I. I. Sharapudinov, On the asymptotics of Chebyshev polynomials that are orthogonal on a finite system of points,
*Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1992, Number 1, 29–35

ними операторными соотношениями (9′), (33) при $\gamma=\hat{k}$ и соотношением (34) при $E=\hat{H}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диксмье Ж.-П. Универсальные обертывающие алгебры. М., 1978.
2. Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р. Неприводимые представления простой трехмерной алгебры Ли над полем конечной характеристики//Матем. заметки. 1967. 2, № 5. 437—447.
3. Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. М., 1989.
4. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. М., 1986.

Поступила в редакцию
28.06.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1992. № 1

УДК 517.5

**И. И. Шарапудинов**

## ОБ АСИМПТОТИКЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ТОЧЕК

Пусть $N$ — натуральное число, $\alpha$, $\beta>-1$. Через $T_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$ $(0\leqslant n\leqslant N-1)$ обозначим классические многочлены Чебышева (часто называемые также многочленами Хана), образующие ортогональную систему на множестве $\Omega=\{0, 1, ..., N-1\}$ с весом

$$\mu(x)=\mu(x;\ \alpha,\ \beta,\ N)=\frac{\Gamma(x+\beta+1)\,\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(N-x)}\,\frac{(N-1)!\,2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \tag{1}$$

и такие, что $(0\leqslant n\leqslant N-1)$

$$T_n^{(\alpha,\beta)}(N-1,\ N)=\binom{n+\alpha}{n}. \tag{2}$$

Положим

$$h_{n,N}^{(\alpha,\beta)}=\sum_{x=0}^{N-1}\mu(x)\,[T_n^{(\alpha,\beta)}(x,\ N)]^2, \tag{3}$$

$$\widehat{T}_n^{(\alpha,\beta)}(x,\ N)=\{h_{n,N}^{(\alpha,\beta)}\}^{-1/2}\,T_n^{(\alpha,\beta)}(x,\ N). \tag{4}$$

Из (3) и (4) имеем $(0\leqslant n,\ m\leqslant N-1)$

$$\sum_{x=0}^{N-1}\mu(x)\,\widehat{T}_n^{(\alpha,\beta)}(x,\ N)\,\widehat{T}_m^{(\alpha,\beta)}(x,\ N)=\delta_{nm}=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ 1 & (m=n).\end{cases} \tag{5}$$

П. Л. Чебышев [1] показал, что $(a^{[0]}=1,\ a^{[n]}=a\ldots(a-n+1))$

$$h_{n,N}^{(\alpha,\beta)}=\frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)\,2^{\alpha+\beta+1}}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\,(2n+\alpha+\beta+1)}. \tag{6}$$

Кроме того, имеет место формула [2]

$$T_n^{(\alpha,\beta)}(x,\ N)=\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{(-1)^n n!}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-n)_\nu\,(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{\Gamma(\nu+\beta+1)\,\nu!}\,\frac{x^{[\nu]}}{(N-1)^{[\nu]}}, \tag{7}$$

где $(a)_0=a^{[0]}=1$, $(a)_\nu=a\ldots(a+\nu-1)$, $a^{[\nu]}=a\ldots(a-\nu+1)$.

В настоящей статье рассмотрены асимптотические свойства многочленов Чебышева $\hat{T}_n^{(\alpha,\beta)}(x, N)$ в случае, когда $\alpha, \beta$ — целые, $n=0(N^{1/2})$. Поскольку [2]

$$\hat{T}_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{N-1}{2}(1-t),\ N\right]=(-1)^n\hat{T}_n^{(\beta,\alpha)}\left[\frac{N-1}{2}(1+t),\ N\right],$$

то достаточно ограничиться случаем, когда $0\leqslant t\leqslant 1$. Пусть

$$\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)=\{h_n^{(\alpha,\beta)}\}^{-1/2}P_n^{(\alpha,\beta)}(t), \tag{8}$$

где

$$h_n^{(\alpha,\beta)}=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)\,2^{\alpha+\beta+1}}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\,(2n+\alpha+\beta+1)}, \tag{9}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(t)=\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{(-1)^n n!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{n^{[\nu]}(n+\alpha+\beta+1)\,\nu}{\Gamma(k+\beta+1)\,k!}\left(\frac{1+t}{2}\right)^k \tag{10}$$

— многочлен Якоби. Как известно [3],

$$\int_{-1}^{1}\varkappa(t)\,\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)\,\hat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(t)\,dt=\delta_{nm}, \tag{11}$$

где $\varkappa(t)=\varkappa(t;\ \alpha,\beta)=(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$. Через $c_k$, $c_k(\gamma,\ldots,\nu)$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров. Основной результат настоящей статьи состоит в следующем.

Теорема. *Пусть $\alpha$, $\beta$ — целые неотрицательные числа, $q$, $a>0$. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\hat{T}_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{N-1}{2}(1+t),\ N\right]=\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)+v_n(t), \tag{12}$$

*в которой для остаточного члена $v_n(t)=v_n(t;\ \alpha,\beta,N)$ при $1\leqslant n\leqslant aN^{1/2}$ справедливы оценки* $(c_1=c_1(\alpha,\ \beta,\ a),\ c_2=c_2(\alpha,\ b,\ a,\ q))$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|v_n(t)|\leqslant c_1 n^{\alpha+3/2}N^{-1/2},$$

$$|v_n(\cos\theta)|\leqslant c_2\frac{n}{N^{1/2}}\theta^{-\alpha-1/2}\left(qn^{-1}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Из теоремы с учетом известных оценок для многочленов Якоби [3] вытекает

Следствие. *Пусть $0\leqslant\alpha$, $\beta$ — целые, $a$, $q>0$. Тогда* $(1\leqslant n\leqslant aN^{1/2})$

$$\left|\hat{T}_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{N-1}{2}(1+\cos\theta),\ N\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant c_3(\alpha,\ \beta,\ a,\ q)\begin{cases}\theta^{-\alpha-1/2} & \left(qn^{-1}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),\\ n^{\alpha+1/2} & (0\leqslant\theta\leqslant qn^{-1}).\end{cases}$$

Утверждение следствия для произвольных $\alpha$, $\beta\geqslant-1/2$ при $1\leqslant n\leqslant aN^{1/2}$ было получено в [4]. Асимптотические свойства многочленов Чебышева $T_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{N-1}{2}(1+t),\ N\right]$ для произвольных $\alpha$, $\beta>-1$ при $1\leqslant n\leqslant aN^{1/2}$, $-1+\varepsilon\leqslant t\leqslant 1-\varepsilon$ $(0<\varepsilon<1)$ исследовались в [6]. В случае целых $\alpha$, $\beta\geqslant 0$ в работе [6] был получен полный асимптотический ряд по параметру $N$. При фиксированном $n$ и $N\to\infty$ асимптотика многочленов

$$Q_n(x;\ \alpha,\ \beta,\ N)=(-1)^n\binom{n+\alpha}{n}^{-1}T_n^{(\beta,\alpha)}(x,\ N)$$

изучалась в [7]. Отметим еще, что асимптотика многочленов $\widehat{T}_n^{(0,0)}\left[\frac{N-1}{2}(1+t),\ N\right]$ при $n=o(N^{1/2})$ исследовалась в [8].

Замечание. Из следствия для целых $\alpha$, $\beta\geqslant 0$ непосредственно вытекает оценка

$$n^{-\alpha-1/2}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\widehat{T}_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{N-1}{2}(1+t),\ N\right]\right|\asymp 1$$

равномерно относительно $1\leqslant n\leqslant aN^{1/2}$, где $a$ — фиксированное положительное число. Можно показать, что условие $n\leqslant aN^{1/2}$ является также и необходимым для справедливости указанной оценки.

Доказательство теоремы. Нам понадобится следующий результат (см. [3, с. 190]). Пусть $\alpha$, $\beta>-1$, $\sigma_n(t)$ — произвольный алгебраический многочлен степени $n$, подчиненный условию

$$\int_{-1}^{1}\varkappa(t)\,\sigma_n^2(t)\,dt\leqslant A^2. \tag{13}$$

Тогда ($c_4=c_4(\alpha,\ \beta,\ q)$)

$$|\sigma_n(\cos\theta)|\leqslant c_4|A|\begin{cases}\theta^{-\alpha-1/2}n^{1/2} & \left(qn^{-1}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),\\ n^{\alpha+1} & (0\leqslant\theta\leqslant qn^{-1}).\end{cases} \tag{14}$$

Положим

$$\tau_n(t)=\tau_n(t;\ \alpha,\ \beta,\ N)=\widehat{T}_n^{(\alpha,\beta)}\left[\frac{N-1}{2}(1+t),\ N\right]. \tag{15}$$

Тогда для $v_n(t)$ (см. (12)) имеем

$$\int_{-1}^{1}\varkappa(t)\,v_n^2(t)\,dt=\int_{-1}^{1}\varkappa(t)\,\{\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)\}^2\,dt+\int_{-1}^{1}\varkappa(t)\,\tau_n^2(t)\,dt-$$
$$-2\int_{-1}^{1}\varkappa(t)\,\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)\,\tau_n(t)\,dt=I_1+I_2-I_3. \tag{16}$$

Ясно, что $I_1=1$, $I_3=2k_{n,N}/k_n$, где $k_n$ и $k_{n,N}$ — старшие коэффициенты многочленов $\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ и $\tau_n(t)$ соответственно. Из (6)—(10) получим

$$\frac{k_{n,N}}{k_n}=\left(\frac{h_n^{(\alpha,\beta)}}{h_{n,N}^{(\alpha,\beta)}}\right)^{1/2}\frac{(N-1)^n}{(N-1)^{[n]}}=\frac{(N-1)^n}{[(N-1)^{[n]}(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}]^{1/2}}=$$
$$=\left[\frac{(N-1)^{2n}(N-1)_n}{(N-1)^2[(N-1)^2-1]\ldots[(N-1)^2-(n-1)^2](N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}\right]^{1/2}\geqslant$$
$$\geqslant\left[\frac{(N-1)_n}{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}\right]^{1/2}=\left[\frac{(N-1)\ldots(N+\alpha+\beta)}{(N+n+\alpha+\beta)\ldots(N+n-1)}\right]^{1/2}\geqslant$$
$$\geqslant 1-c_5(\alpha,\ \beta)\frac{n}{N}. \tag{17}$$

В силу (17)

$$I_3 \geqslant 2 - c_6(\alpha, \beta)\frac{n}{N}. \tag{18}$$

Рассмотрим интеграл $I_2$. Положим $t_j = -1 + 2j/(N-1)$. Для целых $\alpha, \beta \geqslant 0$ в силу формулы суммирования Эйлера имеем

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \varkappa(t)\,\tau_n^2(t)\,dt = \frac{2}{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \varkappa(t_j)\,\tau_n^2(t_j) -$$

$$-\frac{1}{N-1}\left[\varkappa(1)\,\tau_n^2(1) + \varkappa(-1)\,\tau_n^2(-1)\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{s} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{2}{N-1}\right)^{2k}\left[d_k^+ - d_k^-\right], \tag{19}$$

где $s$ — целая часть числа $n + (\alpha+\beta+1)/2$, $B_{2k}$ ($k = 1, 2, \dots$) — числа Бернулли,

$$d_k^{\pm} = d_k^{\pm}(\alpha, \beta) = \left[\varkappa(t)\,\tau_n^2(t)\right]_{t=\pm 1}^{(2k-1)}. \tag{20}$$

При $-1 \leqslant t \leqslant 1$ из (1) следует, что

$$\frac{2\varkappa(t)}{(N-1)\,\mu\left[\dfrac{N-1}{2}(1+t)\right]} = \frac{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}{(N-1)\,(N-1)!\,(N-1)^{\alpha+\beta}}\times$$

$$\times\frac{(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}}{\left(1-t+\dfrac{2}{N-1}\right)\cdots\left(1-t+\dfrac{2\alpha}{N-1}\right)\left(1+t+\dfrac{2}{N-1}\right)\cdots\left(1+t+\dfrac{2\beta}{N-1}\right)} <$$

$$< 1 + c_7(\alpha, \beta)\frac{1}{N}. \tag{21}$$

В силу (1), (3)—(5), (15) и (21)

$$\frac{2}{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \varkappa(t_j)\,\tau_n^2(t_j) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2\varkappa(t_j)\,\mu(j)}{(N-1)\,\mu\left[\dfrac{N-1}{2}(1+t_j)\right]}\left[\widehat{T}_n^{(\alpha,\beta)}(j, N)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + c_7(\alpha, \beta)\frac{1}{N}\right)\sum_{j=0}^{N-1} \mu(j)\left[\widehat{T}_n^{(\alpha,\beta)}(j, N)\right]^2 = 1 + c_7(\alpha, \beta)\frac{1}{N}. \tag{22}$$

Сопоставляя (19) и (22), замечаем, что

$$I_2 \leqslant 1 + c_8(\alpha, \beta)\frac{n}{N} + \sum_{k=1}^{s}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\left(\frac{2}{N-1}\right)^{2k}\left(|d_k^+| + |d_k^-|\right),$$

поэтому с учетом (16) и (18) имеем

$$\int_{-1}^{1} \varkappa(t)\,v_n^2(t)\,dt \leqslant c_9(\alpha, \beta)\frac{n}{N} + \sum_{k=1}^{s}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\left(\frac{2}{N-1}\right)^{2k}\left(|d_k^+| + |d_k^-|\right). \tag{23}$$

Перейдем к оценке величин $|d_k^+|$ и $|d_k^-|$. Поскольку

$$\varkappa(t;\ \alpha,\ \beta)\tau_n^2(t;\ \alpha,\ \beta,\ N)=\varkappa(-t;\ \beta,\ \alpha)\tau_n^2(-t;\ \beta,\ \alpha,\ N),$$

то из (20) получим

$$d_k^+(\alpha,\ \beta)=(-1)^{2k-1}d_k^-(\beta,\ \alpha). \tag{24}$$

Поэтому достаточно оценить величину $|d_k^-|$. Так как для целых $\alpha$, $\beta$ функция $\varkappa(t)=(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ представляет собой многочлен степени $\alpha+\beta$, то в силу формулы Лейбница имеем из (15) и (20)

$$d_k^-=\sum_{j=\beta}^{\lambda}\binom{2k-1}{j}\varkappa^{(j)}(-1)\{[\widehat{T}_n^{(\alpha,\beta)}(0,\ N)]^2\}^{(2k-1-j)}\left(\frac{N-1}{2}\right)^{2k-1-j}, \tag{25}$$

где $\lambda=\min\{\alpha+\beta, 2k-1\}$. Далее ввиду (4)

$$\{[\widehat{T}_n^{(\alpha,\beta)}(0,\ N)]^2\}^{(m)}=\{h_{n,N}^{(\alpha,\beta)}\}^{-1}\{[T_n^{(\alpha,\beta)}(0,\ N)]^2\}^{(m)}=$$

$$=\{h_{n,N}^{(\alpha,\beta)}\}^{-1}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\{T_n^{(\alpha,\beta)}(0,\ N)\}^{(l)}\{T_n^{(\alpha,\beta)}(0,\ N)\}^{(m-l)}. \tag{26}$$

Воспользовавшись (7), получим

$$\{T_n^{(\alpha,\beta)}(0,\ N)\}^{(r)}=(-1)^n\frac{(n+\beta)!}{n!}\times$$

$$\times\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{n^{[\nu]}(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{(\nu+\beta)!\,\nu!}\frac{x^{[\nu]}}{(N-1)^{[\nu]}}\right\}_{x=0}^{(r)}=$$

$$=(-1)^n\frac{(n+\beta)!}{n!}\sum_{\nu=r}^{n}(-1)^\nu\frac{n^{[\nu]}(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{(\nu+\beta)!\,\nu!}\frac{(x^{[\nu]})_{x=0}^{(r)}}{(N-1)^{[\nu]}}. \tag{27}$$

Так как

$$(x^{[\nu]})^{(r)}=\sum_{j=r}^{\nu}j^{[r]}s(\nu,\ j)\,x^{j-r},$$

где $s(\nu, j)$ $(j=1, \ldots, \nu)$ — числа Стирлинга первого рода, то

$$(x^{[\nu]})_{x=0}^{(r)}=s(\nu,\ r)\,r!$$

Поэтому из (27) находим

$$\{T_n^{(\alpha,\beta)}(0,\ N)\}^{(r)}=$$

$$=(-1)^n\frac{(n+\beta)!}{n!}\sum_{\nu=r}^{n}(-1)^\nu\frac{n^{[\nu]}(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{(\nu+\beta)!\,\nu!\,(N-1)^{[\nu]}}r!\,s(\nu,\ r). \tag{28}$$

Воспользуемся оценкой

$$|s(\nu,\ r)|=\frac{\nu!\,\nu^{\nu-r}}{r!\,(\nu-r)!}, \tag{29}$$

установленной в [5]. Из (28) и (29), применяя формулу Стирлинга, получим

$$|\{T_n^{(\alpha,\beta)}(0,\ N)\}^{(r)}|\leqslant\gamma(\alpha,\ \beta)\,\delta(n,\ N)\frac{n^{2r}}{(N-1)^r}\,\frac{(n+\beta)!}{n!}\sum_{\nu=r}^{n}\left(\frac{n^2}{N-1}\right)^{\nu-r}\times$$

$$\times\frac{\nu^{\nu-r}}{(\nu-r)!\,(\nu+\beta)!}<\gamma(\alpha,\ \beta)\,\delta(n,\ N)\left(\frac{n^2}{N-1}\right)^r\frac{(n+\beta)!}{n!}\sum_{\nu=r}^{n}\left(\frac{n^2}{N-1}\right)^{\nu-r}\times$$

$$\times\frac{\nu^{\nu-r}e^{\nu+\beta+1}}{(\nu-r)!\,(\nu+\beta+1)^{\nu+\beta}}<\gamma(\alpha,\ \beta)\,\delta(n,\ N)\left(\frac{n^2}{N-1}\right)^r\times$$

$$\times\frac{(n+\beta)!\,e^{k+\beta+1}}{n!\,(r+\beta+1)^{r+\beta}}\sum_{\nu=r}^{n}\left(\frac{en^2}{N-1}\right)^{\nu-r}\frac{1}{(\nu-r)!}<\gamma(\alpha,\ \beta)\,\delta(n,\ N)\times$$

$$\times\left(\frac{n^2}{N-1}\right)^r\frac{(n+\beta)!}{n!}\,\frac{e^{r+\beta+1}}{(r+\beta+1)^{r+\beta}}\exp\left(\frac{en^2}{N-1}\right), \tag{30}$$

где

$$\gamma(\alpha,\ \beta)=\sup_{1\leqslant\nu\leqslant n}\frac{n^{[\nu]}\,(n+\alpha+\beta+1)_\nu}{n^{2\nu}},\quad \delta(n,\ N)=\frac{(N-1)^n}{(N-1)^{[n]}}. \tag{31}$$

Сопоставляя (26) и (30), имеем

$$|\{[\widehat{T}_n^{(\alpha,\beta)}(0,\ N)]^2\}^{(m)}|\leqslant[\gamma(\alpha,\ \beta)\,\delta(n,\ N)]^2\,\{h_{n,N}^{(\alpha,\beta)}\}^{-1}\,e^{m+2(\beta+1)}\times$$

$$\times e^{\frac{2en^2}{N-1}}\left[\frac{(n+\beta)!}{n!}\right]^2\left(\frac{n^2}{N-1}\right)^m\sum_{l=0}^{m}\frac{\binom{m}{l}}{(l+\beta+1)^{l+\beta}\,(m-l+\beta+1)^{m-l+\beta}}\leqslant$$

$$\leqslant[\gamma(\alpha,\ \beta)\,\delta(n,\ N)]^2\,e^{\frac{2en^2}{N-1}}\,\{h_{n,N}^{(\alpha,\beta)}\}^{-1}\left[\frac{(n+\beta)!}{n!}\right]^2\times$$

$$\times e^{2(\beta+1)}\,2^{2\beta}\left(\frac{4en^2}{N-1}\right)^m\frac{1}{(m+2\beta+2)^{m+2\beta}}. \tag{32}$$

Если $0\leqslant n\leqslant aN^{1/2}$, то нетрудно заметить, что

$$\delta(n,\ N)=\frac{(N-1)^n}{(N-1)^{[n]}}\leqslant c_{10}(a). \tag{33}$$

Кроме того, из (6) при $\alpha,\ \beta\geqslant 0$ вытекает следующая оценка:

$$\{h_{n,N}^{(\alpha,\beta)}\}^{-1}\leqslant c_{11}n. \tag{34}$$

Из (32)—(34) имеем ($c_{12}=c_{12}(\alpha,\beta,a)$)

$$|\{[\widehat{T}_n^{(\alpha,\beta)}(0,\ N)]^2\}^{(m)}|\leqslant\frac{c_{12}n^{2\beta+1}}{(m+2\beta+2)^{m+2\beta}}\left(\frac{4en^2}{N-1}\right)^m. \tag{35}$$

Сопоставляя (25) и (35), получаем

$$|d_k^-|\leqslant c_{13}\sum_{j=\beta}^{\lambda}\binom{2k-1}{j}|\varkappa^{(j)}(-1)|\frac{(2e)^{2k-1-j}n^{4k-1-2j+2\beta}}{(2k+1-j+2\beta)^{2k-1-j+2\beta}}\leqslant$$

$$\leqslant c_{14}\,\frac{(2e)^{2k}\,(n^2)^{2k-1}\,n}{(2k+1)^{2k-1}}. \tag{36}$$

Отметим еще следующую известную оценку для чисел Бернулли:

$$|B_{2k}| \leqslant \frac{2\,(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \frac{1}{1-2^{1-2k}} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{37}$$

Из (23), (24), (36) и (37) получаем для $1 \leqslant n \leqslant aN^{1/2}$

$$\int_{-1}^{1} \varkappa(t)\, v_n^2(t)\, dt \leqslant c_{15}(\alpha,\ \beta) \frac{n}{N} + c_{16}(\alpha,\ \beta,\ a) \frac{n^3}{N^2}.$$

Тем самым для $\sigma_n(t)=v_n(t)$ справедлива оценка (13) с константой $A^2=c_{15}(\alpha,\beta)n/N+c_{16}(\alpha,\beta,a)n^3/N^2$, поэтому утверждение теоремы вытекает из оценки (14).

Автор искренне признателен Б. С. Кашину за обсуждение результатов и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чебышев П. Л. Полн. собр. соч. в 5 т. М., 1947—1951. Т. 3. 66—87.
2. Karlin S., McGregor J. L. The Hahn polynomials, formulas and an application // Scr. math. 1961. 26. 33—46.
3. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М., 1962.
4. Шарапудинов И. И. Асимптотические свойства и весовые оценки многочленов Хана // Изв. вузов. Математика. 1985. № 5. 78—80.
5. Шарапудинов И. И. Асимптотические свойства ортогональных многочленов Хана дискретной переменной // Матем. сб. 1989. 180, № 9. 1259—1277.
6. Šarapudinov I. I. An asymptotic formulas having no remainder term for the orthogonal Hahn polynomials of discrete variable // Mathematica Balkanica. New Series. 1988. 2, N 4. 314—318.
7. Wilson M. W. On the Hahn polynomials // SIAM J. Math. Anal. 1970. 42, N 1. 131—139.
8. Минко А. А., Петунин Ю. И. Сходимость метода наименьших квадратов в равномерной метрике // Сиб. матем. журн. 1990. 31, № 2. 111—122.

Поступила в редакцию
31.10.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1992. № 1

УДК 515.12

Л. Б. Шапиро

## ОБ ОПЕРАТОРАХ ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ И НОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРАХ

В категории нормальных функторов $NF$, введенной Е. В. Щепиным [1], наиболее изученными являются функторы гиперпространства exp и вероятностных мер $P$. Первый из указанных функторов имеет чисто категорную характеристику [2], а второй определяется как множество линейных, положительных, регулярных функционалов на пространстве непрерывных функций, наделенное слабой* топологией [3]. В настоящей статье, с одной стороны, предлагается описание функтора exp как множества надлежащим образом выбранного семейства функционалов в слабой* топологии (теорема 2), а с другой — дается чисто категорная характеристика функтора $P$ (теорема 4).

Введем необходимые понятия. Все пространства предполагаются бикомпактными и хаусдорфовыми. Через $C_+(X)$ обозначается пространство неотрицательных на $X$ непрерывных функций с естественными