N. N. Yanenko, On non-linear equations of a variable type, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1980, Volume 96, 294–301

Н.Н.Яненко

О НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

Работа представляет собой обзор исследований, которые проведены автором и группой сотрудников ИТПМ СО АН СССР, ИМ СО АН СССР, Красноярского госуниверситета под его руководством.

Для описания нелинейной неустойчивости и автоколебательных движений сплошной среды в последнее время были предложены математические модели, основу которых составляют уравнения в частных производных переменного типа.

В работе [I] проведены численные эксперименты и дан качественный анализ системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right],\quad \frac{\partial v}{\partial t}=-a^2\frac{\partial u}{\partial x},\quad a=const. \tag{I}$$

Это - упрощенная модель баротропного газа с коэффициентом искусственной вязкости $\nu(u)$, зависящим от скорости. Решением системы (I) являются автоколебания, возникающие в областях пространства скоростей u, где коэффициент $\nu(u)$ меняет знак. Система (I) не инвариантна относительно преобразования Галилея.

Очевидно, что содержательные феноменологические модели механики сплошной среды должны быть инвариантны относительно основной группы преобразований. В связи с этим автор в [2] предложил математическую модель, являющуюся аналогом одномерного уравнения Бюргерса, но с коэффициентом вязкости, зависящим от градиента скорости:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{2}$$

Здесь коэффициент вязкости ν - асимптотически положительная функция от $\partial u/\partial x$, принимающая отрицательные значения в некоторой конечной области изменения $\partial u/\partial x$.

Уравнения Навье-Стокса с неотрицательным коэффициентом вязкости были рассмотрены О.А.Ладыженской; доказаны теоремы существования [3]. Эффекты отрицательной вязкости рассмотрены в [4] без математических моделей.

В работе [2] изучается уравнение (2) без конвективного члена $u\frac{\partial u}{\partial x}$ с начальным условием $u(x,0)=u_0(x)$, $0\leqslant x\leqslant \ell$ и периодическими граничными условиями. Если

$$\nu=1+\nu_1\frac{\partial u}{\partial x}+\nu_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,\quad \nu_2>0,\quad \nu_1^2-4\nu_2=\delta>0, \tag{3}$$

то имеет место следующая априорная оценка решения:

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx\leqslant C(\nu_1,\nu_2,u_0). \tag{4}$$

Если $\nu = 1-\nu_1(\partial u/\partial x)^{2m} + \nu_2(\partial u/\partial x)^{2n}$, $m,n,\nu_1,\nu_2>0$, $\nu_1^2-4\nu_2>0$, то для достаточно больших m, n имеет место следующая априорная оценка:

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{k} dx \leqslant C\,(m,n,\nu_1,\nu_2,k,u_0). \qquad (5)$$

Для полного уравнения (2) с начальными и граничными условиями $u(x,0)=u_0(x)$, $u(0,t)=u(\ell,t)=0$ получена оценка

$$\int u_t^2\,dx\,dt + \int u_x^4\,dx \leqslant C(\nu_1,\nu_2,u_0,t). \qquad (6)$$

Для задачи (2), (3) установлен разностный аналог оценки

$$\int_0^t\int_0^\ell u_t^2\,dx\,dt + \int_0^\ell u_x^4\,dx \leqslant const,$$

гарантирующий слабую компактность в соответствующих пространствах решений разностных уравнений. Оценим теперь отклонение решения уравнения (2) с коэффициентом вязкости (3) от решения уравнения Бюргерса. Начально-краевые условия выберем в виде $u|_{t=0} = u_0(x)$, $u(0,t)=u(1,t)$, $0\leqslant t\leqslant T$. Будем предполагать, что ν_1, ν_2 – малые параметры и, кроме того, что коэффициент $\nu(p)=\nu_0+\nu_1 p+\nu_2 p^2$ положителен, а коэффициент $\nu'(p)=\nu_0+2\nu_1 p+3\nu_2 p^2$ при второй производной в уравнении (2) знакопеременен. Из этих требований вытекают следующие условия на коэффициенты

$$\nu_1>0,\quad \nu_1^2-4\nu_0\nu_2<0,\quad \nu_1^2-3\nu_0\nu_2>0. \qquad (*)$$

Из предположения малости ν_1, ν_2 следует, что для выполнения соотношения (*) при фиксированном ν_0 и при изменяющихся малых ν_1, ν_2 достаточно, чтобы $\nu_2=k\nu_1^2$ с некоторой фиксированной постоянной k. Итак, мы рассматриваем уравнение

$$u_t + uu_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\nu_0+\nu_1 u_x + k\nu_1^2 u_x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

с условиями на коэффициенты

$$1-4k\nu_0<0,\qquad 1-3k\nu_0>0$$

и константа k выбирается по ν_0. Пусть $u^0(x,t)$ – решение уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

с указанными выше начально-краевыми условиями. Запишем решение задачи в виде $u(x,t)=u^0(x,t)+R(x,t)$. Тогда справедлива оценка

$$\|R\|^2 \leqslant K(T,u^0)\,\nu_1.$$

В работе [5] рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\mu u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right], \qquad (7)$$

где $\omega(\xi)$ - гладкая функция, для которой $\omega'(\xi)\geqslant\delta>0,\ |\xi|\geqslant N>0$ и $\omega'(\xi)$ может принимать отрицательные значения для $|\xi|<N$. В случае начальных и граничных условий $u(x,0)=u_0(x),\ u(0,t)=u(1,t)=0$ априорная оценка в норме $C(0,1)$ имеет следующий вид:

$$\|u\|_{C(0,1)}+\|u_x\|_{C(0,1)}\leqslant C\left(N,u_0,t,K(T)\right), \qquad (8)$$

где $K(T)=\sup\limits_{x,t}|u(x,t)|$. Если $\mu=0$, то тогда величина C в (8) не зависит от K. В работе [5] получены также теоремы существования обобщенного и гладкого решения для задач

$$\left(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x^4}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+2\mu u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\varepsilon\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

с условиями $u(x,0)=u_0(x),\ u(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=u(1,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0$ и со знакопеременным коэффициентом $\omega'(\xi)$. Для задачи (7) в работе [6] установлены более сильная оценка типа (8) с константой C в правой части, не зависящей от $K(T)$, и оценка

$$\int\left(\omega'\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2dx\,dt+\int u_t^2\,dx\,dt\leqslant C\left(N,u_0,t\right).$$

Для гладких решений уравнения (7) с краевыми условиями вида

$$\alpha u_x-\varphi(u)\Big|_{x=0}=\beta u_x-\psi(u)\Big|_{x=1}=0 \qquad (**)$$

получена оценка $|u_x|$ через $|u|$ и $\sup\{|u_0|+|u_0'|\}$, а также априорная оценка $|u|$ для третьей краевой задачи при дополнительных условиях на рост $\varphi(u),\ \psi(u),\ \omega(u_x)$. Для обобщенных решений задачи (7), (**) получена оценка $|u|$ в классе обобщенных решений, допускающих аппроксимацию в определенном смысле гладкими функциями.

Если коэффициент $\omega'(\xi)\geqslant 0$ вырождается, то методом конечных разностей для первой и третьей краевых задач при дополнительных ограничениях на рост функций $\varphi(u),\ \psi(u),\ \omega(u_x)$ доказана теорема существования задачи (7), (**) из класса функций, для которых конечно выражение

$$\int_0^t\int_0^1\left[u_t^2+\left(\omega'(u_x)u_{xx}\right)^2\right]dx\,dt+\int_0^1\omega(u_x)\,dx+\sup|u|.$$

В случае знакопеременной величины $\omega'(u_x)$ показана слабая компактность приближенных решений в соответствующих пространствах.

Методом Галеркина доказана теорема существования и единственности обобщенного решения рассматриваемой задачи из класса $W^{1,1}_{2+2\nu_2}$ в случае вырождающегося коэффициента $\omega'(\xi)\geqslant 0$ $\left(-C_0+C_1|\xi|^{2\nu}\leqslant\omega'(\xi)\leqslant C_2|\xi|^{2\nu}+C_3\right)$ и слабая компактность приближенных решений в случае знакопеременной функции $\omega'(\xi)$.

В[7] получены оценки $|u_x|$ через $|u|$ и $\|u_0\|_{C^1}$ для квазилинейных уравнений с одной пространственной переменной

$$u_t = a(x,u,u_x)u_{xx} + b(x,u,u_x) - f(x,u,u_x,u_{xx}),$$

где $a \geqslant a_0 > 0$, f - финитная функция, а также оценка $|u_x|$ через $|u|$ и $\|u_0\|_{C^1}$ при $f = f_1(t,x,u,u_x)u_{xx} + f_2(t,x,u,u_x,u_{xx})$, $f_1 f_2$ финиты по u_x, u_{xx}.

Следуя работе [8], рассмотрим систему уравнений типа Навье-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\nabla)u + \nabla p = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right], \quad div\, u = 0, \qquad (9)$$

где $x \in \Omega \subset R^3$, Ω - ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $0 \leqslant t < \infty$,

$$\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \nu_0 + \nu_1\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2m} + \nu_2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{4m}, \quad m \geqslant \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| = \left(\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \nu_2 > 0.$$

Условие $\nu_2 > 0$ означает, что рассматриваются только асимптотически положительные полиномы $\nu(\rho)$. Для уравнения (9) будем рассматривать следующие начально-краевые условия

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x). \qquad (10)$$

Пусть V - замыкание множества $\mathcal{V} = \{v \mid v \in C_0^\infty(\Omega), div\, v = 0\}$ в норме $W^1_{2+4m}(\Omega)$ где W^1_{4m+2} - пространство Соболева. Пусть $\{\omega_j\}$, $j = 1,\dots,n$ - некоторая полная в банаховом пространстве V система функций. Будем искать приближенное решение задачи (9)-(10) с помощью метода Галеркина, т.е. в виде

$$u^n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} C_i^n(t)\,\omega_i(x),$$

где коэффициенты $C_i^n(t)$ находятся из уравнения

$$(u_t^n, \omega_j) + ((u^n\nabla)u^n, \omega_j) + \sum_{i=1}^{3}\left(\nu\left(\frac{\partial u^n}{\partial x}\right)\frac{\partial u^n}{\partial x_i}, \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad (11)$$

(,) - скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Начальные условия для системы (11) будем находить из соотношений $C_i^n(0) = \alpha_i^n$ где α_i^n определяется из условий

$$u^n(0,x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n \omega_i(x), \quad u^n(0,x) \to u_0(x) \qquad (12)$$

при $n \to \infty$ в норме пространства V. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $u^1(x,t) = C_1^1(t)\,\omega_1(x)$ - первое галеркинское приближение задачи (9), (10), $\omega_1(x) \in V$, $\int \omega_1^2\, dx = 1$, $u^1(x,0) = \alpha_1^1 \omega_1(x)$. Обозначим $|C_1^1|^{2m} = y(t)$,

$$a_1=-2m\nu_1\int_\Omega\left|\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\right|^{2m+2}dx,\quad a_2=-2m\nu_2\int_\Omega\left|\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\right|^{4m+2}dx.$$

Тогда функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению Абеля первого рода.

$$\frac{\partial y}{\partial t}=a_0y+a_1y^2+a_2y^3 \qquad (13)$$

и I) если $\nu_0>0$, то а) нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t\to\infty$, в) при $\nu_1^2-4\nu_0\nu_2<0$ не существует других стационарных решений уравнения (13), с) при $\nu_1^2-4\nu_0\nu_2>0, \nu_1<0$ существует еще одно асимптотически устойчивое по Ляпунову при $t\to\infty$ положительное решение для некоторых $\omega_1(x)$;

2) если $\nu_0<0$, то для некоторых $\omega_1(x)$ существует только одно положительное асимптотически устойчивое решение уравнения(13).

Для выяснения свойств модельного уравнения (2) со знакопеременным коэффициентом вязкости (3) было проведено численное решение этого уравнения конечно-разностным методом [8]. Когда коэффициент вязкости ν отрицателен, то задача становится некорректной и может происходить рост решения. Поскольку ожидалось появление колебаний, связанных с изменением знака коэффициента вязкости, то нами была выработана схема, которая на решениях уравнения Бюргерса $u_t+uu_x=\nu u_{xx}$ давала бы заведомо монотонный профиль. Была изучена эволюция начального распределения в виде ступеньки. Расчеты позволили установить наличие нестационарных колебаний при стационарном осредненном течении, обнаружить свойство перемежаемости, т.е. чередование сильных и слабых осцилляций.

В работе [9] рассмотрен вопрос об априорных оценках решения уравнения баротропного вихря в сферической системе координат, причем дивергенция тензора напряжений имеет вид, аналогичный правой части уравнения (2). Для решения уравнения баротропного вихря получена равномерная по t оценка в L_2 среднего значения производной скорости. Решение уравнения (2) с начальными и краевыми условиями $u(0,x)=\varepsilon f(x)$, $u(t,0)=u(t,1)$, причем $f(0)=f(1)$, $f'(0)=f'(1)$, $\int_0^1 f(x)dx=0$ ищется в виде

$$u(x,t)=a(t)f(x).$$

Для квадрата амплитуды $a(t)$ получено уравнение

$$|a|^2=-2\nu_0 z_0|a|^2+2\nu z_1|a|^3, \qquad (14)$$

где $z_i=\left(\int_0^1|f'|^{i+2}dx\right)/\int_0^1|f|^2dx$, $i=$ 1, 2 с начальным условием

$|a|^2_{t=0}=\varepsilon^2$. При $\nu_0<0$, $\nu_1=0$, $\nu_2>0$ уравнение (14) есть известное уравнение Л.Д.Ландау, описывающее возникновение турбулентности при числах Рейнольдса, больших критического.

В работе [10] исследовано нелинейное уравнение с частными производными третьего порядка, которое можно рассматривать как нелокальное уравнение второго порядка с коэффициентом вязкости, не являющимся тождественно неотрицательным:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\mu+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial u}{\partial x}\right\}+f(x,t)\,, \qquad (15)$$

где μ , ε – постоянные, $0\leqslant\mu\leqslant\mu_0$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. Уравнение такого типа можно рассматривать как регуляризатор уравнения Бюргерса ($\mu>0$, $\varepsilon=0$).

В прямоугольнике $Q_T=\{(t,x)\,|\,0<t<T,\ 0<x<\ell\}$ исследуется решение уравнения (15) с начальными и граничными условиями

$$u(0,x)=0\,,\quad u(t,0)=u(t,\ell)=0\ . \qquad (16)$$

При $\mu\geqslant0$, $\varepsilon>0$, $f\in L_2(Q_T)$ доказано существование обобщенного решения задачи (15), (16) в классе

$$V=\left\{v\,|\,v\in L_\infty(0,T;\,W_0^{1,4}(0,\ell)),\ \frac{\partial v}{\partial t}\in L_2(Q_T)\right\}.$$

В случае $\mu>0$, $\varepsilon>0$, $f\in L_2(Q_T)$ решение задачи (15),(16) единственно в классе V и при $\varepsilon\to0$ сходится сильно в $L_2(Q_T)$ к решению уравнения Бюргерса с начально-краевыми условиями (16).

Заметим, что подобные регуляризаторы применяются и при исследовании неоинейных гиперболических уравнений теории упругости для материалов, обладающих памятью [11,12] ; правда, здесь нет предельного перехода по параметру регуляризации.

Регуляризация дифференциальных операторов производными более высокого порядка оказалась успешной при исследовании уравнений смешанного типа, когда внутри области уравнение меняет тип. В этом случае постановка краевой задачи зависит от типа уравнения на границе области. Таким образом, исследованы линейные операторы высоких порядков [13] и нелинейные уравнения второго порядка [14] .

А.В.Кажихов исследовал смешанную задачу для вязкого баротропного газа, с невыпуклым уравнением состояния $p(v)\leqslant p(v^*)$ при $v>v^*$, $p(v)\geqslant p(v^*)$ при $v<v^*$ (здесь $v=\varrho^{-1}$ – удельный объем). Если $p'(v)>0$, то существует постоянная такая, что $p'(v)\leqslant R\,|v$, т.е. на бесконечности функция $p(v)$ затухает. Если в уравнениях Навье-Стокса отбросить вязкость, то получим нелинейное уравнение смешанного типа, для которого, вообще говоря, непонятно, как ставить задачу. Добавление вязкости аналогично регуляризации уравнений второго порядка уравнением третьего порядка, для которого постановка краевой задачи очевидна. Кажихов доказал существование и единственность сильного глобального решения смешанной задачи.

Рассмотрим задачу о газовом шаре, находящемся под действием сил гравитации и газокинетического давления. В предложении сферической симметрии исходные уравнения

$$\frac{du}{dt}=-G\,\frac{M(r)}{r^2}-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}\,,\quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\varrho u\right)=0\,,$$
$$M(r)=\int\limits^{r}4\pi r'^2\varrho(r')dr'\,,\qquad p=p(\varrho)\,, \tag{17}$$

где u – радиальная скорость, ϱ – плотность, p – давление газа, G – гравитационная постоянная.

В случае политропной зависимости давления газа от плотности $p=C\varrho^2$ система уравнений (17) имеет стационарное решение: $u=0,\ \varrho(r)=\varrho_0 \sin\pi r/\pi r$, ϱ_0 – плотность в центре шара, радиус которого равен $R_0=\sqrt{\pi/2G}\approx 48{,}5\ м$. Большой интерес представляет решение системы (17) в случае немонотонной зависимости $p(\varrho)$, например, типа зависимости Ван-дер-Ваальса, поскольку области, где $dp/d\varrho<0$, являются неустойчивыми. Численное решение системы уравнений с немонотонной связью между давлением и плотностью показало, что в зависимости от глубины "ямы" на графике $p(\varrho)$ получаются существенно различные распределения плотности по радиусу шара: либо происходит разделение шара на две области с заметно различающейся плотностью и резкой границей между этими областями – режим I, либо имеет место непрерывное изменение плотности – режим II [15].

В режиме I плотности газа справа и слева от разрыва находятся в области, где $dp/d\varrho>0$; разделение шара на две части происходит потому, что область с $dp/d\varrho<0$ неустойчива. С течением времени плотности и радиус шара испытывают колебания, причем колебания плотности во внешней части шара существенно меньше, чем во внутренней. В режиме II также имеют место колебания плотности, совпадающие по порядку величины с колебаниями плотности в режиме I в области, внешней по отношению к разрыву. Таким образом, немонотонные уравнения состояния типа Ван-дер-Ваальса могут определять гидродинамические автоколебательные процессы. Эти особенности физически связаны с фазовыми переходами и источниками энергии, а математически находят свое выражение в переменности типа исходных уравнений (гиперболический – эллиптический).

Литература

1. D a l y B.I. The stability properties of coupled pair of nonlinear partial difference equations. – Math.Comp.,1963,№84,p.17.

2. Я н е н к о Н.Н., Н о в и к о в В.А. Об одной модели жидкости со знакопеременным коэффициентом вязкости. - Численные методы механики сплошной среды,1973,т.4,№2,с.142-147.
3. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О новых уравнениях для описания движения вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач. - Труды МИАН,1967,т.102.
4. С т а р р В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М., 1971.
5. З е л е н я к Т.И., Н о в и к о в В.А., Я н е н к о Н.Н. О свойствах решения нелинейных уравнений переменного типа. - Численные методы механики сплошной среды,1974,т.5,№4,с.35-47.
6. З е л е н я к Т.И. Об одном уравнении со знакопеременным коэффициентом диффузии. - Сб.: Математические проблемы химии,ч. I. Новосибирск,1975.
7. Б е л о н о с о в В.С., З е л е н я к Т.И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск,НГУ,1975.
8. B e r e z i n Yu.A., D u d n i k o v a G.I., N o v i k o v V.A., Y a n e n k o N.N. Analytical and numerical studies of equations with sign changing viscosity coefficient, - Lect. Notes in Math.,1977,№594.
9. Я н е н к о Н.Н., К у р б а т к и н Г.П., К р у п ч а т н и к о в В.Н., Э й х е р М.Ш. Об одной модели циркуляции атмосферы с локальным знакопеременным коэффициентом турбулентности. - Численные методы механики сплошной среды,1976,т.7,№1.
10. Б е л о в Ю.Я., Я н е н к о Н.Н. Об одной регуляризации уравнения Бюргерса. Докл. АН СССР (в печати).
11. M a c C a n n y R.C. Existence, uniqueness and stability of solutions of the equation . - Ind. Univ.Math.J.,1970,vol.20,№3,p.231-238.
12. К о ж а н о в А.И. Смешанная задача для одного класса уравнений неклассического типа. - Дифференциальные уравнения,1979, №2,с.272-280.
13. В р а г о в В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанного-составного типа высокого порядка. - В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики.Новосибирск,1978.
14. Л а р ь к и н Н.А. Об одном классе нелинейных уравнений смешанного типа. - СМЖ,1978,т.XIX,п.6,с.1308-1314.
15. Я н е н к о Н.Н., Б е р е з и н Ю.А., К р и в о п у ц к и й В.С. Гравитирующий газовый шар. - Численные методы механики сплошной среды,1978,т.9,№4.