М. У. Хафизов, Одна квазиинвариантная гладкая мера на группе диффеоморфизмов области, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 134–142

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

ОДНА КВАЗИИНВАРИАНТНАЯ ГЛАДКАЯ МЕРА НА ГРУППЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ОБЛАСТИ

М. У. Хафизов

В предлагаемой работе описано построение σ-аддитивной борелевской меры на группе G диффеоморфизмов конечномерного многообразия, квазиинвариантной относительно действия подгруппы, состоящей из диффеоморфизмов более высокой гладкости, и доказана ее дифференцируемость вдоль порождаемых элементами этой подгруппы однопараметрических групп (точные формулировки приводятся ниже).

Построение этой меры основано на конструкции, предложенной Е. Т. Шавгулидзе в работе [1].

Значение построенной в работе меры определяется тем, что в ряде задач функционального анализа она может заменить (отсутствующую в бесконечномерной ситуации) меру Хаара.

В частности, в пространстве функций на G, квадратично суммируемых относительно этой меры, реализуется регулярное представление группы G. Кроме того, конструкция, аналогичная описанной в работе, может быть применена и для построения мер на бесконечномерных функциональных пространствах, квазиинвариантных относительно действия (некоторых) групп диффеоморфизмов областей определение функций из этих пространств (эти меры также оказываются дифференцируемыми по подходящим однопараметрическим подгруппам). Ситуация, о которой идет речь в последней фразе, возникает при квантовании бесконечномерных гамильтоновых систем, рассматриваемом в так называемых калибровочных теориях: при этом областями определения функций являются в свою очередь пространства функций (классических полей), в которых действуют калибровочные группы.

Отметим еще, что задача построения квазиинвариантной в указанном смысле меры на группе диффеоморфизмов обсуждалась в связи с задачами теории представлений на семинаре И. М. Гельфанда свыше 20 лет назад.

Борелевские меры, квазиинвариантные относительно действия группы диффеоморфизмов G, но определенные на G-пространствах, отличных от групп диффеоморфизмов, рассматривались в работах [2, 3].

1. Обозначение и терминология. ЛВП — локально выпуклое пространство; $C_b^k(X)$ — пространство всех ограниченных k раз непрерывно дифференцируемых по Фреше вещественных функций на ЛВП X, все производные которых ограничены ($k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, \infty$); $\mathscr{B}(X)$ — σ-алгебра борелевских подмножеств топологического пространства X. Мерой μ на топологическом пространстве X будем называть σ-аддитивную конечную числовую функцию на $\mathscr{B}(X)$, удовлетворяющую условию: для всяких $A \in$ $\in \mathscr{B}(X)$ и $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K \subset A$, что $|\mu|(A \setminus K) < \varepsilon$, где символ $|\mu|$ обозначает полную вариацию меры μ (см. [4, с. 146]). Таким образом, мы рассматриваем только радоновские меры. Для каждой меры μ положим $\|\mu\| = |\mu|(X)$. Пространство всех мер на топологическом пространстве X будем обозначать через $\mathfrak{M}$, а топологию на нем, порождаемую нормой $\|\cdot\|$, через τ_v.

Абсолютную непрерывность меры μ относительно меры ν будем обозначать так: $\mu \ll \nu$. Если f — измеримое отображение, то символ μ^f будет обозначать меру, являющуюся образом меры μ при отображении f; она определяется по формуле $\mu^f(A) =$ $= \mu(f^{-1}(A))$. Свертка двух мер μ и ν на топологической группе G обозначается символом $\mu * \nu$ и определяется как образ меры $\mu \times \nu$ на $G \times G$ при отображении $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$.

Пусть $\{\psi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ — однопараметрическое семейство борелевских отображений топологического пространства X в себя, обладающее свойствами $\psi_{t+s} = \psi_t \circ \psi_s$ для всех $t, s \in \mathbf{R}$, $\psi_0 = I$ (тождественное отображение). Мера μ называется τ-дифференцируемой относительно $\{\psi_t\}$, если отображение $t \mapsto \mu^{\psi_t}$, $\mathbf{R} \to (\mathfrak{M}, \tau)$ дифференцируемо в 0 (τ — некоторая топология в $\mathfrak{M}$). Если τ не указано, то будет подразумеваться τ_v. Мера $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mu^{\psi_t}|_{t=0}$ будет обозначаться символом $\mathrm{d}\mu$. Частный случай этого определения получается, если рассматривать топологическую группу и однопараметрическое семейство $\{\psi_t\}$, порождаемое левым (правым) действием однопараметрической подгруппы (ОП) $\{\varphi_t\}$:

$$\psi_t(x) = \varphi_t \cdot x \qquad (\psi_t(x) = x \cdot \varphi_t).$$

Если X — линейное пространство, а $\varphi_t = -th$, $h \in X$, то получается определение дифференцируемости меры по направлению h, предложенное С. В. Фоминым и изучавшееся, например, в работах [5—9].

Меру ν на топологической группе называют *квазиинвариантной слева* (*справа*) *относительно элемента группы* φ, *если* $\nu(A) =$ $= 0 \Leftrightarrow \nu(\varphi \cdot A) = 0$ ($\nu(A \cdot \varphi) = 0$). Всюду ниже, где будет встречаться сепарабельное гильбертово пространство X с действующим в нем положительно определенным самосопряженным ядерным оператором T, будем считать, что в X выделено гильбертово подпространство $H = T^{1/2}(X)$ со скалярным произведением

$$(x, y)_H = (T^{-1/2}x, T^{-1/2}y).$$

2. Вспомогательные результаты.

ЛЕММА 1. *Пусть X — ЛВП, F — подалгебра $C_b(X)$, разделяющая точки в X и не исчезающая ни в одной точке. Тогда замкнутый шар в $(\mathfrak{M}, \tau_v)$ замкнут относительно $\sigma(\mathfrak{M}, F)$.*

Замечание. Условиям леммы на подалгебру F удовлетворяет, например, пространство $C_b^\infty(X)$.

Доказательство леммы 1. Пусть $\mu_\alpha \xrightarrow{\sigma(\mathfrak{M}, F)} \mu$, $\|\mu_\alpha\| \leqslant 1$. Предположим, что $\|\mu\| > 1$. Тогда найдется компакт K такой, что $|\mu|(K) > 1 + \varepsilon$, $|\mu|(X \setminus K) < \varepsilon/2$. По теореме Стоуна — Вейерштрасса найдется функция $g \in F$ такая, что $\|g\|_{C(K)} \leqslant 1$ и

$$\int_K g(x)\,\mu(\mathrm{d}x) > 1 + \varepsilon.$$

Пусть $\|g\|_{C(X)} \leqslant M$. Возьмем многочлен P со свойствами:

$$\|P\|_{C[-M,M]} \leqslant 1 + \delta,\ P(0) = 0,\ \|P(x) - x\|_{C[-1,1]} < \delta,$$

где $\delta < \varepsilon/(2\cdot(1 + \|\mu\|))$. Тогда

$$\left|\int P(g(x))\,\mu_\alpha(\mathrm{d}x)\right| \leqslant 1 + \delta, \quad P \circ g \in F,$$

следовательно,

$$\left|\int P(g(x))\,\mu(\mathrm{d}x)\right| \leqslant 1 + \delta.$$

С другой стороны,

$$\left|\int_X P(g(x))\,\mu(\mathrm{d}x)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\int_K P(g(x))\,\mu(\mathrm{d}x)\right| - \left|\int_{X\setminus K} P(g(x))\,\mu(\mathrm{d}x)\right| >$$

$$> (1 + \varepsilon) - \delta\cdot|\mu|(K) - (1 + \delta)\cdot|\mu|(X \setminus K) > 1 + \delta.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть G — топологическая группа, на которой задано однопараметрическое семейство борелевских отображений $\{\psi_t\}$ так, что отображение $t \mapsto \psi_t$ непрерывно в топологии компактной сходимости, τ — топология в $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(O_1) *для любого t отображение $\lambda \mapsto \lambda^{\psi_t}$ есть гомеоморфизм пространства $(\mathfrak{M}, \tau)$;*

(O_2) *замкнутый шар в $(\mathfrak{M}, \tau_v)$ замкнут относительно τ.*

Тогда, если мера μ τ-дифференцируема относительно $\{\psi_t\}$, причем $\mathrm{d}\mu \ll \mu$, то мера μ и τ_v-дифференцируема относительно $\{\psi_t\}$.

Доказательство. Из равенства

$$(\mu^{\psi_{t+\Delta t}} - \mu^{\psi_t})/\Delta t = ((\mu^{\psi_{\Delta t}} - \mu)/\Delta t)^{\psi_t}$$

и условия (O_1) следует, что отображение $t \mapsto \mu^{\psi_t}$, $\mathbf{R} \to (\mathfrak{M}, \tau)$ дифференцируемо всюду и его производная есть $(\mathrm{d}\mu)^{\psi_t}$. Теперь из теоремы о среднем для ЛВП [5] и условия (O_2) вытекают неравенства

$$\| \mu^{\psi_t} - \mu \| \leqslant | t | \cdot \| d\mu \|,$$

$$\| t^{-1} \cdot (\mu^{\psi_t} - \mu) - d\mu \| \leqslant | t | \cdot \sup_{0<\theta<t} \| (d\mu)^{\psi_\theta} - d\mu \|.$$

Остается применить следующую лемму.

ЛЕММА 3. *Пусть X — топологическое пространство, $\{\psi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ — семейство обратимых борелевских отображений X в себя, обладающих следующим свойством: каков бы ни был компакт K и его открытая окрестность U при достаточно малых t $\psi_t(K) \subset U$. Пусть λ и μ — меры в X такие, что $\lambda \ll \mu$ и*

$$\| \mu^{\psi_t} - \mu \| + \| \mu^{\psi_t^{-1}} - \mu \| \to 0 \quad (t \to 0).$$

Тогда $\| \lambda^{\psi_t} - \lambda \| \to 0$ $(t \to 0)$.

Доказательство. Так же, как в [6, с. 80], показывается, что для доказательства леммы достаточно установить, что $\| (f \circ \psi_t^{-1}) \cdot \mu - f \cdot \mu \| \to 0$ $(t \to 0)$ для функций f из некоторого множества, имеющего плотную линейную оболочку в $L^1(X, \mu)$. Поэтому будем считать, что $f(x)$ есть индикатор некоторого компакта K. Тогда $\| (f \circ \psi_t^{-1}) \cdot \mu - f \cdot \mu \| = | \mu | (K \Delta \psi_t(K))$. Возьмем открытое множество $U_\varepsilon \supset K$ так, что $| \mu | (U_\varepsilon \setminus K) < \varepsilon$. По условию $K_t = \psi_t(K) \subset U_\varepsilon$ при достаточно малых t. В этом предположении

$$| \mu | (K \cup K_t) = | \mu | (K) + | \mu | (K_t) - | \mu | (K \cap K_t) \leqslant$$
$$\leqslant | \mu | (K) + \varepsilon,$$

что влечет неравенства $| \mu | (K \cap K_t) \geqslant | \mu | (K_t) - \varepsilon \geqslant | \mu | (K) - \| \mu^{\psi_t^{-1}} - \mu \| - \varepsilon$. Следовательно, $| \mu | (K \setminus K_t) \leqslant \| \mu^{\psi_t^{-1}} - \mu \| + \varepsilon$. Кроме того, $| \mu | (K_t \setminus K) < \varepsilon$. Таким образом, лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство, γ — гауссовская мера в X с корреляционным оператором T, $\{\psi_t\}$ — однопараметрическое семейство отображений X в X такое, что отображение $(t, x) \mapsto \Psi(t, x) = \psi_t(x)$, $\mathbf{R} \times X \mapsto X$ непрерывно дифференцируемо по Фреше и $\partial\Psi/\partial t \,|_{t=0}$ является непрерывно дифференцируемым по Фреше отображением из X в H.*

Рассмотрим меру μ, имеющую относительно меры γ плотность $g(x)$ такую, что $g \in C_b^1(X)$, $\operatorname{supp} g = \overline{V}$, $g|_V > 0$. Тогда мера μ τ_v-дифференцируема относительно $\{\psi_t\}$, если выполнены условия

а) $\displaystyle\int_V \left\{ \left\| \frac{\partial\Psi}{\partial t}(0, x) \right\|_H^2 + \left\| \frac{\partial^2\Psi}{\partial t\, \partial x}(0, x) \right\|_{L(X,H)}^2 \right\} \gamma(dx) < \infty,$

б) $\displaystyle\forall l \in X \quad \varlimsup_{t\to 0} \int \left(l, \frac{\partial\Psi}{\partial t}(t, x) \right)^2 \mu(dx) < \infty,$

в) $\displaystyle\forall t \in \mathbf{R} \quad \int_V \left\| \frac{\partial\Psi}{\partial x}(t, x) \right\|_{L(X,X)}^2 \gamma(dx) < \infty.$

Доказательство. Пусть $F = \mathrm{Span}\,\{e^{i(l,\, \psi_t(\cdot))} \mid l \in X, t \in \mathbf{R}\}$. Проверим выполнение условий леммы 2 с $\tau = \sigma(\mathfrak{M}, F)$. Условия (O_1) и (O_2) выполняются в силу выбора F и леммы 1. Докажем, что $\forall \varphi \in F$ существует

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(x)\,\mu^{\psi_t}(\mathrm{d}x)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int \varphi(\psi_t(x))\,\mu(\mathrm{d}x)\,|_{t=0} =$$
$$= \int \left(\varphi'(x), \frac{\partial \Psi}{\partial t}(0, x)\right)\mu(\mathrm{d}x).$$

Если $\varphi(x) = \exp\{i\,(l, \psi_{t_0}(x))\}$, то, как легко видеть, условие б) влечет неравенство

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \int ((\varphi(\psi_t(x)) - \varphi(x))/t)^2\,\mu(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Теперь из теоремы Витали о предельном переходе под знаком интеграла [4] следует искомое утверждение. Условия а), в) позволяют применить формулу интегрирования по частям [10, с. 91]:

$$\int \left(\varphi'(x), \frac{\partial \Psi}{\partial t}(0, x)\right)\mu(\mathrm{d}x) = \int p(x)\,\varphi(x)\,\gamma(\mathrm{d}x),$$ где $p(x)$ — некоторая функция из $L^2(X, \gamma)$, причем $p\,|_{X\setminus V} = 0$ (γ — п. в.) Следовательно, мера μ τ-дифференцируема и $\mathrm{d}\mu = p\cdot\gamma \ll \mu$.

ЛЕММА 5. *Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство, γ — гауссовская мера в X с корреляционным оператором T. Пусть Φ — диффеоморфное отображение открытого множества $U \subset X$ в пространство X, представимое в виде $\Phi(X) = x + T^{1/2}F(x)$, где $F \in C_b^1(U)$. Тогда меры $\gamma^{\Phi^{-1}}$ и γ эквивалентны в U.*

Эта лемма фактически доказана в [8, с. 106] (так как обратимость оператора $I + F'(x)\,T^{1/2}$ эквивалентна обратимости оператора $\Phi'(x)$).

ЛЕММА 6. *Пусть меры ν_n на топологической группе G дифференцируемы относительно* ОП $\{\varphi_t\}$. *Если для каждого $A \in \mathcal{B}(G)$ существует $\lim_{n\to\infty}\nu_n(A) = \nu(A)$ и последовательность $\mathrm{d}\nu_n$ сходится по вариации к мере λ, то мера ν дифференцируема относительно* ОП $\{\varphi_t\}$ *и* $\mathrm{d}\nu = \lambda$.

Доказательство очевидно.

В следующих двух леммах, принадлежащих Е. Т. Шавгулидзе, символ D^k обозначает дифференциальный оператор $\partial^k/\partial x_i^k$ (i — фиксировано), который применяется к диффеоморфизмам некоторой области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

ЛЕММА 7. *Пусть $s \in \mathbf{N}$, $s \geqslant 3$. Тогда $D^s(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)\cdot D^s f + \sum_{k=1}^{k_0(s)} c_s^k D^k(\varphi' \circ f)\, D^{s-k} f + P_{\varphi,s}(f)$, где $k_0(s)$ — наибольшее целое число, меньшее $s/2$ и $P_{\varphi,s}(f)$ — дифференциальный оператор по f, степень которого меньше, чем $s - k_0(s)$.*

Это утверждение вытекает из формулы Фаа де Бруно (см., например, [11, теорема 2.5]).

ЛЕММА 8. *Пусть* $l, m \in \mathbf{N}$, $l \geqslant 3m+1$. *Существует дифференциальный оператор* Q, *определенный на* $\mathrm{Diff}^l(\Omega)$ *такой, что* 1) *старший член* $Q(f)$ *есть* $(f')^{-1} \cdot D^l f$, 2) *для любых* $\varphi, f \in \mathrm{Diff}^l(\Omega)$ *выражение* $Q(\varphi \circ f) - Q(f)$ *как дифференциальный оператор по* f *имеет степень меньшую, чем* $l - m$.

Доказательство. Докажем, что выражение вида

$$Q(f) = \sum_{r=0}^{m} x_r \cdot D^r [(f')^{-1} \cdot D^{l-r} f]$$

с подходящими коэффициентами x_r будет удовлетворять требуемым условиям. Представим выражение $D^r [((\varphi \circ f)')^{-1} \cdot D^{l-r} (\varphi \circ f)]$ в удобном для нас виде, применяя лемму 7:

$$\begin{aligned} D^r [((\varphi \circ f)')^{-1} \cdot D^{l-r} (\varphi \circ f)] &= D^r [(f')^{-1} \cdot D^{l-r} f] + \\ &+ \sum_{s=0}^{r} c_r^s \cdot D^s [((\varphi \circ f)')^{-1}] \cdot D^{r-s} \Big\{\sum_{k=1}^{k_0(l-r)} c_{l-r}^k \cdot D^k (\varphi' \circ f) \cdot D^{l-r-k} f + \\ &+ P_{\varphi,\, l-r}(f)\Big\} = D^r [(f')^{-1} \cdot D^{l-r} f] + \sum_{s=0}^{r} \sum_{k=1}^{k_0(l-r)} \sum_{p=0}^{r-s} c_r^s c_{l-r}^k c_{r-s}^p \cdot \\ &\cdot D^s [((\varphi \circ f)')^{-1}] \cdot D^{p+k} (\varphi' \circ f) \cdot D^{l-k-s-p} f + \ldots \end{aligned}$$

(написаны только члены, которые могут содержать производные f степени, не меньшей, чем $l - m$. Заметим, что $D^s [((\varphi \circ f)')^{-1}] \cdot D^{p+k} (\varphi' \circ f)$ таких производных не содержит), так как $r \leqslant m$, $l \geqslant 3m + 1$). Таким образом, достаточно подобрать действительные числа $x_0, x_1, \ldots, x_m$, являющиеся решением системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{r=0}^{m} x_r = 1, \\ &\sum_{r=s+p}^{m} c_r^s c_{l-r}^k c_{r-s}^p x_r = 0 \quad (k + s + p \leqslant m, k \geqslant 1). \end{aligned} \tag{1}$$

Введем новые переменные $x_r' = x_r \cdot r!\,(l-r)!$ Система (1) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} &\sum_{r=0}^{m} c_l^r x_r' = l!, \\ &\sum_{r=s+p}^{m} c_{l-k-s-p}^{r-s-p} \cdot x_r' = 0 \quad (k + s + p \leqslant m, k \geqslant 1). \end{aligned} \tag{2}$$

Обозначим $s + p$ через t. Тогда система (2) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{r=0}^{m} c_l^r x_r' = l!, \\ &\sum_{r=0}^{m} c_{l-k-t}^{r-t} \cdot x_r' = 0 \quad (k + t \leqslant m, k \geqslant 1). \end{aligned} \tag{3}$$

В силу аддитивного свойства биномиальных коэффициентов все строки системы (3), кроме первой, являются линейными комбинациями тех строк, где $k + t = m$.

Добавляя к этим строкам первую, получаем линейно независимую систему: ее определитель, как можно проверить, равен $(-1)^m$. Лемма доказана.

3. Основные результаты. Пусть k, m, n — натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $2m > n$, $2k \geqslant 3m-2$, и пусть m четно. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей. Обозначим через $\mathrm{Diff}^l(\bar\Omega)$ множество всех диффеоморфизмов области $\bar\Omega$ на себя класса $C^l(\bar\Omega)$, через $H_l(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}_l(\Omega)$ — соболевские пространства вектор-функций со значениями в $\mathbf{R}^n$ (все обозначения, связанные с соболевскими пространствами, заимствованы из [12]). Рассмотрим подпространство в $H_{2k+m}(\Omega)$: $L_k = H_{2k+m}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}_k(\Omega)$. Пусть $\mathscr{D}_k = (I + L_k) \cap \mathrm{Diff}^{2k}(\bar\Omega)$, тогда $\mathscr{D}_k$ открыто в $(I + L_k)$. Пользуясь леммой 8, построим отображение $Q\colon \mathscr{D}_k \to H_m(\Omega)$ такое, что старший член $Q(f)$ имеет вид $(f')^{-1}\cdot Lf$, где $Lf = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{2k}}{\partial x_i^{2k}} f$ и при любом φ выражение $P_\varphi(f) = Q(\varphi \circ f) - Q(f)$ не содержит производных f, порядок которых старше, чем $2k-m$. Отображение Q гладко и $Q'(I) = L$ есть изоморфизм L_k на $H_m(\Omega)$ [12]. Обозначим через X гильбертово пространство $\overset{\circ}{H}_m(\Omega)$. Зададим непрерывный линейный оператор $T\colon X \to X$, полагая $T^{-1}f = (-1)^m \Delta^m f$, если $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Оператор T будет положительно определенным самосопряженным оператором с плотным образом. Оператор $(\Delta^{m/2})^{-1}\colon H_m(\Omega) \to H_{2m}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}_m(\Omega)$ непрерывен [12], $H_{2m}(\Omega)$ по теореме Соболева непрерывно вложено в $C^m(\Omega)$, следовательно абсолютно суммирующим образом вложено в $H_m(\Omega)$ [13]. Поэтому $(\Delta^{m/2})^{-1}$ является оператором Гильберта — Шмидта как оператор из $\overset{\circ}{H}_m(\Omega)$ в себя, а значит, оператор T ядерный. Введем гауссовскую меру γ на X с преобразованием Фурье $\tilde\gamma(x) = \exp(-(Tx, x)/2)$.

Пусть W — окрестность I в $\mathscr{D}_k$ такая, что $Q|_W$ — диффеоморфизм, Q' и $(Q')^{-1}$ равномерно ограничены на W и пусть $V = Q(W) \cap X$. Найдется число $R > 0$ такое, что замкнутый шар $\bar B_R(0) \subset V$ и $\rho(\partial V, \bar B_R(0)) > 0$. Возьмем функцию $\varphi \in C^\infty[0, +\infty)$ со свойствами $\varphi(t) = 0$ $(t \geqslant R)$, $\varphi(t) = 1$ $(t < R/2)$, $\varphi(t) > 0$ $(t < R)$. Определим меру μ на X, плотность которой относительно меры γ есть $g(x) = \varphi(\|x\|)$. Введем обозначения $V_\varepsilon = B_{R-\varepsilon}(0)$, $W_\varepsilon = Q^{-1}(V_\varepsilon) \cap W$ $(0 \leqslant \varepsilon < R)$. Зададим меру ν_0 на группе $\mathrm{Diff}^{2k}(\bar\Omega)$ по формуле $\nu_0(A) = \mu(Q(A \cap W))$. Подгруппу $\mathrm{Diff}^{2k+2m+1}(\bar\Omega)$, элементы которой удовлетворяют условию $(\varphi - I) \in \overset{\circ}{H}_{2k+2m}(\Omega)$ обозначим через G. Пусть $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ — плотное в G счетное множество, состоящее из элементов $\mathrm{Diff}^{2k+2m+2}(\bar\Omega)$. Определим меру ν на группе $\mathrm{Diff}^{2k}(\bar\Omega)$ полагая $\nu(A) = \sum_{n=1}^\infty c_n \cdot \nu_0(v_n \circ A)$, где $c_n > 0$, $\sum c_n < \infty$.

ТЕОРЕМА (основная). а) *Мера ν квазиинвариантна слева относительно действия подгруппы G (L_φ: $\mathrm{Diff}^{2k}(\bar\Omega) \to \mathrm{Diff}^{2k}(\bar\Omega)$, $f \mapsto \varphi \circ f$, где $\varphi \in G$ (Е. Т. Шавгулидзе).*

б) *При подходящем выборе c_n мера ν дифференцируема слева* *относительно ОП* $\{\varphi_t\} \subset G$ *таких, что отображение* $t \mapsto \varphi_t$, $\mathbf{R} \to C^{2k+2m+1}(\overline{\Omega})$ *непрерывно дифференцируемо.*

в) *Пусть* $\lambda(A) = \nu(A^{-1})$. *Тогда мера* $\nu * \lambda$ *квазиинвариантна слева и справа относительно* G *и дифференцируема слева и справа относительно ОП указанного в п.* б) *вида.*

Замечание. Такими подгруппами являются, например, решения дифференциального уравнения в пространстве $C^{2k+2m+1}(\overline{\Omega}) \cap (I + \mathring{H}_{2k+2m}(\Omega))$: $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f \circ x$, $x(0) = I$; где $f \in C^{2k+2m+2}(\overline{\Omega})$.

Доказательство теоремы. а) Множество $\mathscr{D}_k$ инвариантно относительно действия группы G, поэтому можно рассмотреть отображение U_φ: $V \to H_m(\Omega)$ $U_\varphi = Q \circ L_\varphi \circ Q^{-1}$, $\varphi \in G$. Отображение U_φ имеет специальный вид $U_\varphi(x) - x = Q(\varphi \circ f) - Q(f) = T^{1/2}\Delta^{m/2}P_\varphi(f)$, где $f = Q^{-1}(x)$. Таким образом, $U_\varphi(x) = x + T^{1/2}F_\varphi(x)$, $F_\varphi = \Delta^{m/2}P_\varphi Q^{-1}$. Вспомним, что

$$P_\varphi(f) = \sum_{j=2}^{2k} \sum_{s,\alpha} c_{s,j} \cdot D^s \left[((\varphi \circ f)')^{-1}\right] \cdot (\varphi^{(j)} \circ f)(D^{\alpha_1}f, \ldots, D^{\alpha_j}f),$$

поэтому $\Delta^{m/2}P_\varphi(f) \in \mathring{H}_m(\Omega)$, следовательно $U_\varphi(V) \subset X$. Для φ, достаточно близкого к I, $L_\varphi(W_0) \subset W$. В этом предположении $U_\varphi|_{V_0}$ взаимно однозначно, дополнительные условия гладкости, накладываемые на элементы G, обеспечивают непрерывную дифференцируемость отображения F_φ, поэтому $U_\varphi|_{V_0}$ есть диффеоморфизм в гильбертовом пространстве X, удовлетворяющий условиям леммы 5. Для того чтобы доказать квазиинвариантность ν, достаточно показать следующее: если $\nu_0(\varphi \circ A) = 0$ для любого φ из некоторого плотного в G множества, то $\nu_0(A) = 0$. Можно считать, что $A \subset W_\varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда $A = Q^{-1}(B)$, где $B \subset V_\varepsilon$. Пусть $\nu_0(\varphi \circ A) = \mu(Q \circ L_\varphi \circ Q^{-1}(B)) = 0$. Для φ, достаточно близкого к I, $U_\varphi(V_\varepsilon) \subset V_0$, поэтому $\gamma(U_\varphi(B)) = 0$, следовательно $\gamma(B) = 0$, а значит и $\nu_0(A) = 0$.

б) Докажем сначала дифференцируемость меры ν_n (где $\nu_n(A) = \nu_0(v_n \circ A)$) относительно ОП $\{\varphi_t\} \subset G$.

Введем ОП $\{\theta_t\}$ и однопараметрическое семейство отображений X $\{\psi_t\}$ по формулам

$$\theta_t = v_n \circ \varphi_t \circ v_n^{-1}, \; \psi_t = Q \circ L_{\theta_t} \circ Q^{-1}.$$

Достаточно доказать, что мера μ дифференцируема относительно $\{\psi_t\}$ (так как $\rho(W_0, \partial W) > 0$). Как было показано, $\psi_t(x) = x + T^{1/2}\Delta^{m/2}P_{\theta_t}(f)$, где $f = Q^{-1}(x)$. Используя явный вид $P_{\theta_t}(f)$, приведенный выше, можно проверить, что все производные, которые фигурируют в лемме 4, существуют, непрерывны и равномерно ограничены на V по соответствующим нормам. Следовательно мера ν_n дифференцируема относительно ОП $\{\varphi_t\}$. В условиях леммы 4, как доказано в [10] вариация меры $\mathrm{d}\mu$ ограничена сверху значением интеграла, написанного в пункте а) этой леммы. Поэтому $\| \mathrm{d}\nu_n \| \leqslant c_1(v_n) \cdot c_2(\{\varphi_t\})$ и найдутся числа $c_n > 0$ такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \| \mathrm{d}\nu_n \| < \infty$ для любой ОП $\{\varphi_t\}$. По лемме 6 мера ν дифференцируема.

в) Очевидно, мера λ дифференцируема и квазиинвариантна справа. Из представления $(\nu * \lambda)(A) = \int \nu (A \circ x^{-1}) \lambda (\mathrm{d}x)$ неравенства $\| \nu^{\varphi_t} - \nu \| \leqslant | t | \cdot \| \mathrm{d}\nu \|$ и теоремы Лебега следует дифференцируемость и квазиинвариантность меры $\nu * \lambda$ слева. Аналогично, представление $(\nu * \lambda)(A) = \int \lambda (x^{-1} \circ A) \nu (\mathrm{d}x)$ влечет дифференцируемость и квазиинвариантность меры $\nu * \lambda$ справа.

В заключение автор выражает благодарность О. Г. Смолянову и Е. Т. Шавгулидзе за внимание к работе и полезные советы.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
23.12.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шавгулидзе Е. Т. Об одной мере, квазиинвариантной относительно действия группы диффеоморфизмов конечномерного многообразия // ДАН СССР. 1988. Т. 303, вып. 4. С. 811—814.

[2] Исмагилов Р. С. Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов окружности // Функцион. анализ и его прил. 1971. Т. 5, вып. 3. С. 45—53.

[3] Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. Представление группы диффеоморфизмов // УМН. 1975. Т. 30, вып. 6. С. 3—50.

[4] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.

[5] Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах // Тр. ММО. Т. 24. М.: Изд-во МГУ, 1971. С. 132—174.

[6] Смолянов О. Г. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложение. М.: Изд-во МГУ, 1979.

[7] Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975.

[8] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.

[9] Богачев В. И. Несколько результатов о дифференцируемых мерах. Мат. сб. 1985. Т. 127 (269), вып. 3(7). С. 336—351.

[10] Далецкий Ю. Л. Стохастическая дифференциальная геометрия // УМН. 1983. Т. 38, вып. 3. С. 87—110.

[11] Авербух В. И., Смолянов О. Г. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // УМН. 1967. Т. 22, вып. 6. С. 201—258.

[12] Егоров Ю. В. Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. М.: Изд-во МГУ, 1985.

[13] Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1967.

[14] Шавгулидзе Е. Т. Один пример меры, квазиинвариантной относительно действия группы диффеоморфизмов окружности // Функцион. анализ и его прил. 1978. Т. 12, вып. 3. С. 55—60.