A. M. Lukatskii, A system of generators in the group of diffeomorphisms of the n-dimensional torus,
Mat. Zametki, 1979, Volume 26, Issue 1, 27–34

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

О СИСТЕМЕ ОБРАЗУЮЩИХ В ГРУППЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ n-МЕРНОГО ТОРА

А. М. Лукацкий

Рассмотрим n-мерный тор T^n. Обозначим через $D(\mathrm{T}^n)$ группу всех C^∞-диффеоморфизмов T^n с равномерной C^∞-топологией и через $D_0(\mathrm{T}^n)$ — связную компоненту единицы в $D(\mathrm{T}^n)$.

В заметке строится базис из двух элементов в топологической группе $D_0(\mathrm{T}^n)$. (Конечный набор элементов в топологической группе называется базисом, если эти элементы порождают свободную всюду плотную подгруппу. См. [1].)

Введем на T^n стандартные координаты $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (φ_j берутся по модулю 2π). Пусть $V(\mathrm{T}^n)$ — алгебра Ли C^∞-векторных полей на T^n с C^∞-топологией.

Положим $a_i = \mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi_i$. Элементы $a_1, \ldots, a_n$ натягивают подалгебру $\mathfrak{t}^n$, соответствующую действию T^n на себе сдвигами.

Обозначим через $S_n \subset V(\mathrm{T}^n)$ подалгебру, состоящую из векторных полей вида $\sum_j P_j(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\, a_j$, где P_j — тригонометрические полиномы от $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Положим $S_n^{\mathbf{C}} = S_n + iS_n = \{\sum_j Q_j a_j\}$, где Q_j — линейные комбинации функций вида $e^{i(k,\varphi)}$ (здесь $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $k \in \mathbf{Z}^n$).

Для дальнейшего полезно построить конечные системы образующих в алгебрах Ли S_n и $S_n^{\mathbf{C}}$.

ЛЕММА 1. *Алгебра Ли $S_n^{\mathbf{C}}$ порождается элементами*

$$e^{\pm i\varphi_k}a_l, \quad e^{\pm 2i\varphi_k}a_l, \quad a_l \qquad (1 \leqslant k,\ l \leqslant n).$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{h}_n$ алгебру Ли, порожденную полями, указанными в условии леммы.

Будем вести индукцию по n. Пусть $n = 1$. Заметим, что

$$[\mathrm{e}^{\pm i\varphi_1}a_1,\ \mathrm{e}^{\pm ik_1\varphi_1}a_1] = \pm i\,(k_1 - 1)\,\mathrm{e}^{\pm(k_1+1)\varphi_1}a_1.$$

Отсюда легко следует, что $\mathfrak{h}_1 = S_1^{\mathbf{C}}$.

Пусть наше утверждение верно для $\mathbf{T}^k$ $(1 \leqslant k < n)$. Рассмотрим $\mathbf{T}^n$. Возьмем поле $w = \mathrm{e}^{ik\varphi}a_j$ и покажем, что $w \in \mathfrak{h}_n$. Пусть для определенности $j = n$. Введем $w' = \mathrm{e}^{ik'\varphi}a_n$, где $\bar{k}' = (0, k_2, \ldots, k_n)$. Так как w' зависит только от $(\varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, то $w' \in S_{n-1}^{\mathbf{C}} \subset S_n^{\mathbf{C}}$ и по индукции $w' \in \mathfrak{h}_{n-1} \subset \mathfrak{h}_n$.

Разберем далее два случая. 1. $k_n \neq 0$. Тогда $w = (1/(ik_n))\,[\mathrm{e}^{ik_1\varphi_1}a_n,\ w']$. Так как

$$\mathrm{e}^{ik_1\varphi_1}a_n = (1/i)\,[\mathrm{e}^{i(k_1-1)\varphi_1}a_1,\ \mathrm{e}^{i\varphi_1}a_n],$$

то $\mathrm{e}^{ik_1\varphi_1}a_n \in \mathfrak{h}_n$, а значит, и $w \in \mathfrak{h}_n$.

2. $k_n = 0$. Рассмотрим поле $w'' = \mathrm{e}^{i\varphi_n}w$. Из предыдущего $w'' \in \mathfrak{h}_n$. Так как $w = (1/(2i))\,[\mathrm{e}^{-i\varphi_n}a_n,\ w'']$, то $w \in \mathfrak{h}_n$. Лемма доказана.

Введем векторные поля

$$u = \sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)\,(a_1 + \ldots + a_n),$$

$$v = \sin\varphi_1 a_1 + \ldots + \sin\varphi_n a_n$$

и диффеоморфизмы $\alpha = \exp u$, $\beta = \exp v$, $f = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} 2^{i/n}a_i\right)$ (здесь $\exp\colon V(\mathbf{T}^n) \to D_0(\mathbf{T}^n)$ — лиев экспоненциал).

Заметим, что

$$f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (\varphi_1 + 2^{1/n}, \ldots, \varphi_i + 2^{i/n}, \ldots, \varphi_n + 2).$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $n \geqslant 2$. Векторные поля $a_1, \ldots, a_n$, u, v порождают алгебру Ли S_n и топологическую алгебру Ли $V(\mathbf{T}^n)$. Диффеоморфизмы f, α, β порождают топологическую группу $D_0(\mathbf{T}^n)$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{g}_n$ алгебру Ли, порожденную векторными полями $a_1, \ldots, a_n$, u, v, и положим $\mathfrak{g}_n^{\mathbf{C}} = \mathfrak{g}_n + i\mathfrak{g}_n$. Легко проверить, что

$$\mathfrak{g}_n^{\mathbf{C}} \ni \mathrm{e}^{\pm i\varphi_k}a_k \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

$$\mathfrak{g}_n^{\mathbf{C}} \ni \mathrm{e}^{\pm i(\varphi_1+\ldots+\varphi_n)}(a_1 + \ldots + a_n).$$

Далее,

$$\mathfrak{g}_n^{\mathbf{C}} \ni \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{i\varphi_j}a_j[\mathrm{e}^{-i\varphi_j}a_j,\ \mathrm{e}^{i(\varphi_1+\ldots+\varphi_n)}(a_1+\ldots+a_n)]] = \\ = \mathrm{e}^{i(\varphi_1+\ldots+\varphi_n)}a_j.$$

Индукцией по n покажем, что $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = S_n^{\mathbf{C}}$. Пусть $n = 2$. Тогда

$$\mathfrak{g}_2^{\mathbf{C}} \ni [\mathrm{e}^{\pm i(\varphi_1+\varphi_2)}a_2,\ \mathrm{e}^{\mp i\varphi_2}a_2] = \mp 2i\mathrm{e}^{\pm i\varphi_1}a_2,$$

аналогично, $\mathfrak{g}_2^{\mathbf{C}} \ni \mathrm{e}^{\pm i\varphi_2}a_1$. Кроме того,

$$[[\mathrm{e}^{\pm i(\varphi_1+\varphi_2)}a_2,\ \mathrm{e}^{\pm i\varphi_1}a_1]\,\mathrm{e}^{\mp i\varphi_2}a_1] = -e^{\pm 2i\varphi_1}a_1 - 2\mathrm{e}^{\pm 2i\varphi_1}a_2,$$

поэтому $\mathfrak{g}_2^{\mathbf{C}} \ni \mathrm{e}^{\pm 2i\varphi_1}a_1$ и, аналогично, $\mathfrak{g}_2^{\mathbf{C}} \ni \mathrm{e}^{\pm 2i\varphi_2}a_2$. Из леммы 1 $\mathfrak{g}_2^{\mathbf{C}} = S_2^{\mathbf{C}}$. Пусть $n > 2$. Фиксируем k: $1 \leqslant k \leqslant n$. Имеем

$$\mathfrak{g}_n^{\mathbf{C}} \ni [\mp i\mathrm{e}^{\mp i\varphi_k}a_k,\ \mathrm{e}^{\pm i(\varphi_1+\ldots+\varphi_n)}a_l] = \\ = \mathrm{e}^{\pm i(\varphi_1+\ldots+\hat{\varphi}_k+\ldots+\varphi_n)}a_l \qquad (l \neq k).$$

Отсюда по индукции

$$\mathfrak{g}_n^{\mathbf{C}} \supset S_{n-1}^{\mathbf{C}} = \left\{\sum\nolimits_{j\neq k} Q_j a_j \,\middle|\, Q_j(\varphi_1, \ldots, \hat{\varphi}_k, \ldots, \varphi_n)\right\}.$$

В силу произвольности k, $\mathfrak{g}_n^{\mathbf{C}}$ содержит поля из условия леммы 1, поэтому $\mathfrak{g}_n^{\mathbf{C}} = S_n^{\mathbf{C}}$, а, значит, $\mathfrak{g}_n = S_n$. Утверждение о $V(\mathbf{T})^n$ вытекает из того, что $V(\mathbf{T}^n) = (\overline{S_n})_{C^\infty}$.

Используя [2] и [3], получаем, что потоки векторных полей $a_1, \ldots, a_n, u, v$ порождают топологическую группу $D_0(\mathbf{T}^n)$.

Далее заметим, что элементы f, β порождают в $D_0(\mathbf{T}^n)$ подгруппу G с алгеброй Ли $\mathfrak{g} \cong \mathrm{sl}(2)^n$, натянутой полями a_i, $\cos\varphi_i\, a_i$, $\sin\varphi_i\, a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$; легко проверить, что $G \cong \mathrm{PSL}(2)^n = (\mathrm{SL}(2)/\{\pm 1\})^n$, а замкнутая подгруппа, порожденная элементами f, α, содержит подгруппу H с алгеброй Ли $\mathfrak{h} \cong \mathrm{sl}(2)$, натянутой полями

$$a_1 + \ldots + a_n,\ \cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)(a_1 + \ldots + a_n),$$
$$\sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)(a_1 + \ldots + a_n),$$

причем $H \cong \widetilde{\mathrm{SL}}(2)/\Gamma$, где $\widetilde{\mathrm{SL}}(2)$ — односвязная накрывающая группы $\mathrm{SL}(2)$, а Γ — дискретный нормальный делитель. В частности, замкнутая подгруппа, порожденная элементами f, α, β, содержит потоки векторных полей $a_1, \ldots, a_n$, u, v, что завершает доказательство теоремы.

Для дальнейшего полезно пояснить, как действуют группы G и H на $\mathbf{T}^n$. Выберем базис с алгебре Ли sl (2):

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $G_i \cong G$ подгруппу с алгеброй Ли

$$\mathfrak{g}_i = L\,\{a_i, \cos\varphi_i\, a_i, \sin\varphi_i\, a_i\}.$$

Действие группы G_i на $\mathbf{T}^n$ определяется изоморфизмом алгебр Ли p_i: sl (2) $\to \mathfrak{g}_i$, заданным

$$p_i(\alpha) = 2a_i, \quad p_i(X) = 2\sin\varphi_i\, a_i, \; p_i(Y) = 2\cos\varphi_i\, a_i,$$

продолжаемым до гомоморфизма P_i: $\mathrm{SL}(2) \to D_0(\mathbf{T}^n)$, причем имеем $\mathrm{Ker}\, P_i = \{\pm 1\}$, откуда

$$G_i \cong \mathrm{SL}(2)/\{\pm 1\} = \mathrm{PSL}(2).$$

Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли подгруппы H; введем изоморфизм:

$$q(\alpha) = (2/n)(a_1 + \ldots + a_n),$$

$$q(X) = (2/n)\sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)(a_1 + \ldots + a_n),$$

$$q(Y) = (2/n)\cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)(a_1 + \ldots + a_n).$$

Обозначим через l алгебру Ли группы $\widetilde{\mathrm{SL}}(2)$, а через ψ: $l \to$ sl (2) — изоморфизм алгебр Ли, определяемый накрытием Ψ: $\widetilde{\mathrm{SL}}(2) \to \mathrm{SL}(2)$. Действие группы H на $\mathbf{T}^n$ определяется изоморфизмом p: $l \to \mathfrak{h}$, $p = q\psi$, продолжаемым до гомоморфизма P: $\widetilde{\mathrm{SL}}(2) \to H$, причем $H \cong \widetilde{\mathrm{SL}}(2)/\Gamma$, где $\Gamma = \mathrm{Ker}\, P \subset Z(\widetilde{\mathrm{SL}}(2))$.

Следствие. *Топологическая группа* $D_0(\mathbf{T}^n)$ *порождается двумя подгруппами* $G \cong \mathrm{PSL}(2)^n$ *и* $H \cong \widetilde{\mathrm{SL}}(2)/\Gamma$.

Для дальнейшего нам понадобится построить базис из двух элементов в группе SL (2). Пусть C_α — матрица поворота на угол α, несоизмеримый с 2π, а $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ЛЕММА 2. *Существует не более чем счетное подмножество* $X \subset \mathbf{R}$ *такое, что для любого* $t \in \mathbf{R} \setminus X$ *элементы* C_α *и* $A(t)$ *образуют базис в группе* SL (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через F свободную группу ранга 2 над алфавитом $\{g, h\}$; пусть φ_t: $G \to \mathrm{SL}(2)$ — гомоморфизм, заданный условием $\varphi_t(g) = C_\alpha$, $\varphi_t(h) = A(t)$. Возьмем $f \in F \setminus \{1\}$; пусть $f = g^{k_1}h^{l_1}\ldots g^{k_n}h^{l_n}$, и рассмотрим кривую $f(t) = \varphi_t(f)$. Несложно проверить, что $\mathrm{d}^n f/\mathrm{d}t^n \not\equiv 0$. Так как $f(t)$ полиномиальна по t, то множество $X(f) = \{t \in \mathbf{R} \mid f(t) = 1\}$ конечно. Тогда можно взять $X = \bigcup_{f \in F\setminus\{1\}} X(f)$.

Пусть f то же, что и в теореме 1, а

$$r = \sum_{i=1}^n (1 + \cos\varphi_i)\, a_i, \quad s = \left(1 + \cos\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i\right)\right)\sum_{i=1}^n a_i.$$

Введем диффеоморфизмы: $g(\lambda, \mu) = \exp \lambda r \cdot \exp \mu s$. Если положить

$$\psi(\varphi, t) = \begin{cases} 2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\varphi/2) + t), & \varphi \neq \pi, \\ \pi, & \varphi = \pi, \end{cases}$$

то имеем

$$\exp \lambda r(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (\psi(\varphi_1, \lambda), \ldots, \psi(\varphi_n, \lambda)),$$

$$\begin{aligned} \exp \mu s(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) &= \\ = (\varphi_1 + (1/n)(\psi(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n, n\mu) &- \\ &- (\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)), \ldots, \end{aligned}$$

$$\varphi_n + (1/n)(\psi(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n, n\mu) - (\varphi_1 + \ldots + \varphi_n))).$$

ТЕОРЕМА 2. *Существует такое подмножество* $Y \subset \mathbf{R}^2$, *нигде не плотное в* $\mathbf{R}^2$, *что для* $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \setminus Y$ *два элемента* f, $g(\lambda, \mu)$ *образуют базис в топологической группе* $D_0(\mathbf{T}^n)$ *при* $n \geqslant 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $H(\lambda, \mu)$ замкнутую подгруппу в $D_0(\mathbf{T}^n)$, порожденную элементами f, $g(\lambda, \mu)$. Пусть $\mathfrak{h}(\lambda, \mu)$ — алгебра Ли этой группы, т. е. множество векторных полей, потоки которых лежат в $H(\lambda, \mu)$. Очевидно, $\mathfrak{h}(\lambda, \mu)$ является топологическим $\mathbf{T}^n$-модулем, и из [4] имеем $\mathfrak{h}(\lambda, \mu) = \overline{\mathfrak{h}(\lambda, \mu) \cap S_n}$. Введем $\mathbf{T}^n$-модуль $h(\lambda, \mu) = \mathfrak{h}(\lambda, \mu) \cap S_n$; $h(\lambda, \mu)$ разлагается в прямую сумму неприводимых $\mathbf{T}^n$-подмодулей, ортогональных относительно скалярного произведения

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbf{T}^n} \sum_{i=1}^n u_i(\varphi)\, v_i(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi.$$

Заметим, что

$$h(0, 0) = \mathrm{t}^n, \quad h(\lambda, 0) = \mathrm{t}^n + V, \quad h(0, \mu) = \mathrm{t}^n + U,$$

где $\lambda, \mu \neq 0$,

$$V = L\{\cos \varphi_i a_i, \sin \varphi_i a_i \mid i = 1, \ldots, n\},$$

$$U = L\{\cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)(a_1 + \ldots + a_n),$$
$$\sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)(a_1 + \ldots + a_n)\}.$$

Покажем, что если $h(\lambda, \mu)$ неортогонально U и $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, то $H(\lambda, \mu) = D_0(\mathbf{T}^n)$. Действительно, для любой перестановки p аргументов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ имеем $pg(\lambda, \mu)p^{-1} = g(\lambda, \mu)$. Поэтому $p_*(h(\lambda, \mu)) = h(\lambda, \mu)$ и $p_*(h(\lambda, \mu) \cap U) = h(\lambda, \mu) \cap U$. В частности, отсюда следует, что если $h(\lambda, \mu)$ неортогонально U, то

$$h(\lambda, \mu) \ni u = \sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n)(a_1 + \ldots + a_n).$$

Тогда имеем $H(\lambda, \mu) \ni \exp tu$ и $H(\lambda, \mu) \ni \exp tv$. Из теоремы 1 тогда следует, что $H(\lambda, \mu) = D_0(\mathbf{T}^n)$. Заметим, что при $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ имеем: $g(0, \mu)_* \mathrm{t}^n$ неортогонально U, т. е. $h(0, \mu)$ неортогонально U. Так как $g(\lambda, \mu)_* a_i$ аналитично по (λ, μ), то подмножество

$$Y_1' = \{(\lambda, \mu) \mid g(\lambda, \mu)_* \mathrm{t}^n \perp U\}$$

нигде не плотно в $\mathbf{R}^2$. Положим

$$Y_1 = Y_1' \cup \{(\lambda, \mu) \mid \lambda\mu = 0\}$$

для $(\lambda, \mu) \notin Y_1$; имеем $h(\lambda, \mu) = S_n$.

Далее заметим, из леммы 2 следует, что существует такое не более чем счетное подмножество $M \subset \mathbf{R}$, что при $\lambda \in \mathbf{R} \setminus M$ элементы f и $g(\lambda, 0)$ порождают свободную подгруппу в $D_0(\mathbf{T}^n)$. Так как $g(\lambda, \mu)$ аналитично по (λ, μ), то отсюда легко следует, что подмножество таких (λ, μ), для которых некоторое нетривиальное соотношение между элементами f и $g(\lambda, \mu)$ обращается в единицу, нигде не плотно в $\mathbf{R}^2$. Поэтому существует такое нигде не плотное подмножество $Y_2 \subset \mathbf{R}^2$, что для $(\lambda, \mu) \subset \mathbf{R}^2 \setminus Y_2$ элементы f и $g(\lambda, \mu)$ порождают свободную подгруппу. Тогда можно взять

$$Y = Y_1 \cup Y_2.$$

Теорема доказана.

Аналогичным образом можно построить базис в группе $D_0(\mathbf{T}^1)$, если взять в качестве $f(\varphi) = \varphi + 1$ и

$$g(\lambda, \mu) = \exp(\lambda(1 + \cos \varphi_1) a_1) \exp(\mu \sin 2\varphi_1 a_1).$$

Пусть M — однородное пространство некоторой компактной группы Ли K (т. е. $M = K/H$). В [5] автором было доказано, что в случае, когда группа K полупроста, в топологической группе $D_0(M)$ и ее подгруппах вида $H(K, \mathscr{V})$ (т. е. порожденных подмножествами K и $\{\exp(t \cdot \mathscr{V})\}$, где $\mathscr{V} \subset V(M)$, $t \in \mathbf{R}$) существуют базисы. Используя теорему 2, этот результат можно обобщить на однородные пространства произвольных компактных групп Ли.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* α — *характеристика однородного пространства* M, *введенная в* [5] (*отметим, что* $\alpha \leqslant \dim M$). *В топологической группе* $D_0(M)$ *и ее подгруппах вида* $H(K, \mathscr{V})$ *существуют свободные всюду плотные подгруппы ранга* $2\alpha + 2$.

Доказательство. Случай $M = \mathbf{T}^n$ следует из теоремы 2. Если $M \neq \mathbf{T}^n$, то $K = \mathbf{T}^s \cdot L$, где L — полупростая компактная группа Ли. В группе L существует счетное свободное подмножество $S = \{g_1, g_2, \ldots\}$ такое, что любые два элемента из S образуют базис в L (см. [6]). Пусть $g \in \mathbf{T}^s$ — элемент, степени которого плотны в $\mathbf{T}^s$. Положим $q_i = gg_i$ и $S' = \{q_1, q_2, \ldots\}$. Очевидно, S' обладает аналогичным свойством в K. По [5, теорема 1] можно построить α аналитических векторных полей $u_1, \ldots, u_\alpha$, которые порождают топологический K-модуль $V(M)$ (для случая подгруппы $H(K, \mathscr{V})$ — подмодуль $\mathfrak{h}(K, \mathscr{V})$, являющийся алгеброй Ли подгруппы $H(K, \mathscr{V})$), а потоки этих полей и подгруппа K порождают топологическую группу $D_0(M)$ $(H(K, \mathscr{V}))$. В частности,

$$X_t = \{q_1, q_2, q_3 \exp tu_1, q_4 \exp \sqrt{2}\, tu_1, \ldots$$
$$\ldots, q_{2\alpha+1} \exp tu_\alpha, q_{2\alpha+2} \exp \sqrt{2} tu_\alpha\}$$

является системой образующих в $D_0(M)$ $(H(K, \mathscr{V}))$ при $t \neq 0$. Далее, если имеется некоторое нетривиальное соотношение между элементами X_t, то множество t, на котором это соотношение равно единице, не более чем счетно (так как элементы из X_t аналитичны по t и при $t = 0$

свободны). Так как множество возможных соотношений счетно, то существует такое не более чем счетное подмножество $P \subset \mathbf{R}$, что для $t \in \mathbf{R} \setminus P$ элементы множества X_t образуют базис в $D_0(M)$ $(H(K, \mathscr{V}))$. Теорема доказана.

Автор благодарит рецензента за полезные замечания.

Всесоюзный научно-исследовательский институт информации и технико-экономических исследований в электротехнике

Поступило
12.V.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Улам С., Нерешенные математические задачи, М., «Мир», 1964.

[2] Herman M. R., Sur le groupe des diffeomorphismes du tore, Ann. Inst. Fourier, 23, № 2 (1973), 75—86.

[3] Лукацкий А. М., Конечнопорожденность групп диффеоморфизмов, Успехи матем. наук, 23, № 1 (1978), 219—220.

[4] Palais R. S., Stewart T. E., The cohomology of differentiable transformation groups, Amer. J. Math., 83, № 4 (1961), 623—644.

[5] Лукацкий А. М., Об однородных векторных расслоениях и группах диффеоморфизмов компактных однородных пространств, Изв. АН СССР, Сер. матем., 39, № 6 (1975), 1274—1283.

[6] Tits J., Free subgroups in linear groups, J. Algebra, 20, № 2 (1972), 250—270.

[7] Leslie J., On a differential structure for the group of diffeomorphysms, Topology, 6 (1967), 263—271.

[8] Herman M. R., Sur le groupe des diffeomorphyses R-analytique du tore, Differential topology and geometry, Lect. Notes Math., 484 (1975), 36—42.