

$$\varphi_m^n(\tau) = \begin{cases} (m\pi)^2 + \left(\dfrac{n\pi - \arccos\tau}{2\alpha}\right)^2 & \textit{при} \quad |\tau| \leqslant 1, \\ (m\pi)^2 + \left(\dfrac{n\pi - \arccos\tau^{-1}}{2\alpha}\right)^2 & \textit{при} \quad |\tau| \geqslant 1, \end{cases}$$

если $n = 2l,\ l = 1, 2, \ldots$

Доказательство этой теоремы следует из представления (9).

В заключение отметим, что возникновения вихрей носят монотонный характер в каждом из интервалов $(\varphi_m^n(\tau), \lambda_m(n))$ и $(\lambda_m(n), \varphi_m^{n+1}(\tau))$ при увеличении λ. При переходе λ через $\varphi_m^n(\tau)$ ориентация дуг уровня не меняется, что соответствует плавному изменению структуры течения. При переходе λ через собственные числа $\lambda_m(n)$ ориентация линий уровня меняется на противоположную, что соответствует изменению структуры течения, имеющей характер скачка.

Самаркандский государственный
университет им. А. Навои

Поступило
24.03.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
[2] Дезин А. А. Об одном классе векторных полей // Комплексный анализ и его приложения. М.: Наука, 1978. С. 203—208.
[3] Трошкин О. В. К качественной теории систем квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. 1984. С. 68—72.