

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Ильинский, А. В. Поташев, Об импульсно-гидродинамических моделях взрыва на выброс в слоистых средах,  
*Тр. сем. по краев. задачам*, 1979, выпуск 16, 81–88

<https://www.mathnet.ru/kukz270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

30 апреля 2025 г., 20:41:52



УДК 517.9; 534.222.2;  
624.131 + 539.215

## ОБ ИМПУЛЬСНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ВЗРЫВА НА ВЫБРОС В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Н. Б. Ильинский, А. В. Поташев

В работах [1, 2] исследована задача об определении выемки выброса в среде, состоящей из двух слоев, различающихся величиной критической скорости (плотности одинаковы), при взрыве заглубленного шнурового заряда, расположенного на глубине  $h$  от поверхности грунта. Считалось, что верхний слой толщины  $H$  характеризуется критической скоростью  $v_1$ , а нижний — неограниченной глубины — критической скоростью  $v_2$ . Заряд моделировался в плоскости, ортогональной его оси, гидродинамическим источником мощности  $2q$ .

Согласно твердо-жидкостной модели (ТЖМ) явления взрыва, предложенной М. А. Лаврентьевым, границей выемки выброса в рассматриваемой задаче является линия тока, вдоль которой скорость равна в верхнем слое  $v_1$ , а в нижнем —  $v_2$ . В работах [1, 2] при исследовании задачи предполагалось, что кроме указанных участков граница выемки содержит также участок, лежащий на линии раздела сред, на котором скорость меняется от  $v_2$  до  $v_1$ .

В настоящей работе, кроме упомянутого варианта ТЖМ взрыва в слоистой среде, исследуются два других и проводится сравнение выемок выброса, рассчитанных по всем трем вариантам ТЖМ. Как и в работе [2], предполагается, что точка разветвления границы выемки выброса лежит ниже линии раздела слоев.

1. При исследовании движения жидкости с разрывом давления (следовательно, и скорости) на свободной границе в теории струй идеальной несжимаемой жидкости используется модель [3, 4], согласно которой свободная поверхность жидкости в окрестности точки разрыва закручивается по логарифмической спирали. Так как в задачах взрыва на выброс

в слоистых средах при переходе из одного слоя в другой на границе выемки также происходит скачок скорости, естественно воспользоваться упомянутой моделью (назовем ее вторым вариантом ТЖМ), что было отмечено в работе [1].

В соответствии с этим вариантом ТЖМ выемка выброса для  $v_1 < v_2$  будет иметь вид, изображенный на рис. 1 (в силу симметрии относительно оси  $y$  показана лишь правая половина выемки, которая обозначена через  $G_z$ , а ее граница  $ABMNCDA$  — через  $\Gamma_z$ ).

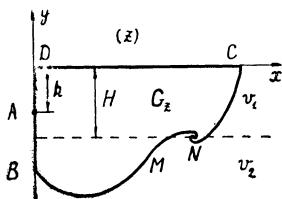


Рис. 1

Введем безразмерные переменные

$$z^* = \frac{z}{H}, \quad w^* = \frac{w}{q}, \quad v^* = \frac{vH}{q}, \quad (1)$$

где  $z = x + iy$  — физическая плоскость,  $w(z) = \varphi + i\psi$  — комплексный потенциал течения,  $v$  — величина скорости. Тогда решение задачи будет зависеть от трех безразмерных параметров

$$h^* = \frac{h}{H}, \quad v_1^* = \frac{v_1 H}{q}, \quad v_2^* = \frac{v_2 H}{q}.$$

Знак \* у безразмерных величин в дальнейшем ради простоты будем опускать.

На границе области  $G_z$  функция  $w(z)$  удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\varphi = 0 \text{ на } DC, \quad \psi = 0 \text{ на } ABMNC, \quad \psi = 1 \text{ на } AD, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = v_1 \text{ на } NC, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = v_2 \text{ на } BMN, \quad (3)$$

где  $s$  — дуговая абсцисса точки границы  $\Gamma_z$ . В точке  $A$  функция  $w(z)$  имеет логарифмическую особенность, а в окрестности точки  $N$  ведет себя как  $\ln w(z) \approx (1 - iS_1/\pi)^{-1} \ln z$ , где  $S_1 = \ln(v_1/v_2)$ .

В силу условий (2) области  $G_z$  в плоскости  $w$  соответствует полуплоса  $G_w$  (рис. 2а), а в плоскости функции годографа скорости

$$\chi = i \ln \left( \frac{1}{v_2} \frac{dw}{dz} \right) = \theta + iS \quad (4)$$

( $\theta$  — аргумент вектора скорости,  $S = \ln(v/v_2)$ ) согласно (3) — область  $G_\chi$  (рис. 2б); соответственные точки в различных областях обозначены одинаковыми буквами.

Введем в качестве канонической области полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$  ( $\zeta = \xi + i\eta$ ) и отображим ее конформно на области  $G_w$  и  $G_\chi$  так, чтобы точкам  $A, B, M, N, C, D$  соответствовали точки  $\pm \infty, b, m, n, 1, 1$  оси  $\xi$ , причем  $-\infty < b \leq m \leq n \leq -1$ . Такие отображения осуществляются функциями

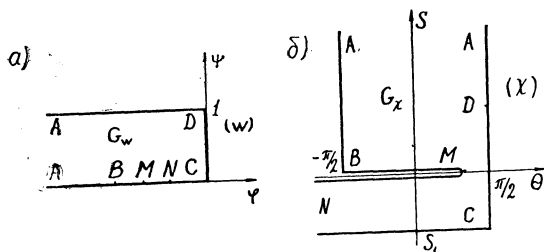


Рис. 2.

$$w(\zeta) = i \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \zeta \right), \quad (5)$$

$$\chi(\zeta) = i \int_b^{\zeta} \frac{(\tau - m) d\tau}{(\tau - n) \sqrt{(\tau - b)(\tau + 1)}} - \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Учитывая (4)–(6), найдем

$$z(\zeta) = \frac{1}{\pi v_2} \int_1^{\zeta} \exp \left[ - \int_b^{\zeta} \frac{(\tau - m) d\tau}{(\tau - n) \sqrt{(\tau - b)(\tau + 1)}} \right] \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (7)$$

В полученное выражение  $z(\zeta)$  входят три параметра ( $b, m, n$ ), которые отыскиваются из системы уравнений

$$m = n + \frac{S_1}{\pi} \sqrt{(n - b)(-1 - n)}, \quad (8)$$

$$\operatorname{Im} z(n) = -1, \quad (9)$$

$$\operatorname{Im} z(\infty) = -h, \quad (10)$$

где соотношение (8) получено из условия, что функция  $\operatorname{Im} \chi(\zeta)$  в точке  $\zeta = n$  терпит скачок, равный  $S_1$ .

Если, используя (8), подставить выражение для  $m$  в (9) и (10), то получим систему двух уравнений относительно неизвестных  $n$  и  $b$

$$h = \frac{2}{\pi v_1} \int_a^1 \frac{\exp \left[ \frac{2S_1}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \tau \sqrt{\frac{n - b}{-1 - n}} \right) \right] d\tau}{(1 + \tau)^2 \sqrt{\tau^2 - a^2}}, \quad (11)$$

$$v_1 = \frac{1}{\pi} \int_n^{-1} \sin \left[ 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\tau - b}{-1 - \tau}} + \right.$$

$$\left. + \frac{S_1}{\pi} \ln \left( \frac{\sqrt{(\tau - b)(-1 - n)} + \sqrt{(-1 - \tau)(n - b)}}{\sqrt{(\tau - b)(-1 - n)} - \sqrt{(-1 - \tau)(n - b)}} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}},$$

где  $a = \sqrt{2/(1 - b)}$ .

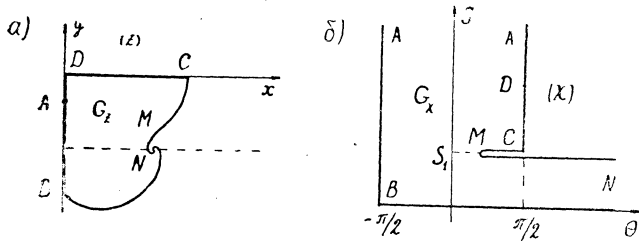


Рис. 3.

Для случая  $v_1 > v_2$  области  $G_z$  и  $G_x$  изображены соответственно на рис. 3а и 3б. В плоскости  $\zeta$  в этом случае  $-\infty < b \leq n \leq m \leq -1$ . Отображения полуплоскости  $\text{Im } \zeta > 0$  на области  $G_w$ ,  $G_x$  и  $G_z$  осуществляются функциями (5)–(7), параметры  $b$ ,  $n$  определяются из системы (11),  $m$  — из соотношения (8).

При численной реализации задачи система (11) решалась методом наискорейшего спуска [5]. Расчеты проводились на ЭВМ М-222. Программа составлялась на входном языке транслятора ТА-1М. Некоторые из полученных результатов приведены на рис. 4 (кривые 1–5) и 7 (кривые 6, 7). Соответствующие значения  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $h$  приведены в таблице 1. Причем выбор значений  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $h$  для кривых 1, 2 и 6, 7 объясняется необходимостью сравнения с другими вариантами ТЖМ.

Таблица I

$N$	1	2	3	4	5	6	7
$v_1$	0,16	0,41	0,2	0,2	0,0014	0,95	0,93
$v_2$	0,42	0,16	0,1	0,1	0,745	0,56	0,58
$h$	0,91	1,53	1	1,5	0,202	0,95	1,07

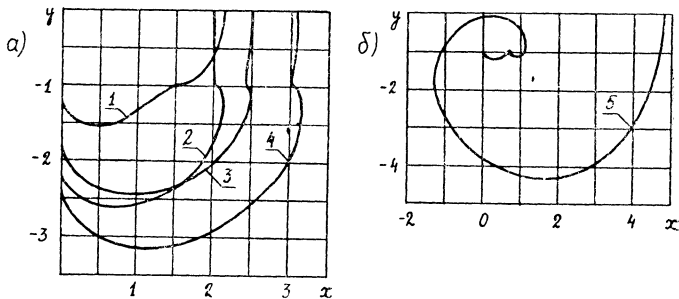


Рис. 4.

Из сравнения кривых 1, 2 (рис. 4а) с кривыми 1, 6, приведенными в работе [2], видно, что (при сравнительно небольших значениях  $|S_1|$ , т. е. при малом различии  $v_1$  и  $v_2$ ) границы выемок почти совпадают. Учитывая, что в рассматриваемом варианте ТЖМ система уравнений для отыскания параметров содержит на два уравнения меньше, чем в первом [1, 2], его целесообразно применять при малых  $|S_1|$ . При больших значениях  $|S_1|$  пользоваться вторым вариантом ТЖМ не следует, так как при  $|S_1| > \pi$  решение становится неоднозначным [3]. Пример такой выемки приведен на рис. 4б (кривая 5).

II. Согласно ТЖМ всюду в области движения скорости должны быть больше критического значения. Однако, как в рассмотренном варианте ТЖМ (втором), так и в первом, используемом в работах [1, 2], это условие, ввиду наличия точки перегиба  $M$ , не выполняется. Чтобы добиться выполнения этого условия, можно ввести предположение, что на линии раздела сред существует твердая стенка, при обтекании которой величина скорости сначала возрастает от  $v_2$  до  $\infty$ , а затем убывает от  $\infty$  до  $v_1$ .

Схема выемки выброса, отвечающая этому (третьему) варианту модели, изображена на рис. 5. Области, соответствующие области  $G_2$  в плоскостях  $\omega$  и  $\lambda$ , показаны на рис. 6а и 6б.

Решение задачи находится следующим образом. Введем в качестве канонической области верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$  и отображим ее на области  $G_\omega$  и  $G_\lambda$  так, чтобы точкам  $A, B, N, M, R, C, D$  соответствовали точки  $\pm \infty, -1, n, m, r, 1, d$  оси  $\xi$  (причем  $-1 < n < m < r < 1 < d$ ), а точке ветвления  $Q$  двулистной области  $G_\lambda$  — точке  $\zeta_0 = \mu + iv$ .

Отображение области  $G_\zeta$  на  $G_\omega$  осуществляется функцией

$$\omega(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_1^\zeta \frac{d\tau}{V(\tau-1)(\tau-d)}. \quad (12)$$

Для построения отображающей функции  $\lambda = \lambda(\zeta)$  воспользуемся методом особых точек [6]. Рассмотрим функцию  $d\lambda/d\zeta$ . Продолжив ее аналитически на всю плоскость  $\zeta$ , получим, что в точках  $\pm 1, n, r$  оси  $\xi$  эта функция имеет особенности половинного порядка, в точке  $m$  оси  $\xi$  — полюс первого порядка, а в точках  $\zeta_0, \bar{\zeta}_0$  — нуль первого порядка. Следовательно,

$$\frac{d\lambda}{d\zeta} = \lambda \frac{(\zeta - \mu)^2 + v^2}{(\zeta - m) V(\zeta^2 - 1)(\zeta - n)(\zeta - r)}.$$

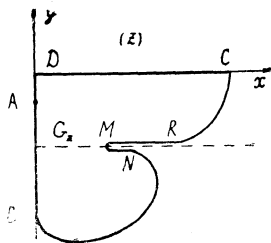


Рис. 5.

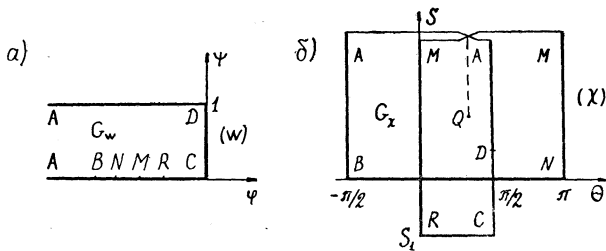


Рис. 6.

Тогда функция  $\chi = \chi(\zeta)$  будет иметь вид

$$\chi(\zeta) = i \int_{-1}^{\zeta} \frac{[(\tau - \mu)^2 + \nu^2] d\tau}{(\tau - m) V(\tau^2 - 1) (\tau - n) (\tau - r)} - \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

(коэффициент  $\lambda = i$  в силу того, что  $\operatorname{Re} \chi(\zeta)$  в точке  $\zeta = \infty$  терпит скачок, равный  $\pi$ ).

Дифференцируя соотношение (12) и используя (4), (13), получим

$$z(\zeta) = \frac{i}{\pi v_2 d} \int_d^{\zeta} \exp \left[ - \int_{-1}^{\zeta} \frac{[(\tau - \mu)^2 + \nu^2] d\tau}{(\tau - m) V(\tau^2 - 1) (\tau - n) (\tau - r)} \right] \times \\ \times \frac{d\zeta}{V(\zeta - 1)(\zeta - d)}.$$

Для определения параметров, входящих в выражение для  $z(\zeta)$ , имеем следующие условия:

$$\begin{aligned} [(m - \mu)^2 + \nu^2] [(1 - m^2)(m - n)(r - m)]^{-1/2} &= 1, \\ \operatorname{Re} \chi(n) &= \pi, \quad \operatorname{Im} \chi(r) = S_1, \\ \operatorname{Im} z(r) &= -1, \quad \operatorname{Im} z(\infty) = -h \end{aligned} \quad (14)$$

(первое уравнение системы (14) является условием того, что  $\operatorname{Re} \chi(\zeta)$  в точке  $m$  оси  $\xi$  терпит скачок, равный  $\pi$ ).

Таким образом, для отыскания шести неизвестных параметров ( $n, r, m, d, \mu, \nu$ ) имеем систему пяти уравнений, т. е. один параметр остается свободным. Этот произвол объясняется тем, что в постановке задачи по третьему варианту ТЖМ размеры твердой стенки неизвестны.

При численном решении задачи применялась полуобратная постановка, т. е. значения параметров  $m, n, r, d$  задавались, а величины  $\mu, \nu, v_1, v_2, h$  отыскивались в процессе решения. Расчеты проводились на ЭВМ М-222. Программа составлялась

Таблица 2

$N$	8	9	10
$v_1$	0,95	0,95	0,93
$v_2$	0,56	0,56	0,58
$h$	0,95	0,95	1,07
$x_M$	0,07	0,36	0,70
$l$	0,301	0,075	0,004

на входном языке транслятора ТА-1М. Некоторые из полученных результатов приведены на рис. 7 (кривые 8—10). Соответствующие значения  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $h$ ,  $x_M$ ,  $l$  приведены в таблице 2 ( $l$  — наибольшая из длин участков  $MR$  и  $MN$  в плоскости  $z$ ,  $x_M$  — значение  $x$  в точке  $M$ ).

Как и следовало ожидать, решение задачи по этому варианту ТЖМ неединственно (оно зависит от  $x_M$

или  $l$ ). Так, на рис. 7 кривым 8 и 9 соответствуют одинаковые значения  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $h$ , а  $x_M$  и  $l$  отличаются (см. табл. 2). Причем, эти кривые отличаются не только друг от друга, но и от выемки, построенной при тех же значениях  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $h$  по второму варианту ТЖМ (кривая 6). В то же время, если на  $x_M$  или  $l$  наложить дополнительное условие, то можно получить решение, близкое ко второму варианту (сравните кривые 10 и 7 на рис. 7). В качестве такого дополнительного условия при построении кривой 10 бралось условие  $\min l$ , что достигалось соответствующим подбором параметров  $m$ ,  $n$ ,  $r$ ,  $d$ .

Из приведенных исследований и числовых расчетов можно сделать следующее заключение. Наиболее общим является первый вариант ТЖМ взрыва в слоистой среде, исследованный в работах [1, 2]. Второй вариант вследствие его простоты целесообразно применять при сравнительно малых отличиях  $v_1$  от  $v_2$ . Третий вариант, хотя и более всего соответствует твердо-жидкостной модели, содержит произвол в решении.

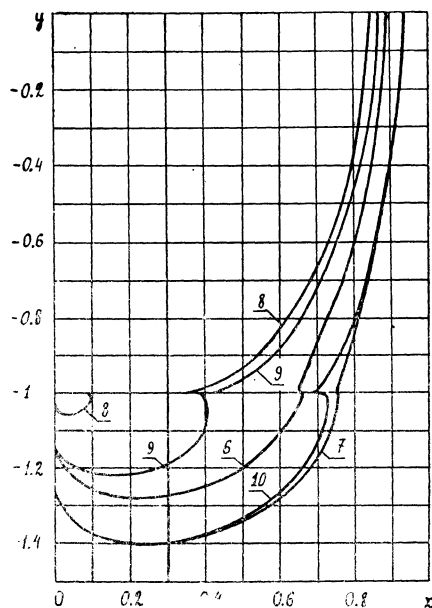


Рис. 7.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Э. Б., Шер Е. Н. О форме воронки выброса при взрыве шнурового заряда в двухслойной среде. — ПМТФ, 1973, № 2, с. 143—146.
2. Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Определение выемки выброса при взрыве заглубленного шнурового заряда в двухслойной среде. — ПМТФ, 1978, № 2.



3. Черноусько Ф. Л. О движении идеальной жидкости с разрывом давления вдоль границы.—ПММ, 1962, т. 26, вып. 2, с. 373—375.

4. Tulip M. P. Supercavitating Flows—Small Perturbation Theory.—Приложения теории функций в механике сплошной среды. Труды международного симпозиума в Тбилиси, 17—23 сентября 1963, т. 2, механика жидкости и газа, математические методы. М., „Наука“, 1965.

5. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1, М., „Наука“, 1973.

6. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.

• *Доложено на семинаре 26 января 1978 г.*