

© 1995 г. Б. Е. БРОДСКИЙ, канд. техн. наук
(Институт системного анализа РАН, Москва)

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧЕ СКОРЕЙШЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДКИ

I. ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТОДОВ СКОРЕЙШЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДКИ

Применительно к задаче скорейшего обнаружения момента разладки случайной последовательности исследуются непараметрические версии метода кумулятивных сумм, усредненного отношения правдоподобия и “скользящей выборки” наблюдений. Устанавливается асимптотическая оптимальность и приводятся результаты сравнительного анализа непараметрических методов обнаружения разладки.

1. Введение

Задача скорейшего обнаружения разладки случайной последовательности, возникшая в 1930-е годы, продолжает оставаться в центре внимания многих исследователей. Начиная с работ [1 – 5] и кончая недавно опубликованными работами [6 – 8], главный интерес был сосредоточен на исследовании метода кумулятивных сумм (CUSUM), предложенного Пейджем, и метода “усредненного отношения правдоподобия”, предложенного Гиршиком и Рубиным и независимо от них Ширяевым (в дальнейшем для обозначения этого метода будем использовать аббревиатуру GRSh). Установлены оптимальность [4] метода GRSh в ситуации, когда задано распределение момента разладки τ и распределение наблюдаемой последовательности независимых случайных величин до и после τ , и асимптотическая оптимальность [5] метода CUSUM, когда момент разладки – детерминированная, но неизвестная величина и заданы распределения независимых наблюдений до и после момента разладки. Эти работы основывались на теории последовательного анализа Вальда [9] для модели независимых случайных величин (или процессов с независимыми приращениями). Предположение о независимости было настолько существенным, что от него не удалось полностью избавиться даже в работе [10], в которой была установлена асимптотическая оптимальность метода CUSUM для задачи скорейшего обнаружения момента переключения последовательности наблюдений с одного стационарного эргодического процесса на другой стационарный эргодический процесс, статистически независимый от первого.

В ряде работ, посвященных задаче последовательного обнаружения разладки, рассмотрены различные варианты ситуации неполной априорной информации о распределениях наблюдаемой случайной последовательности до и после момента разладки. В [5] предложена модификация процедуры CUSUM для задачи, в которой распределение случайных величин после момента разладки принадлежит экспоненциальному семейству, и установлена асимптотическая оптимальность модифицированной процедуры. Подобные асимптотически оптимальные модификации для метода GRSh были предложены в [6, 11]. Непараметрический подход к задаче последовательного обнаружения разладки, основанный на использовании ранговых статистик, развивался в работах [12 – 15]. В [15] установлена асимптотическая оптимальность процедуры CUSUM; построенной на последовательных рангах. Общим недостатком работ [5, 6, 11 – 15] является нерекуррентность предложенных статистик, что существенно затрудняет использование этих методов на практике. Другой недостаток – предположение о независимости наблюдений, существенное для доказательства свойства асимптотической оптимальности этих методов.

В работах [16, 17] был предложен непараметрический подход к задаче скорейшего обнаружения разладки, который позволяет изучать свойства широкого класса методов обнаружения для зависимых случайных последовательностей. В отличие от традиционных подходов, в которых используются такие характеристики качества метода обнаружения, как математическое ожидание времени запаздывания в обнаружении разладки и математическое ожидание времени между последовательными ложными тревогами, в [17] было предложено характеризовать качество метода обнаружения вероятностью "ложной тревоги" и предельной величиной нормированного (на большой параметр N , зависящий от вида метода) времени запаздывания в обнаружении разладки. Там же было показано, что методы CUSUM и GRSh являются асимптотически оптимальными при точном знании функций распределения до и после момента разладки, но не обладают этим свойством при отсутствии или неточности априорной информации об этих функциях распределения. В то же время такие методы обнаружения разладки, как метод экспоненциального сглаживания, метод Шьюхарта и метод "скользящей выборки", предложенный в [16], являются более устойчивыми к неточностям априорной информации о распределениях и в ряде случаев превосходят методы CUSUM и GRSh по качеству обнаружения разладки.

Целью настоящей работы является обобщение результатов, полученных в [17], на зависимые случайные последовательности с произвольным законом распределения, а также исследование свойств робастности методов скорейшего обнаружения разладки и построение асимптотически оптимальных статистик по минимаксному критерию.

2. Постановка задачи. Предположения

Математическая постановка задачи такова. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задана случайная последовательность $X = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$(1) \quad x(n) = a + \xi_n I(n < m) + (h + \eta_n) I(n \geq m),$$

$I(A)$ – индикаторная функция множества A ; $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\eta = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – случайные последовательности, такие, что $E\xi_n = E\eta_n \equiv 0$. Момент m будем называть моментом разладки, а через $P_m(E_m)$ будем обозначать меру (математическое ожидание), соответствующую последовательности X с разладкой в момент m (при этом символ $P_{\infty}(E_{\infty})$ соответствует последовательности без разладки). Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

1. Существует $H > 0$, такое, что

$$\sup_n E \exp t \xi_n < \infty, \quad \sup_n E \exp t \eta_n < \infty \quad \text{при} \quad |t| < H.$$

2. Векторная последовательность $\zeta_n = (\xi_n, \eta_n)$ удовлетворяет условию сильного перемешивания, т.е.

$$\sup_{1 \leq t < \infty} \sup_{\substack{A \in F_1^t \\ B \in F_{t+s}^{\infty} \\ P(A)P(B) \neq 0}} \left| \frac{P(AB)}{P(A)P(B)} - 1 \right| \triangleq \psi(s) \downarrow 0, \quad s \rightarrow \infty$$

где $F_1^t = \sigma\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_t\}$, $F_{t+s}^{\infty} = \sigma\{\zeta_{t+s}, \dots\}$ – σ -алгебры, порожденные соответствующими случайными величинами; \downarrow обозначает монотонную сходимость.

Модель наблюдений (1) предполагает, что в момент разладки происходит скачкообразное (на величину $h \neq 0$) изменение среднего случайной последовательности. Условия на константы a и h зависят от конкретного метода и будут уточняться далее.

Необходимо по наблюдениям $\{x(i)\}_{i=1}^{\infty}$ обнаружить неизвестный момент разладки m с минимальным запаздыванием, причем вероятность "ложной тревоги", т.е. подачи сигнала о разладке, когда ее нет, должна быть не больше заданной. Через $d(\cdot)$ будем обозначать решающую функцию конкретного метода, т.е. измеримую функцию наблюдений, такую, что $d(\cdot) = 1$ соответствует решению о наличии разладки, а $d(\cdot) = 0$ - решению о ее отсутствии.

3. Описание методов. Основные результаты

Для решения задачи о разладке далее будут использоваться непараметрические варианты методов CUSUM и GRSh, а также обобщенная статистика типа "скользящего окна" наблюдений.

1. Непараметрическая статистика CUSUM:

$$y_i = (y_{i-1} + x(i))^+, \quad y_0 \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где наблюдения $\{x(i)\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяют модели (1), в которой $a < 0$, $h - |a| > 0$ (или $a > 0$, $h + a < 0$), $b^+ = \max(b, 0)$. Решающая функция метода CUSUM имеет вид $d(y_n) = I(y_n > g)$, где g - порог срабатывания.

2. Непараметрическая статистика GRSh:

$$(2) \quad R_i = (R_{i-1} + 1)e^{x(i)}, \quad R_0 \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $x(i)$ удовлетворяет (1) с $a < 0$, $h - |a| > 0$. Решающая функция метода GRSh имеет вид $d(R_n) = I(R_n > g)$.

3. Статистика "скользящего окна":

$$Y_N(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k(N)x(n-k), \quad n = N, N+1, \dots,$$

где $x(i)$ удовлетворяет (1) с $a = 0$, $h \neq 0$, а $\{c_k(N)\}_{k \geq 0}$ - некоторый набор коэффициентов, зависящих от объема скользящей выборки N . Решающая функция для метода "скользящего окна": $d(Y_N(n)) = I(|Y_N(n)| > g)$.

Для исследования асимптотической оптимальности этих методов далее развит подход, предложенный в работе [17]. Основными характеристиками качества, используемыми в этом подходе, являются предельные величины нормированного запаздывания $\gamma(\cdot)$ и вероятности "ложной тревоги" $\delta(\cdot)$.

Рассмотрим момент остановки $\tau_N = \inf\{n : d_N(n) = 1\}$ и величину нормированного запаздывания в обнаружении разладки $\rho_N = (\tau_N - m)^+/N$. Выбор нормирующего параметра N осуществляется таким образом, чтобы вероятность "ложной тревоги" $\alpha_N = \sup_k P_{\infty}\{d_N(k) = 1\}$ экспоненциально (по N) стремилась к нулю при $N \rightarrow \infty$. Основное неравенство, доказанное в [17] для последовательности независимых случайных величин $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, имеющих до момента разладки плотность распределения $f_0(x)$, а после момента разладки $f_1(x)$, связывает детерминированные предельные значения $\gamma(\cdot)$ ($\rho_N \xrightarrow{п.н.} \gamma(\cdot)$) и $\delta(\cdot) = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (|\ln \alpha_N|/N)$:

$$\gamma(\cdot) \geq I_{01}^{-1} \delta(\cdot),$$

где $I_{01} = E_1 \ln \frac{f_1(x_1)}{f_0(x_1)}$ информация Кульбака.

Рассмотрим характеристики ρ_N и α_N для конкретных методов.

Теорема 1. При условиях 1 и 2 для методов CUSUM и GRSh справедлива оценка

$$\sup_n |\ln P_\infty(d_N(n) = 1)| = O(N) \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

где $N = g$ для CUSUM; $N = \ln g$ для GRSh.

В [17] приведено доказательство этой теоремы для метода CUSUM. Здесь дано доказательство теоремы 1 для метода GRSh (приложение).

Теорема 2. Допустим, что выполнены следующие условия:

а) существует непрерывная на $[0, 1]$ функция $c(t)$, такая, что для всех N :

$$c_k(N) = \frac{1}{N} c\left(\frac{k}{N}\right), \quad \text{где } k = 0, 1, \dots, N-1;$$

б) $\sum_{k=0}^{N-1} c_k^2(N) = A/N$, где $A > 0$ – константа, не зависящая от N ;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$, где $\psi(k)$ – коэффициент перемешивания из условия 2.

Тогда для статистики “скользящего среднего” справедлива оценка:

$$\sup_{n \geq N} |\ln P_\infty(d(Y_N(n)) = 1)| = O(N) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Замечание. Без ограничения общности можно положить $A = 1$ в условии б). Это достигается делением всех коэффициентов $c_k(N)$ на \sqrt{A} , что не влияет на дальнейшие рассуждения.

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда для любого $m \geq 1$ для методов CUSUM и GRSh:

$$\rho_N \rightarrow \gamma = (h - |a|)^{-1}, \quad P_m - \text{п.н.} \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Пусть выполнены условия теоремы 2 и $c(t) \geq 0$. Если момент разладки $m = N+k$, $k \geq 0$, то для метода “скользящего окна”

$$\rho_N \rightarrow \rho_0 \quad P - \text{п.н.} \quad \text{при } N \rightarrow \infty \quad \text{для любого } k \geq 0,$$

где ρ_0 – корень уравнения $\int_0^{\rho_0} c(t) dt = g/|h|$.

Доказательство теоремы 3 для метода “скользящего окна” приведено в приложении (методы CUSUM и GRSh рассматривались в [17]).

Оценки, полученные выше, позволяют выбрать нормирующий параметр N для методов CUSUM, GRSh и “скользящего окна”, а также исследовать предельную величину нормированного запаздывания в обнаружении разладки. Для исследования свойств робастности методов CUSUM и GRSh, а также для построения асимптотически оптимального метода “скользящей выборки” потребуются уточненные асимптотические оценки для вероятности “ложной тревоги” α_N . Эти оценки будут получены при некоторых дополнительных предположениях.

Рассмотрим вначале методы GRSh и CUSUM. Для каждого $r \geq 0$ определим функцию $\varkappa(r)$ следующим образом:

$$E \exp(rx_1) = \exp(\varkappa(r))$$

и рассмотрим уравнение $\varkappa(r) = 0$. Так как $E \exp(rx_1) = 1 + rEx_1 + \frac{r^2}{2}Ex_1^2 + o(r^2)$, то при $Ex_1 = a < 0$, $Ex_1^2 < \infty$ и достаточно малых r имеем $\exp(\varkappa(r)) < 1$, а начиная

с некоторого $r^* > 0$, имеем $\exp(\kappa(r)) \geq 1$. Допустим, что функция $\kappa(r)$ непрерывна, имеет ровно два нуля: 0 и $r^* > 0$ и монотонно возрастает в некоторой окрестности точки r^* .

Теорема 4. Для метода GRSh при $z \rightarrow \infty$

$$P_\infty \{d(R_n) = 1\} = P_\infty \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \exp S_k > z \right\} \sim O \left(\frac{1}{z r^* \varphi(z)} \right),$$

где $\varphi(z) = o(z^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ и r^* — единственный отличный от нуля корень уравнения $\kappa(r) = 0$, $S_k = \sum_{i=1}^k x(i)$.

Результат теоремы 4 означает, что для метода GRSh:

$$\delta_{\text{GRSh}}(a) = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \ln P_\infty \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} e^{S_k} > e^N \right\} \right| = r^*(a),$$

где $r^*(a)$ — ненулевой корень уравнения $\kappa(r) = 0$.

Величина $\delta_{\text{GRSh}}(a)$ — предельное значение нормированной вероятности “ложной тревоги” — далее будет использоваться для сравнительного анализа методов скорейшего обнаружения разладки.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда

$$\delta_{\text{CUSUM}}(a) = \delta_{\text{GRSh}}(a).$$

Рассмотрим теперь общий метод “скользящего окна”. Пусть

$$E \exp(r\xi_1) = \exp(\kappa(r)) \quad \forall r \geq 0, \quad \kappa(0) = \kappa'(0) = 0.$$

Теорема 6. Для любого $g > 0$

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \ln P_\infty \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} c_k(N) \xi_k > g \right\} \right| \geq \max_{r>0} \left(rg - \int_0^1 \kappa(rc(t)) dt \right).$$

Это неравенство является точным: оно обращается в строгое равенство в случае независимых нормально распределенных величин. Доказательства теорем 4–6 приведены в приложении.

Суммируя результаты первой части статьи, можно сделать вывод, что непараметрические методы CUSUM и GRSh асимптотически эквивалентны: предельная величина нормированного запаздывания в обнаружении разладки для этих методов равна $\gamma(h) = (h - |a|)^{-1}$, а предельная величина нормированной вероятности “ложной тревоги” — $\delta(a) = r^*(a)$, где $r^*(a)$ — ненулевой корень уравнения $E \exp(r\xi_1) = 1$. Для непараметрического метода “скользящего окна” характеристики качества обнаружения зависят от коэффициентов $c_k(N)$. Оптимизируя выбор этих коэффициентов, можно добиваться желаемых характеристик качества метода. Этим вопросам посвящена вторая часть статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Приведем доказательство для метода GRSh. Статистика (2) может быть переписана в эквивалентном виде:

$$R_n = \sum_{k=1}^n \exp S_k^n, \quad S_k^n = \sum_{i=k}^n x(i), \quad E x(i) = \begin{cases} -|a| < 0, & 1 \leq i < m, \\ h - |a| > 0, & i \geq m. \end{cases}$$

При отсутствии разладки все $x(i)$ одинаково распределены. Поэтому вместо R_n можно рассматривать следующую статистику:

$$\tilde{R}_n = \sum_{k=1}^n \exp S_k, \quad S_k = \sum_{i=1}^k x(i), \quad (d(k) = 1) = (\tilde{R}_k > g).$$

Для вероятности ошибочного решения запишем

$$P_\infty \{ \tilde{R}_n > g \} = P \left\{ \sum_{k=1}^n \exp S_k > g \right\} = P \left\{ \sum_{k=1}^n e^{-k \frac{a}{2}} \cdot e^{\tilde{S}_k} > g \right\},$$

где

$$S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i = -k \frac{a}{2} + \sum_{i=1}^k \tilde{\xi}_i = -k \frac{a}{2} + \tilde{S}_k, \quad E \tilde{\xi}_i = -\frac{a}{2}.$$

Для любого $\omega \in \Omega$

$$\sum_{k=1}^n e^{-k \frac{a}{2}} e^{\tilde{S}_k} \leq \exp \left(\max_{1 \leq i \leq n} \tilde{S}_i \right) \sum_{k=1}^n e^{-k \frac{a}{2}} \leq \frac{\exp \left(\max_{1 \leq i \leq n} \tilde{S}_i \right)}{1 - e^{-a/2}}.$$

Поэтому, используя аналогичный результат для метода CUSUM из [17], получим

$$P \left\{ \sum_{k=1}^n e^{-k \frac{a}{2}} e^{\tilde{S}_k} > g \right\} \leq P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \tilde{S}_k > \ln [g (1 - e^{-\frac{a}{2}})] \right\} \leq c_1 \exp(-c_2 \ln g).$$

Выбрав для метода GRSh $N = \ln g$, окончательно имеем

$$\sup_n P_\infty (d_N(n) = 1) = \sup_{1 \leq n < \infty} P_\infty \{ \tilde{R}_n > g \} \leq c_1 \exp(-c_2 N),$$

где константы c_1, c_2 не зависят от N .

Доказательство теоремы 2. Из условий а) и б) следует, что $\sum_{k=0}^{N-1} c^2 \left(\frac{k}{N} \right) = AN$.

По определению $d(Y_N(\cdot))$

$$\begin{aligned} P_\infty \{ d(Y_N(n)) = 1 \} &= P_\infty \left\{ \left| \sum_{k=0}^{N-1} c_k(N) x(n-k) \right| > g \right\} = \\ &= P \left\{ \left| \sum_{k=0}^{N-1} c \left(\frac{k}{N} \right) \tilde{\xi}_k \right| > gN \right\}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\xi}_k \triangleq \xi_{n-k}$.

Из условия в) следует, что существуют $p > 1, s_0$, такие, что $\psi(s) < s^{-p}$ при $s \geq s_0$. Поэтому при $s \geq s_0$ выполнено неравенство

$$\ln(1 + \psi(s)) \leq \min \left(\frac{g^2}{4A\gamma s}, \frac{Hg}{4} \right),$$

где H и γ – константы из условия 1. Это условие эквивалентно следующему [18]:

$$E \exp t \xi_n < \exp(\gamma t^2 / 2), \quad |t| \leq H, \quad \gamma > \sigma^2 = \sup_n E \xi_n^2.$$

Зафиксируем число $\ell \geq s_0$ и разобьем сумму $S_N = \sum_{k=0}^{N-1} c\left(\frac{k}{N}\right) \tilde{\xi}_k$ на ℓ групп следующим образом:

$$S_N = S_N^1 + S_N^2 + \dots + S_N^\ell,$$

$$S_N^i = c\left(\frac{i}{N}\right) \tilde{\xi}_i + c\left(\frac{i+\ell}{N}\right) \tilde{\xi}_{i+\ell} + \dots + c\left(\frac{i+\ell\left[\frac{N-1}{\ell}\right]}{N}\right) \tilde{\xi}_{i+\ell\left[\frac{N-1}{\ell}\right]},$$

$$i = 1, 2, \dots, \ell; \quad i + \ell\left[\frac{N-1}{\ell}\right] \leq N - 1.$$

Количество слагаемых внутри каждой группы S_N^i не меньше, чем $\left[\frac{N-1}{\ell}\right]$, а коэффициент перемешивания ψ внутри одной группы не больше, чем $\psi(\ell)$. Далее имеем

$$P\{|S_N| > gN\} \leq \sum_{i=1}^{\ell} P\left\{|S_N^i| > \frac{gN}{\ell}\right\} \leq \ell \max_{1 \leq i \leq \ell} P\left\{|S_N^i| > \frac{gN}{\ell}\right\}.$$

Для оценки вероятности в правой части последнего неравенства воспользуемся аналогичной оценкой, полученной в [17]. Тогда, положив $x = \frac{gN}{\ell}$, $m = \left[\frac{N-1}{\ell}\right]$, имеем

$$P\{|S_N^i| > x\} \leq \begin{cases} (1 + \psi(\ell))^m \exp\left(-\frac{x^2}{2\gamma \sum_{k=0}^m c^2\left(\frac{i+k\ell}{N}\right)}\right), & x \leq T\gamma \sum_{k=0}^m c^2\left(\frac{i+k\ell}{N}\right), \\ (1 + \psi(\ell))^m \exp(-Tx/2), & x > T\gamma \sum_{k=0}^m c^2\left(\frac{i+k\ell}{N}\right). \end{cases}$$

Отсюда, учитывая выбор ℓ и неравенство $\sum_{k=0}^m c^2\left(\frac{i+k\ell}{N}\right) \leq AN$, получим

$$P\left\{|S_N^i| > \frac{gN}{\ell}\right\} \leq \max\left\{\exp\left(-\frac{NTg}{4\ell}\right), \exp(-g^2N/4A\gamma\ell^2)\right\}.$$

Результат теоремы 2 следует непосредственно из этой оценки.

Доказательство теоремы 3. Приведем доказательство для метода "скользящего окна". Методы CUSUM и GRSh были рассмотрены в работе [17]. Зафиксируем числа $0 < \varepsilon < \rho_0$ и $k \geq 0$, $m = N + k$ и рассмотрим событие $A = \{\omega : \rho_N - \rho_0 > \varepsilon\}$. По определению случайной величины ρ_N , запишем $A = \{\omega : \tau_N > \tilde{n} + m\}$, где $\tilde{n} = [(\varepsilon + \rho_0)N]$. Поэтому

$$P(A) = P\left\{\left|\sum_{k=0}^{N-1} c_k(N)x(m + \tilde{n} - k)\right| \leq g\right\} =$$

$$= P\left\{\left|h \sum_{k=0}^{\tilde{n}} c_k(N) + \sum_{k=0}^{N-1} c_k(N)\zeta_{m+\tilde{n}-k}\right| \leq g\right\},$$

где

$$\zeta_s = \xi_s I(s < m) + \eta_s I(s \geq m).$$

Так как $\sum_{k=0}^{\tilde{n}} c_k(N) = \int_0^{\rho_0+\varepsilon} c(t)dt + O\left(\frac{1}{N}\right)$, то, принимая во внимание определение ρ_0 , получим

$$\begin{aligned} P(A) &\leq P \left\{ \left| \sum_{k=0}^{N-1} c_k(N) \zeta_{m+\tilde{n}-k} \right| \geq |h| \sum_{k=0}^{\tilde{n}} c_k(N) - g \right\} = \\ &= P \left\{ \left| \sum_{k=0}^{N-1} c_k(N) \zeta_{m+\tilde{n}-k} \right| > |h| \int_{\rho_0}^{\rho_0+\varepsilon} c(t)dt + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Так как последовательность $\{\zeta\}$ удовлетворяет тем же условиям, что и $\{\xi\}$, для оценки вероятности в правой части последнего неравенства можно использовать теорему 2. Тогда получим

$$P(A) \leq L_1 \exp(-L_2 N),$$

где константы L_1, L_2 не зависят от N .

Рассмотрим теперь событие $B = \{\omega : \rho_N < \rho_0 - \varepsilon\}$. Очевидно, $B = B_1 \cup B_2$, где $B_1 = \{\omega : \tau_N < m\}$, $B_2 = \{\omega : m \leq \tau_N \leq m + \ell\}$, $\ell = [(\rho_0 - \varepsilon)N]$. Так как $(\tau_N = k)c(d_N(k) = 1)$, то, используя теорему 2 и учитывая, что $m = N + k$, имеем

$$P\{\tau_N < m\} = P_\infty(\tau_N < m) \leq m \max_{s < m} P_\infty(d_N(s) = 1) \leq C_1 \exp(-C_2 N),$$

где C_1, C_2 не зависят от N .

Далее, по определению ρ_0 имеем

$$\begin{aligned} P(B_2) &\leq P \left\{ \max_{m \leq n \leq m+\ell} |Y_N(n)| > g \right\} \leq \\ &\leq P \left\{ \max_{m \leq n \leq m+\ell} \left| \sum_{k=0}^{n-m} c_k(N) \eta_{n-k} + \sum_{k=n-m+1}^{N-1} c_k(N) \xi_{n-k} \right| > \right. \\ &> g - |h| \int_0^{\rho_0-\varepsilon} c(t)dt + O\left(\frac{1}{N}\right) \left. \right\} \leq \\ &\leq \sum_{n=m}^{m+\ell} P \left\{ \left| \sum_{k=0}^{n-m} c_k(N) \eta_{n-k} + \sum_{k=n-m+1}^{N-1} c_k(N) \xi_{n-k} \right| > h \int_{\rho_0-\varepsilon}^{\rho_0} c(t)dt + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Для оценки вероятности каждого слагаемого в правой части можно воспользоваться теоремой 2. Тогда получим

$$P(B_2) \leq C_1 \exp(-C_2 N),$$

и поэтому

$$\rho_N \rightarrow \rho_0 \quad P\text{-п.н.}, \quad N \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.

Лемма. Пусть η — неотрицательная случайная величина и существует $r^* > 0$, такое, что $L(r) = E\eta^r < \infty$ при $0 \leq r \leq r^*$ и $E\eta^r = \infty$ при $r > r^*$. Тогда при $x \rightarrow \infty$

$$G(x) \triangleq P(\eta > x) \sim O\left(\frac{1}{x^{r^*} \varphi(x)}\right),$$

где $\varphi(x) = o(x^\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$.

Доказательство леммы получается из следующих соображений. По неравенству Чебышева $G(x) \leq E\eta^r/x^r$. Следовательно, $G(x) \leq L(r)/x^r$ для любого $r \leq r^*$. С другой стороны,

$$E\eta^r = r \int_0^1 x^{r-1} G(x) dx + r \int_1^\infty x^{r-1} G(x) dx.$$

Поэтому, если существует $\varepsilon > 0$, такое, что $G(x) \leq L/x^{r^*+\varepsilon}$, то $E\eta^{r^*+\varepsilon/2} < \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$L_1/x^{r^*+\varepsilon} < G(x) < L_2/x^{r^*-\varepsilon}.$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 4.

Разобьем сумму S_k на группы слабо зависимых слагаемых следующим образом:

$$\begin{aligned} S_k &= S_k^1 + S_k^2 + \dots + S_k^m, \\ S_k^i &= x_i + x_{i+m} + \dots + x_{i+m[k/m]}, \\ i &= 1, \dots, m; \quad i + m[k/m] \leq k. \end{aligned}$$

Количество слагаемых в каждой такой группе не меньше $[k/m]$, а коэффициент перемешивания ψ между слагаемыми внутри одной группы не более $\psi(m)$. С другой стороны, коэффициент перемешивания между группами S_k^i , $i = 1, \dots, m$ не более $\psi(1)$. Поэтому

$$(1 - \psi(1))^m e^{k(\kappa(r) + \ln(1 - \psi(m)))} \leq Ee^{rS_k} \leq (1 + \psi(1))^m e^{k(\kappa(r) + \ln(1 + \psi(m)))}.$$

Положим $\kappa(r') = \kappa(r^*) + \ln(1 - \psi(m)) = \ln(1 - \psi(m))$; $\kappa(r'') = -\ln(1 - \psi(m))$ и выберем число m настолько большим, чтобы точки r' , r'' попали в окрестность точки r^* , в которой $\kappa(r)$ монотонно возрастает. Тогда для $r \geq \max(1, r'')$ имеем

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{k=1}^{\infty} \exp S_k\right)^r &\geq \sum_{k=1}^{\infty} E \exp(rS_k) \geq (1 - \psi(1))^m \sum_{k=1}^{\infty} \exp[k(\kappa(r) + \\ &+ \ln(1 - \psi(m)))] \geq (1 - \psi(1))^m \sum_{k=1}^{\infty} \exp(k\kappa(r^*)) = \infty. \end{aligned}$$

При $r'' < r \leq 1$ воспользуемся следующим неравенством ($0 < \delta < 1$, $0 \leq p \leq 1$):

$$\left(\sum_k x_k\right)^p \geq \left((1 - \delta) \sum_k \delta^k x_k\right)^p = \left(\frac{\sum_k \delta^k x_k}{\sum_k \delta^k}\right)^p \geq (1 - \delta) \sum_k \delta^k x_k^p.$$

Отсюда

$$E \left(\sum_{k=1}^{\infty} \exp S_k \right)^r \geq (1 - \delta)(1 - \psi(1))^m \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[k \left(\varkappa(r) + \ln(1 - \psi(m)) - \ln \frac{1}{\delta} \right) \right] = \infty$$

при $1 > \delta > \exp[-(\varkappa(r) + \ln(1 - \psi(m)))]$.

Далее для $0 < r < \min(1, r')$ имеем

$$E \left(\sum_{k=1}^{\infty} \exp S_k \right)^r \leq \sum_{k=1}^{\infty} E \exp(r S_k) \leq \\ \leq (1 + \psi(1))^m \sum_{k=1}^{\infty} \exp[k(\varkappa(r) + \ln(1 + \psi(m)))] \leq \\ \leq (1 + \psi(1))^m \sum_{k=1}^{\infty} e^{k(\varkappa(r^*) + \ln(1 - \psi^2(m)))} < \infty.$$

При $1 \leq r < r'$ воспользуемся следующим неравенством ($p \geq 1, p = [p] + \delta, x_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$):

$$\left(\sum_k x_k \right)^p \leq \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_{[p]}} \sum_{i_{[p]+1}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{[p]}} x_{i_{[p]+1}}^\delta.$$

Отсюда следует, что сумма $E \left(\sum_{k=1}^{\infty} \exp S_k \right)^r < \infty$ при $1 \leq r < r'$. Для доказательства вновь рассмотрим окрестность точки r^* , в которой функция $\varkappa(r)$ монотонно возрастает. Поскольку

$$E \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{S_k} \right)^r \leq \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \dots \sum_{k_{[r]}=1}^{\infty} \sum_{k_{[r]+1}=1}^{\infty} E e^{S_{k_1} + S_{k_2} + \dots + S_{k_{[r]}} + S_{k_{[r]+1}} \{r\}},$$

то случайная величина ξ_i входит в сумму $S = S_{k_1} + S_{k_2} + \dots + S_{k_{[r]}} + \{r\} S_{k_{[r]+1}}$ с коэффициентом $\ell \leq r < r'$. Пусть $\hat{k} = \max\{k_i, 1 \leq i \leq [r] + 1\}$. Тогда

$$E e^s \leq (1 + \psi(1))^m \exp \left(\hat{k} \varkappa(r) + \hat{k} \ln(1 + \psi(m)) \right) < \\ < (1 + \psi(1))^m \exp \left(\hat{k} (\varkappa(r^*) + \ln(1 - \psi^2(m))) \right).$$

Поэтому

$$E \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{S_k} \right)^r \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{k})^{k_{[r]+1}} (1 + \psi(1))^m \exp \left[\hat{k} (\varkappa(r^*) + \ln(1 - \psi^2(m))) \right] < \infty.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$: $E \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{S_k} \right)^r = \infty$ для $r > r^* + \varepsilon$ и $E \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{S_k} \right)^r < \infty$ для $0 < r < r^* - \varepsilon$. Результат теоремы 4 следует отсюда в силу доказанной выше леммы.

Доказательство теоремы 5. Обозначим $S'_k = S_k - k\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, $k \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} P_\infty \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} e^{S'_k} > e^N \right\} &\leq P_\infty \left\{ e^{\max_k S_k} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\varepsilon} > e^N \right\} = \\ &= P_\infty \left\{ \max_k S_k > N + \ln(e^\varepsilon - 1) \right\} \leq P_\infty \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} e^{S_k} > e^{N + \ln(e^\varepsilon - 1)} \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \ln P_\infty \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} e^{S'_k} > e^N \right\} \right| &\geq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \ln P_\infty \left\{ \max_k S_k > N \right\} \right| \geq \\ &\geq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \ln P_\infty \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} e^{S_k} > e^N \right\} \right|. \end{aligned}$$

Из теоремы 4 следует, что эти неравенства могут быть записаны для любого $0 < \varepsilon < |a|$ в виде

$$r^*(a - \varepsilon) \geq \delta_{\text{CUSUM}}(a) \geq r^*(a).$$

Устремляя ε к нулю, получим

$$\delta_{\text{CUSUM}}(a) = r^*(a) = \delta_{\text{GRSh}}(a),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 6. Для любого $r > 0$

$$P_\infty \left\{ \sum_{k=1}^N c \left(\frac{k}{N} \right) \xi_k > gN \right\} = P_\infty \left\{ \exp \left(r \sum_{k=1}^N c \left(\frac{k}{N} \right) \xi_k \right) > e^{rgN} \right\}.$$

По неравенству Чебышева

$$P_\infty \left\{ \exp \left(r \sum_{k=1}^N c \left(\frac{k}{N} \right) \xi_k \right) > e^{rgN} \right\} \leq \frac{E \exp \left(r \sum_{k=1}^N c \left(\frac{k}{N} \right) \xi_k \right)}{e^{rgN}}.$$

Рассмотрим величину $E \exp \left(r \sum_{k=1}^N c \left(\frac{k}{N} \right) \xi_k \right)$. Разобьем сумму S_N на группы слабо зависимых слагаемых следующим образом:

$$S_N = S_N^1 + S_N^2 + \dots + S_N^m,$$

$$S_N^i = \sum_{\ell=1}^{[N/m]} c \left(\frac{i + m\ell}{N} \right) \xi(i + m\ell), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad i + m \left[\frac{k}{m} \right] \leq k.$$

Аналогично теореме 4 получим

$$\begin{aligned} E \exp \left(r \sum_{k=1}^N c \left(\frac{k}{N} \right) \xi_k \right) &\leq (1 + \psi(1))^m \times \\ &\times \exp \left(\sum_{k=1}^N \chi \left(rc \left(\frac{k}{N} \right) \right) + N \ln(1 + \psi(m)) \right). \end{aligned}$$

Следовательно, для любого $r > 0$

$$P_{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^N c_k(N) \xi_k > g \right\} \leq (1 + \psi(1))^m \times \\ \times \exp \left(\sum_{k=1}^N \chi \left(rc \left(\frac{k}{N} \right) \right) + N \ln(1 + \psi(m)) - rgN \right).$$

Зафиксируем $0 < \varepsilon < rg$. Выберем $m \geq 1$, такое, что $\ln(1 + \psi(m)) < \varepsilon$. После логарифмирования, нормировки и перехода к пределу при $N \rightarrow \infty$ получим

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \ln P_{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^N c_k(N) \xi_k > g \right\} \right| \geq (rg - \varepsilon) - \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi \left(rc \left(\frac{k}{N} \right) \right).$$

Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \ln P_{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^N c_k(N) \xi_k > g \right\} \right| \geq \max_{r > 0} \left(rg - \int_0^1 \chi(rc(t)) dt \right).$$

Для гауссовского случая это неравенство превращается в равенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \ln P_{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^N c_k(N) \xi_k > g \right\} \right| = \frac{g^2}{2\sigma^2 \int_0^1 c^2(t) dt}.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Page E. S. Continuous inspection schemes // *Biometrika*. 1954. № 1. P. 100-115.
2. Girshick M. A., Rubin H. A Bayes approach to a quality control model // *Ann. Math. Statist.* 1952. V. 23. № 1. P. 114-125.
3. Шуряев А. Н. Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения // *Теория вероятностей и ее применения*. 1963. Т. 8. № 1. С. 26-51.
4. Шуряев А. Н. Некоторые точные формулы в задаче о разладке // *Теория вероятностей и ее применения*. 1965. Т. 10. № 2. С. 380-385.
5. Lorden G. Procedures for reacting to a change in distribution // *Ann. Math. Statist.* 1971. V. 42. № 6. P. 1897-1908.
6. Pollak M. Optimal detection of a change in distribution // *Ann. Statist.* 1985. V. 13. P. 206-227.
7. Siegmund D. *Sequential Analysis. Tests and confidence intervals*. N.Y.: Wiley, 1985.
8. Moustakides G. V. Optimal stopping times for detecting changes in distribution // *Ann. Statist.* 1986. V. 14. P. 1379-1387.
9. Wald A. *Sequential Analysis*. N.Y.: Wiley, 1947.
10. Banzal R. K., Papantoni-Kazakos P. An algorithm for detecting a change in a stochastic process // *IEEE Trans. on Inform. Theory*. 1983. V. 20. № 5. P. 709-723.
11. Pollak M., Siegmund D. A diffusion process and its application to detecting a change in the drift of Brownian motion process // *Biometrika*. 1985. V. 72. P. 267-280.
12. Bhattacharya P. K., Frierson F. Jr. A nonparametric control chart for detecting small disorders // *Ann. Statist.* 1981. V. 9. P. 544-554.
13. McDonald D. A CUSUM procedure based on sequential ranks. Preprint Univ. of Ottawa, 1988.

14. *Csörgo M., Horvath L.* Detecting a change in a random sequence // *Journ. of Multivar. Analysis.* 1987. V. 23. P. 119–130.
15. *Gordon L., Pollak M.* An efficient nonparametric scheme for detecting a change in distribution. Preprint 62L10. Univ. of Israel, 1992.
16. *Дарховский Б. С., Бродский Б. Е.* Непараметрический метод скорейшего обнаружения изменения среднего случайной последовательности // *Теория вероятностей и ее применения.* 1987. Т. 32. № 4. С. 703–711.
17. *Бродский Б. Е., Дарховский Б. С.* Сравнительный анализ некоторых непараметрических методов скорейшего обнаружения разладки случайной последовательности // *Теория вероятностей и ее применения.* 1990. Т. 35. № 4. С. 655–668.
18. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 20.06.94