S. S. Vallander, Occupation times for countable Markov chairus. II. Chains with continuous time, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1983, Volume 130, 56–64

С.С.Валландер

ВРЕМЕНА ПРЕБЫВАНИЯ ДЛЯ СЧЕТНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА
II. ЦЕПИ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Пусть $x(t)$ $(t\geqslant 0)$ – однородная цепь Маркова с конечным или счетным множеством состояний $\mathbb{A}$, P_a – вероятностная мера, отвечающая начальному условию $x(0)=a$ $(a\in\mathbb{A})$, e – неотрицательная случайная величина с распределением

$$P.(e>t\mid\mathbb{B})=e^{-\alpha t}$$

($\mathbb{B}$ – σ-алгебра событий, связанных с цепью). В этой части работы мы получаем ряд свойств случайного поля

$$\tau(\xi)=\int_0^e 1_{\{\xi\}}(x(t))dt \qquad (\xi\in\mathbb{A}),$$

аналогичных полученным в части I ([I]) для цепей Маркова с дискретным временем.

Мы предполагаем, что $x(t)$ – сепарабельный процесс со стандартной переходной функцией, не имеющий мгновенных состояний (см. [2]). В этих предположениях время пребывания $\tau(\cdot)$ корректно определено, а переходный оператор P^t представим в виде

$$P^t=e^{\varphi_0 t},$$

причем область определения оператора φ_0 содержит все ограниченные функции на $\mathbb{A}$. В неявной форме (см. часть I) мы используем также предположение, что $x(t)$ – строго марковский процесс.

Начнем с описания условных конечномерных распределений поля $\tau(\xi)$ при условии $x(e)=b$.

В нашей ситуации роль уравнения теплопроводности играет уравнение

$$\frac{\partial u(t,a)}{\partial t}=(\varphi_0 u)(t,a) \tag{I}$$

($t\in\mathbb{R}^+$, а $a\in\mathbb{A}$). Как обычно, подразумевается, что оператор φ_0 действует на переменную t.

Если f – ограниченная функция на $\mathbb{A}$, то решение уравнения (I) с начальным условием $u(0,a)=f(a)$ задается формулой

$$u(t,a)=\mathbb{E}_a f(x(t))=\sum_b P_t(a,b)f(b)$$

(единственное ограниченное решение), см. [4], стр.48. При этом преобразование Лапласа

$$\hat{u}(\alpha,a)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}u(t,a)\,dt$$

удовлетворяет уравнению

$$(\alpha-\varphi_0)\,\hat{u}=f. \tag{2}$$

Для каждой неотрицательной ограниченной функции $K: A\to\mathbb{R}$ мы рассматриваем оператор $\varphi=\varphi_0-K$ и уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi u \tag{3}$$

с начальным условием $u|_{t=0}=f$. Если f ограничена, то единственное ограниченное решение (3) задается формулой

$$u(t,a)=\mathbb{E}_a\left[f(x(t))e^{-\int_0^t K(x(s))\,ds}\right].$$

При этом $\hat{u}$ удовлетворяет уравнению

$$(\alpha-\varphi)\,\hat{u}=f. \tag{4}$$

Формула Каца в нашем случае имеет вид

$$\hat{u}(\alpha,a)=\mathbb{E}_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(x(t))\,e^{-\int_0^t K(x(s))\,ds}\,dt\right].$$

Проверим, что $\hat{u}$ – единственное ограниченное решение (4). Для этого покажем, что однородное уравнение

$$(\alpha-\varphi)\,g=0 \tag{5}$$

имеет единственное ограниченное решение $g\equiv 0$. Действительно, если g – ограниченное решение (5), то

$$e^{\varphi t}g=e^{\alpha t}g,\qquad (1-e^{-\alpha}e^{\varphi})\,g=0.$$

Полугруппа операторов $e^{\varphi t}$ – полустохастическая ([2], стр. 343), поэтому оператор $(1-e^{-\alpha}e^{\varphi})$ обратим (в пространстве ограниченных функций) и $g\equiv 0$.

Решение уравнения (4) можно представить через функцию Грина:

$$\hat{u}(\alpha,a)=\sum_{b} G(a,b)f(b), \tag{6}$$

где $G(\cdot,b)$ – ограниченное решение уравнения

$$(\alpha-\mathcal{G})G(\cdot,b)=1\!\!1_{\{b\}}(\cdot).$$

Аналогично части I находим

$$\mathbb{E}_a\left[e^{-\int_0^e K(x(s))\,ds},\ x(e)=b\right]=G(a,b),$$

$$\mathbb{E}_{ab}\left[e^{-\int_0^e K(x(s))\,ds}\right]=\frac{G(a,b)}{G_0(a,b)}.$$

Для конечного $B\subset A$ введем $K^*=K+\sum_{\xi\in B}\gamma(\xi)1\!\!1_{\{\xi\}}$ и соответствующую функцию Грина G^*. Тогда

$$\mathbb{E}_{ab}\left[e^{-\sum_{\xi\in B}\gamma(\xi)\tau(\xi)-\int_0^e K(x(s))\,ds}\right]=\frac{G^*(a,b)}{G_0(a,b)}.$$

Аналогично части I получаем

$$G(a,b)-G^*(a,b)=\sum_{c\in B}\gamma(c)\,G^*(a,c)G(c,b).$$

Отсюда для $\xi\in B$

$$G^*(a,\xi)=\frac{d(\xi)}{d}$$

и для любого $b\in A$

$$G^*(a,b)=G(a,b)-\frac{1}{d}\sum_{c\in B}\gamma(c)\,d(c)\,G(c,b).$$

Здесь d и $d(c)$ – определители, аналогичные введенным в части I. Вычисления, почти совпадающие с вычислениями части I, дают окончательную формулу

$$\mathbb{E}_{ab}\left[e^{-\sum_{\xi\in B}\gamma(\xi)\tau(\xi)-\int_0^e K(x(s))\,ds}\right]=\frac{G(a,b)}{G_0(a,b)}-$$

$$-\frac{\sum\limits_{M\subset B}\left(\prod\limits_{c\in M}\gamma(c)\right)\sum\limits_{\xi\in M} G(a,\xi)\,G_\xi(M)}{G_0(a,b)\sum\limits_{M\subset B}\left(\prod\limits_{c\in M}\gamma(c)\right)G(M)},$$

где $G(M)=\det\|G(c,d)\|_{c,d\in M}$, а $G_\xi(M)$ - определитель, получающийся из $G(M)$ подстановкой b вместо каждого вхождения ξ в правом аргументе $G(\cdot,\cdot)$.

В случае $B=\{\xi\}$ получаем

$$P_{ab}\left[\tau(\xi)=0\right]=1-\frac{G_0(a,\xi)G_0(\xi,b)}{G_0(a,b)G_0(\xi,\xi)},$$

$$P_{ab}\left[\tau(\xi)>t\right]=\frac{G_0(a,\xi)G_0(\xi,b)}{G_0(a,b)G_0(\xi,\xi)}\,e^{-\frac{t}{G_0(\xi,\xi)}}\qquad(t>0),$$

$$\mathbb{E}_{ab}\left[e^{-\int_0^e K(x(s))ds}\,\Big|\,\tau(\xi)=0\right]=$$

$$=\frac{G(a,b)G(\xi,\xi)-G(a,\xi)G(\xi,b)}{G_0(a,b)G_0(\xi,\xi)-G_0(a,\xi)G_0(\xi,b)}\cdot\frac{G_0(\xi,\xi)}{G(\xi,\xi)},$$

$$\mathbb{E}_{ab}\left[e^{-\int_0^e K(x(s))ds}\,\Big|\,\tau(\xi)=t\right]=$$

$$=\frac{G(a,\xi)G(\xi,b)G_0(\xi,\xi)^2}{G_0(a,\xi)G_0(\xi,b)G(\xi,\xi)^2}\,e^{-t\left[\frac{1}{G(\xi,\xi)}-\frac{1}{G_0(\xi,\xi)}\right]}\qquad(t>0).$$

Отметим, что приводимые формулы ближе к соответствующим формулам для броуновского движения (см. [3]), чем к формулам части I.

Аналогично формулам части I можно выписать еще несколько полезных, но громоздких формул. Мы их опускаем.

Назовем цепь Маркова Д-цепью, если ядро $Q(a,b)$ оператора $\mathcal{G}_0$ симметрично и $Q(a,b)=0$, $|a-b|>1$. Такие цепи задаются набором величин $q(a)=Q(a,a+1)$ $\left(Q(a,a)=-\sum\limits_{b\neq a}Q(a,b)\right)$.

Функцию Грина Д-цепи можно описать так же, как в части I.

Сначала строим функции g_1 и g_2 – положительное возрастающее и положительное убывающее решения уравнения и доказываем, что вронскиан

$$W = W(a) = q(a)\,[g_1(a+1)g_2(a) - g_1(a)g_2(a+1)$$

не зависит от a. Затем полагаем

$$G(a,b) = G(b,a) = \frac{1}{W} g_1(a) g_2(b) \qquad (a \leqslant b).$$

Соответствующие выкладки почти дословно такие же, как в части I.

В случае периодической функции q можно выписать явное выражение для функции Грина, почти совпадающее с аналогичным выражением из части I.

Рассмотрим для определенности $q \equiv q_0$. Тогда (5) превращается в

$$(\alpha + 2q_0)g(a) - q_0[g(a-1) + g(a+1)] = 0,$$

что переходит при замене α на $e^{\alpha}-1$ и q_0 на p_0 в аналогичное уравнение из части I. Поэтому

$$G_0(a,b) = \frac{\lambda_-^{|b-a|}}{\lambda_+ - \lambda_-},$$

где

$$\lambda_\pm = \frac{1}{\lambda_\mp} = \frac{\alpha + 2q_0 \pm \sqrt{\alpha(\alpha + 4q_0)}}{2q_0}.$$

Та же замена α на $e^{\alpha}-1$ и $q(a)$ на $p(a)$ позволяет получить и общую формулу для функции Грина в периодическом случае.

Докажем теперь, что для любой Д-цепи с непрерывным временем случайный процесс $\tau(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{Z})$ марковский относительно мер P_{ab} (ср. с противоположным явлением в случае дискретного времени, описанным в части I).

Марковское свойство в точке $\xi \in \mathbb{Z}$ означает, что для любой функции $K \geqslant 0$ с $K(\xi)=0$ и любого $t \geqslant 0$

$$\mathbb{E}_{ab}\left[e^{-\int_0^{e} K(x(s))\,ds} \,\middle|\, \tau(\xi) = t\right] =$$

$$= \mathbb{E}_{ab}\left[e^{-\int_0^e K_-(x(s))ds} \,\middle|\, \tau(\xi)=t\right] \cdot \mathbb{E}_{ab}\left[e^{-\int_0^e K_+(x(s))ds} \,\middle|\, \tau(\xi)=t\right],$$

где $K_- = K\,\mathbb{1}_{(-\infty,\xi]}$, $K_+ = K\,\mathbb{1}_{[\xi,\infty)}$.

Следует оговорить, что при $t=0$ эти условные ожидания определены лишь для $\xi < min(a,b)$ и $\xi > max(a,b)$.

В соответствии с выписанными выше формулами, выражающими условные ожидания через функции Грина, для проверки марковского свойства достаточно проверить равенства

а)

$$\frac{1}{G(\xi,\xi)} - \frac{1}{G_0(\xi,\xi)} = \left[\frac{1}{G_-(\xi,\xi)} - \frac{1}{G_0(\xi,\xi)}\right] + \left[\frac{1}{G_+(\xi,\xi)} - \frac{1}{G_0(\xi,\xi)}\right],$$

б)

$$\frac{[G(a,b)G(\xi,\xi) - G(a,\xi)G(\xi,b)]\,G_0(\xi,\xi)}{[G_0(a,b)G_0(\xi,\xi) - G_0(a,\xi)G_0(\xi,b)]\,G(\xi,\xi)} =$$

$$= \frac{[G_-(a,b)G_-(\xi,\xi) - G_-(a,\xi)G_-(\xi,b)]\,G_0(\xi,\xi)}{[G_0(a,b)G_0(\xi,\xi) - G_0(a,\xi)G_0(\xi,b)]\,G_-(\xi,\xi)} \times$$

$$\times \frac{[G_+(a,b)G_+(\xi,\xi) - G_+(a,\xi)G_+(\xi,b)]\,G_0(\xi,\xi)}{[G_0(a,b)G_0(\xi,\xi) - G_0(a,\xi)G_0(\xi,b)]\,G_+(\xi,\xi)},$$

в)

$$\frac{G(a,\xi)G(\xi,b)G_0(\xi,\xi)^2}{G_0(a,\xi)G_0(\xi,b)G(\xi,\xi)^2} =$$

$$= \frac{G_-(a,\xi)G_-(\xi,b)G_0(\xi,\xi)^2}{G_0(a,\xi)G_0(\xi,b)G_-(\xi,\xi)^2} \cdot \frac{G_+(a,\xi)G_+(\xi,b)G_0(\xi,\xi)^2}{G_0(a,\xi)G_0(\xi,b)G_+(\xi,\xi)^2}.$$

Стандартные вычисления дают

$$g_1^-(a)=\begin{cases} g_1(a), & a\leqslant 0\\ \dfrac{g_{2,0}(-1)-g_1(-1)}{g_{2,0}(-1)-g_{1,0}(-1)}\,g_{1,0}(a)+\dfrac{g_1(-1)-g_{1,0}(-1)}{g_{2,0}(-1)-g_{1,0}(-1)}\,g_{2,0}(a), & a\geqslant 0\end{cases}$$

$$g_2^-(a)=\begin{cases} \dfrac{g_2(-1)-g_{2,0}(-1)}{g_2(-1)-g_1(-1)}\,g_1(a)+\dfrac{g_{2,0}(-1)-g_1(-1)}{g_2(-1)-g_1(-1)}\,g_2(a), & a\leqslant 0\\ g_{2,0}(a), & a\geqslant 0\end{cases}$$

$$g_1^+(a)=\begin{cases} g_{1,0}(a), & a\leqslant 0\\ \dfrac{g_2(1)-g_{1,0}(1)}{g_2(1)-g_1(1)}\,g_1(a)+\dfrac{g_{1,0}(1)-g_1(1)}{g_2(1)-g_1(1)}\,g_2(a), & a\geqslant 0\end{cases}$$

$$g_2^+(a)=\begin{cases} \dfrac{g_2(1)-g_{2,0}(1)}{g_{1,0}(1)-g_{2,0}(1)}\,g_{1,0}(a)+\dfrac{g_{1,0}(1)-g_2(1)}{g_{1,0}(1)-g_{2,0}(1)}\,g_{2,0}(a), & a\leqslant 0.\\ g_2(a), & a\geqslant 0.\end{cases}$$

Ясно, что при проверке формул а) – в) без ограничения общности можно считать $a\leqslant b$ и $\xi=0$. Из предположения $\xi=0$ и условия $K(\xi)=0$ с учетом уравнения $(\alpha-\varphi)g=0$ получаем

$$g(-1)=\frac{\alpha+q(0)+q(-1)-q(0)g(1)}{q(-1)}.$$

Это позволяет преобразовать выражения для g_1^- и g_2^- :

$$g_1^-(a)=\begin{cases} g_1(a), & a\leqslant 0\\ \dfrac{g_1(1)-g_{2,0}(1)}{g_{1,0}(1)-g_{2,0}(1)}\,g_{1,0}(a)+\dfrac{g_{1,0}(1)-g_1(1)}{g_{1,0}(1)-g_{2,0}(1)}\,g_{2,0}(a), & a\geqslant 0\end{cases}$$

$$g_2^-(a)=\begin{cases} \dfrac{g_{2,0}(1)-g_2(1)}{g_1(1)-g_2(1)}\,g_1(a)+\dfrac{g_1(1)-g_{2,0}(1)}{g_1(1)-g_2(1)}\,g_2(a), & a\leqslant 0\\ g_{2,0}(a), & a\geqslant 0.\end{cases}$$

Далее

$$W = q(0)\left[g_1(1) - g_2(1)\right],$$

$$W_0 = q(0)\left[g_{1,0}(1) - g_{2,0}(1)\right],$$

$$W_- = q(0)\left[g_1(1) - g_{2,0}(1)\right],$$

$$W_+ = q(0)\left[g_{1,0}(1) - g_2(1)\right],$$

так что $W + W_0 = W_- + W_+$. Последнее равенство доказывает формулу а).

Формулу б) следует проверять при $0 < a \leqslant b$ и $a \leqslant b < 0$. Оба случая рассматриваются совершенно одинаково, поэтому ограничимся первым из них. Имеем

$$\frac{G(a,b)G(\xi,\xi) - G(a,\xi)G(\xi,b)}{G(\xi,\xi)} =$$

$$= \frac{G(a,b)G(0,0) - G(0,a)G(0,b)}{G(0,0)} = \frac{\left[g_1(a) - g_2(a)\right] g_2(b)}{W}.$$

Поэтому соотношение б) эквивалентно соотношению

$$\frac{\left[g_1(a) - g_2(a)\right] g_2(b)}{W} \cdot \frac{\left[g_{1,0}(a) - g_{2,0}(a)\right] g_{2,0}(b)}{W_0} =$$

$$= \frac{\left[g_1^-(a) - g_2^-(a)\right] g_2^-(b)}{W_-} \cdot \frac{\left[g_1^+(a) - g_2^+(a)\right] g_2^+(b)}{W^+},$$

а последнее проверяется прямой подстановкой.

Для доказательства формулы в) следует рассмотреть три случая: $0 < a \leqslant b$, $a \leqslant 0 \leqslant b$, $a \leqslant b < 0$.

В первом из них

$$\frac{G(a,\xi)G(\xi,b)}{G(\xi,\xi)^2} = \frac{G(0,a)G(0,b)}{G(0,0)^2} = g_2(a) g_2(b)$$

и формула в) превращается в очевидное тождество. Два других случая рассматриваются совершенно аналогично.

Таким образом, марковское свойство доказано.

Совместное распределение минимума $m = \min\limits_{t \le e} x(t)$ и максимума $M = \max\limits_{t \le e} x(t)$ в случае Д-цепи с непрерывным временем находится так же, как в части I. Для любого конечного $B \subset A$ справедлива формула

$$P_a(\tau(B)=0) = 1 - \sum_{\xi \in B} \frac{{}_\xi G_0(B)}{G_0(B)},$$

где $G_0(B) = \det \|G_0(c,d)\|_{c,d \in B}$, а ${}_\xi G_0(B)$ – определитель, получающийся из $G_0(B)$ заменой каждого члена вида $G_0(\cdot,\xi)$ на $G_0(a,\xi)$.

В интересующем нас случае совместного распределения m и M берем $B = \{x,y\}$ и получаем для $P_a(m > x, M < y)$ точно также же выражение, как в части I (различия сконцентрированы в формулах для $\lambda_\pm$, см. выше и часть I).

ЛИТЕРАТУРА

I. В а л л а н д е р С.С. Времена пребывания для счетных цепей Маркова. I. Цепи с дискретным временем. – Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1982, т.II9, с.39–6I.

2. Ч ж у н К.Л. Однородные цепи Маркова. М.,Мир,1964.

3. И т о К., М а к к и н Г. Диффузионные процессы и их траектории. М., Мир,1968.

4. Д ы н к и н Е.Б. Марковские процессы. М.,Физматгиз,1963.