В. С. Буслаев, Асимптотическое сравнение дифференциальных уравнений, *Алгебра и анализ*, 2002, том 14, выпуск 4, 1–18

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 4

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СРАВНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© В. С. Буслаев

§1. Введение

Работа посвящена задаче, которая относится к классической проблематике. Речь идет об асимптотическом поведении при $\epsilon \to 0$ решений линейного дифференциального уравнения

$$i\epsilon \frac{dx}{dt} = A(t)x\,, \tag{1.1}$$

где $A(t) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — заданная гладкая оператор-функция, $t \in \Delta = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}, x = x(t,\epsilon) \in \mathbb{C}^2, \epsilon \to 0$. Известно, что несмотря на элементарность постановки, задача не является тривиальной, и даже в рассматриваемом случае $x(t,\epsilon) \in \mathbb{C}^2$ обладает достаточной представительностью.

Асимптотическое поведение решений критически зависит от свойств собственных значений оператора $A(t)$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\operatorname{tr} A(t) = 0\,.$$

При этом оператор $A(t)$, вообще говоря, имеет два собственных значения $k(t)$ и $-k(t)$. Мы будем предполагать, что

$$k^2(t) \in \mathbb{R}\,.$$

Отказ от этого условия не порождает осложнений. Точки t_0, в которых $k(t_0) = 0$, принято называть *точками поворота*. Если t_0 является простым корнем функции k^2, мы говорим о *параболической точке поворота*. Если интервал Δ содержит две параболические точки поворота t_1, t_2, будем говорить о *паре точек поворота*. Пара называется *эллиптической/гиперболической*, если $k^2 > 0$ (< 0 при $t \in (t_1, t_2)$). Говоря о паре, мы допускаем сближение точек поворота (независимо от расстояния между ними в масштабе ϵ) вплоть до их совпадения. Мы не вводим в A никаких явных параметров, которые могут контролировать расстояние между точками поворота, считая параметром сам оператор A.

Здесь будут рассматриваться только следующие ситуации, к которым, однако, редуцируется случай общего положения: а) интервал Δ содержит только одну параболическую точку поворота, б) интервал Δ содержит эллиптическую/гиперболическую пару точек поворота.

Нашей целью является построение простых и достаточно эффективных асимптотических формул, применимых в перечисленных случаях. Настоящая статья, конечно, далеко не первая работа, в которой рассматривается эта задача. Соответствующая литература указана ниже. Мы претендуем на то, что здесь предложены формулы, которые, как нам кажется, обладают преимуществом определенной инвариантности и простоты. При наличии одной точки поворота — это формула (2.9), при наличии пары точек поворота — это формула (3.8). Являясь, по-видимому, новыми, эти формулы возникли в результате комбинирования идей, которые должны считаться хорошо известными.

Мы ограничимся эффективным построением *почти решений* $\widehat{x}$, которые удовлетворяют уравнению (1.1) с малой *невязкой*:

$$i\epsilon\frac{d\widehat{x}}{dt} = (A(t) + O(\epsilon^N))\widehat{x}\,,$$

где $O(\cdots)$ подразумевает равномерную (с некоторым количеством производных) на интервале Δ норму. Мы не формулируем и не доказываем асимптотических свойств почти решений. Это стандартная и довольно хорошо отработанная процедура.

Отметим, наконец, что результаты без труда распространяются на случай $A = A(t,\epsilon)$, при условии, что A допускает степенное асимптотическое разложение при $\epsilon \to 0$:

$$A(t,\epsilon) = A_0(t) + i\epsilon A_1(t) + \cdots$$

Мы не будем входить в обсуждение обширной литературы, относящейся к рассматриваемой задаче. Упомянем, однако, несколько книг [1, 2, 3], с которых может начать читатель, незнакомый с проблематикой. В идейном отношении наша работа мотивирована статьями [4, 5], в которых можно найти результаты по равномерным асимптотикам для скалярного уравнения второго порядка при наличии точек поворота. Настоящей статье непосредственно предшествует работа [6], где можно найти и другие ссылки.

§2. Интервал содержит не более одной точки поворота

2.1. Асимптотическое описание решений уравнения (1.1) достигается за счет сопоставления двух уравнений: исходного уравнения (1.1) и уравнения

$$i\epsilon\frac{dy}{dt} = (M(t) - i\epsilon N(t))y\,. \tag{2.1}$$

Мы полагаем

$$x \sim Ty\,, \tag{2.2}$$

где $T = T(t)$ — линейный оператор в $\mathbb{C}^2$. *Модельное уравнение* (2.1), а также оператор-функция T подбираются так, что выражение Ty в ведущем порядке описывает асимптотическое поведение подходящего решения уравнения (1.1). Если при этом модельное уравнение допускает явное решение, формула (2.2) дает эффективное асимптотическое описание решений уравнения (1.1).

При отсутствии точек поворота или при наличии на Δ лишь одной параболической точки поворота оператор N в модельном уравнении может быть положен равным 0.

Оператор M всегда подбирается так, что выполняется условие: существует гладкая (класса C^∞) оператор-функция W, равномерно невырожденная на интервале Δ, так что

$$A(t)W(t) = W(t)M(t)\,.$$

При отсутствии точек поворота в качестве M можно выбрать матрицу

$$D = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}.$$

При наличии параболической точки поворота в качестве M можно выбрать матрицу

$$P = \zeta'\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\zeta & 0 \end{pmatrix}, \quad k^2 = -\zeta\zeta'^2, \ \zeta(t_0) = 0\,.$$

Модельное уравнение с матрицей D решается элементарно. Модельное уравнение с матрицей P сводится к *уравнению Эйри.*

Ограничимся в этом параграфе случаем одной точки поворота.

Оператор W определен с точностью до двух функциональных параметров. Выбрав их так, что

1) $\operatorname{tr} K = 0$, $K = W^{-1}W'$,

2) $\operatorname{tr}(KM) = 0$,

можно положить $T = W$.

При таком выборе W в ведущем асимптотическом порядке при $\epsilon \to 0$

$$x \sim Wy. \tag{2.3}$$

В формуле (2.3) подразумевается равномерная норма на интервале Δ. Более точная формулировка дана ниже.

Условие 1) эквивалентно требованию

$$\det W = \mathrm{const}. \tag{2.4}$$

Если первоначальный оператор W не удовлетворяет этому условию, то можно перейти к новому оператору

$$W_1 = We^{-\frac{1}{2}\int \mathrm{tr}\, K dt}, \tag{2.5}$$

для которого $\det W_1 = \mathrm{const}$. Будем считать, что 1) выполнено.

Если оператор W не удовлетворяет при этом условию 2), можно перейти к оператору

$$W_1 = WZ, \quad Z = \exp\left(-\frac{M}{k}\int \frac{\mathrm{tr}(KM)}{2k}dt\right). \tag{2.6}$$

Проверка того, что

$$\mathrm{tr}(W_1^{-1}W_1'M) = 0, \tag{2.7}$$

элементарна и опирается на тот факт, что

$$\exp\left(-\frac{M}{k}\alpha\right) = \cosh\alpha - \frac{M}{k}\sinh\alpha.$$

Этот факт, в свою очередь, является следствием очевидной формулы $M^2 = k^2 I$.

Проверим (2.7). Пусть

$$U = \exp\left(-\frac{M}{k}\alpha\right),$$

тогда

$$\mathrm{tr}((WU)^{-1}(WU)'M) = \mathrm{tr}(KM) + \mathrm{tr}(U^{-1}U'M).$$

Далее,

$$U^{-1}U' = -\frac{M}{k}\alpha' - U^{-1}\sinh\alpha\left(\frac{M}{k}\right)'.$$

Легко видеть теперь, что

$$\operatorname{tr}(U^{-1}U'M) = -2k\alpha'.$$

Отсюда и следует формула (2.7).

Если интервал содержит параболическую точку поворота t_0, в формуле (2.6) следует фиксировать нижний предел интегрирования:

$$Z = \exp\Big(-\frac{M}{k}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\operatorname{tr}(KM)}{2k}dt\Big), \tag{2.8}$$

иначе оператор Z не будет гладким. Оператор W_1 окажется после этого определенным с точностью до постоянного множителя.

В заключение перепишем формулу (2.3) более явно:

$$x \sim W\exp\Big(-\frac{M}{k}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\operatorname{tr}(KM)}{2k}dt\Big)y \tag{2.9}$$

или

$$x \sim \exp\Big(-\frac{A}{k}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\operatorname{tr}(LA)}{2k}dt\Big)Wy, \quad L = W'W^{-1}. \tag{2.10}$$

Здесь y — решение модельного уравнения, $AW = WM$ и $\det W = \mathrm{const}$.

Симметричность последней формулы относительно M и A показывает, что M и A могут быть в ней любыми операторами, связанными соотношениями $AW = WM$ и $\det W = \mathrm{const}$, т.е. M необязательно должно выбираться в виде P.

2.2. Остается показать, как соотношение (2.9) устанавливается на формальном уровне и как развить его до построения почти решения с произвольно малым степенным порядком невязки.

При произвольно выбранном операторе W, $AW = WM$, перейдем к новой функции

$$x = Wy. \tag{2.11}$$

Она удовлетворяет уравнению

$$i\epsilon\frac{dy}{dt} = (M - i\epsilon K)y. \tag{2.12}$$

Отметим, что члены порядка ϵ справа, вообще говоря, дают нетривиальный вклад в ведущий член асимптотики решения y.

Стоит отметить также, что

$$\det(M - i\epsilon K) = -k^2 - i\epsilon\,\mathrm{tr}(MK) + O(\epsilon^2).$$

Эта формула проясняет смысл условия 2): старший порядок поправки к спектру оператора M при возмущении $-i\epsilon K$ при выполнении 2) обращается в нуль.

Ищем далее оператор T_1 так, что

$$(M - i\epsilon K)(1 + i\epsilon T_1) = (1 + i\epsilon T_1)M + O(\epsilon^2)\,.$$

Это соотношение эквивалентно нижеследующему:

$$MT_1 - T_1 M = K\,. \tag{2.13}$$

Алгебраические условия разрешимости этого уравнения совпадают с соотношениями 1)–2). Удовлетворяющая этим условиям матрица K имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ \zeta k_2 & -k_1 \end{pmatrix}.$$

При наличии единственной параболической точки поворота гладкое решение T_1 можно выбрать в виде

$$T_1 = -\frac{1}{2}\Big(K - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(K\sigma_3)I\Big)\frac{M}{k^2}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При выполнении (2.13) положим

$$y = (I + i\epsilon T_1)y_1\,, \tag{2.14}$$

тогда

$$i\epsilon\frac{dy_1}{dt} = (M - (i\epsilon)^2 K_2)y_1\,. \tag{2.15}$$

Поправка порядка ϵ^2 уже не влияет на ведущий член асимптотики, которая, таким образом, и описывается формулой (2.9).

Предложение 2.1. *Под действием преобразований* (2.5) *и* $y \to Zy$, *где* Z *дается формулой* (2.6), *уравнение* (2.12) *сохраняет форму, но оператор* K *приобретает дополнительные свойства* 1) *и* 2). *Под действием преобразования* (2.14) *последнее уравнение переходит в уравнение* (2.15).

Мы сможем продолжить описанный процесс и улучшить оценку погрешности оператора в модельном уравнении (2.15), если оператор K_1 удовлетворяет тем же условиям 1) и 2), что и оператор K. Выполнение этих условий может быть достигнуто при помощи процедур, которые применялись к уравнению (2.12). По существу это означает, что следует специальным образом фиксировать оператор T_1.

Построим теперь оператор T_2 так, что

$$(M - (i\epsilon)^2 K_1)(I + (i\epsilon)^2 T_2) = (I + (i\epsilon)^2 T_2)M + O(\epsilon^3)\,.$$

В результате придем к представлению

$$y_1 = (I + (i\epsilon)^2 T_2)y_2\,, \quad i\epsilon\frac{dy_2}{dt} = (M - (i\epsilon)^3 K_3)y_2$$

и т.д.

Итак, доказано

Предложение 2.2. *Существует такой полином*

$$\widehat{T}_n = \sum_{l=0}^{n} (i\epsilon)^l T_l$$

относительно ϵ, *что функция* y_n, $x = \widehat{T}_n y_n$, *удовлетворяет уравнению*

$$i\epsilon\frac{dy_n}{dt} = (M + O(\epsilon^{n+1}))y_n\,.$$

§3. Интервал содержит пару точек поворота

3.1. В случае пары точек поворота целесообразно использовать вместо t переменную ζ, которая связана с t уравнением

$$k^2 = \sigma\zeta'^2(\zeta^2 - \mu)\,,$$

здесь $\sigma = +1/-1$ для гиперболической/эллиптической пары. Параметр μ, $\mu > 0$, определяется условием гладкости функции ζ, так что $\zeta(t_1) = -\sqrt{\mu}, \zeta(t_2) = \sqrt{\mu}$.

В случае пары точек поворота не существует универсальной модели. И для гиперболической, и для эллиптической пары можно указать по крайней мере две неэквивалентные модели. Более конкретно мы можем рассматривать *модели типа* I

$$M_I = \zeta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sigma(\zeta^2 - \mu) & 0 \end{pmatrix}$$

и *модели типа* II

$$M_= \tau\zeta' \begin{pmatrix} -\zeta & -\mu_1 \\ \mu_2 & \zeta \end{pmatrix}, \quad \mu = \mu_1\mu_2, \quad \tau = \begin{cases} 1, & \sigma = 1 \\ i, & \sigma = -1\,. \end{cases}$$

Если в последней формуле отношения μ_1/μ_2 и μ_2/μ_1 ограничены, можно считать $\mu_1 = \mu_2$. Мы не утверждаем, что модели (точнее, классы эквивалентных моделей) исчерпываются перечисленными.

Стоит отметить, что *модели типа* I *и* II *обладают существенно разными геометрическими свойствами.* Это различие удобнее всего выразить следующим образом. При $t = t_1$ и $t = t_2$ операторы A и M имеют по одному (с точностью до нормировки) собственному вектору. При $\mu \to 0$ эти собственные векторы могут иметь общий предел (в случае модели типа I) или линейно-независимые пределы (в случае модели типа II).

Все системы, порождаемые перечисленными моделями, сводятся к *уравнению Вебера* [6].

Ограничимся далее рассмотрением гиперболических пар, эллиптические трактуются аналогично.

Пытаясь следовать плану п. 2.1, мы сталкиваемся прежде всего с тем, что, вообще говоря, не существует невырожденного оператора W, удовлетворяющего условию 2) $\mathrm{tr}(KM) = 0$, и гладкого в обеих точках t_1, t_2. Чтобы преодолеть это затруднение, следует модифицировать модельный оператор M.

Исходное уравнение (1.1) эквивалентно уравнению (2.12):

$$i\epsilon\frac{dy}{dt} = (M - i\epsilon K)y\,.$$

Подражая преобразованию (2.14), построим оператор T_1 так, что

$$(M - i\epsilon K)(1 + i\epsilon T_1) = (1 + i\epsilon T_1)(M - i\epsilon N) + O(\epsilon^2)\,. \tag{3.1}$$

Выполняя после этого преобразование

$$y = (I + i\epsilon T_1)y_1\,, \tag{3.2}$$

получим

$$i\epsilon\frac{dy_1}{dt} = (M - i\epsilon N + O(\epsilon^2))y_1 . \tag{3.3}$$

Это означает, что в ведущем порядке $y \sim y_1$ можно описать уравнением

$$i\epsilon\frac{dy}{dt} = (M - i\epsilon N)y . \tag{3.4}$$

Здесь появляется произвол, связанный с выбором оператора N. Мы опишем выбор оператора N ниже. Общий принцип состоит в том, что оператор $M - i\epsilon N$ будет отличаться от оператора M лишь выбором параметров типа μ, так что уравнение (3.4), как и исходное модельное уравнение, будет допускать эффективное решение.

Условие (3.1) эквивалентно уравнению

$$MT_1 - T_1M = Y, \quad Y = K - N . \tag{3.5}$$

Отсюда ясно, что, прежде всего, мы должны построить гладкое и гладко обратимое W и N так, чтобы удовлетворялись условия

1′) $\mathrm{tr}(K - N) = 0$,

2′) $\mathrm{tr}(K - N)M = 0$.

Далее, необходимо установить существование гладкого T_1, удовлетворяющего уравнению (3.5). Вопросы о конкретном выборе N и T_1, поскольку они зависят от типа модели, мы отложим до следующего подпункта.

Обратимся сейчас к уравнениям 1′) и 2′). Операторы W и N всегда будут выбираться так, что $\mathrm{tr}\, K = \mathrm{tr}\, N = 0$, поэтому условие 1′) не требует специального обсуждения. Предполагая его выполненным, обратимся к условию 2′). Если первоначальное W не удовлетворяет условию 2′), можно, следуя плану, выработанному в предыдущем пункте, заменить его на $W_1 = WZ$, где Z дается формулой

$$Z = \exp\Big(-\frac{M}{k}\int\limits_{t_1}^{t}\frac{\mathrm{tr}(K - N)M}{2k}dt\Big). \tag{3.6}$$

Это новое W, т.е. W_1, уже будет удовлетворять условию 2′): $\mathrm{tr}(K_1 - N)M = 0$, где $K_1 = W_1^{-1}W_1'$.

Ясно, что *Z будет гладким тогда и только тогда, когда N удовлетворяет условию* 3′)

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{tr}(K - N)M}{2k}dt = 0 .$$

Это условие следует рассматривать как уравнение для N.

В терминах описанных объектов, в предположении, что W и N удовлетворяют условиям 2′) и 3′), решение x описывается асимптотической формулой

$$x \sim WZ(I + i\epsilon T_1)y_1 \tag{3.7}$$

или, в ведущем порядке,

$$x \sim W \exp\Big(-\frac{M}{k}\int\limits_{t_1}^{t} \frac{\operatorname{tr}(K-N)M}{2k}dt\Big)y\,, \tag{3.8}$$

здесь y — решение уравнения (3.4).

Обсудим теперь, как выбирать N и строить оператор T_1 для моделей типов I и II по отдельности.

3.2. Обратимся к модели типа I. Положим

$$N = \zeta'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\nu & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\operatorname{tr}(NM) = -\nu\zeta'^2\,.$$

Для этого случая условие 3′) означает

$$\nu = \frac{2}{\pi i}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\operatorname{tr}(KM)}{2k}dt\,.$$

В явной записи уравнение (3.5) с учетом условия 2′) приобретает вид

$$\zeta'\begin{pmatrix} x_3 - x_2(\zeta^2-\mu) & -2x_1 \\ 2x_1(\zeta^2-\mu) & -x_3 + x_2(\zeta^2-\mu)\end{pmatrix} = Y\,,$$

здесь

$$T_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1\end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ -y_2(\zeta^2-\mu) & -y_1\end{pmatrix}.$$

Специальная структура матрицы Y является следствием условий разрешимости 1′), 2′).

В качестве частного решения можно взять

$$x_1 = -\frac{1}{2\zeta'} y_2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{\zeta'} y_1 .$$

Перейдем к модели типа II. В качестве N выберем

$$N = \zeta' \begin{pmatrix} 0 & -\nu_1 \\ \nu_2 & 0 \end{pmatrix} .$$

При этом

$$\operatorname{tr}(NM) = -\zeta'^2(\nu_1\mu_2 + \nu_2\mu_1) .$$

Если $\mu_1 = \mu_2$, можно считать, что $\nu_1 = \nu_2$. При указанном выборе N условие 3$'$) приобретает вид

$$\nu_1\mu_2 + \nu_2\mu_1 = \frac{2}{\pi i} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{tr}(KM)}{2k} dt .$$

Поскольку правая сторона стремится к нулю при $\mu_1, \mu_2 \to 0$, это уравнение позволяет определить гладко зависящие от μ_1, μ_2 параметры ν_1, ν_2. При этом, в частности,

$$\nu_1\zeta' + k_2|_{\zeta=0}, \quad \text{если } \mu_1 = 0 , \tag{3.9}$$

$$\nu_2\zeta' + k_3|_{\zeta=0}, \quad \text{если } \mu_2 = 0 . \tag{3.10}$$

Здесь k_2 и k_3 — элементы матрицы K:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & -k_1 \end{pmatrix} .$$

Обратимся к уравнению для T_1:

$$\zeta' \begin{pmatrix} -\mu_1 x_3 - \mu_2 x_2 & -2\zeta x_2 + 2\mu_1 x_1 \\ 2\mu_2 x_1 + 2\zeta x_3 & \mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 \end{pmatrix} = Y ,$$

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\zeta}(y_2\mu_2 - y_3\mu_1) & y_2 \\ y_3 & -\frac{1}{2\zeta}(y_2\mu_2 - y_3\mu_1) \end{pmatrix} .$$

Специальная структура Y вновь является следствием условий 1$'$), 2$'$).

Достаточно решить два уравнения для элементов (12) и (21). Эти уравнения будут иметь гладкие решения, если

$$y_2 = 0 \quad \text{при } \zeta = 0,\ \mu_1 = 0$$

и

$$y_3 = 0 \quad \text{при } \zeta = 0,\ \mu_2 = 0\,.$$

Нетрудно видеть, например, что

$$y_2 = k_2 + \zeta' \nu_1\,.$$

В силу (3.9) $y_2 = 0$ при $\mu_1 = 0, \zeta = 0$. Аналогично для y_3.

Итак, доказано

Предложение 3.1. *Под действием преобразований* (2.5) *и* $y \to Zy$, *где* Z *дается формулой* (3.6), *уравнение* (2.12) *сохраняет форму, но оператор* K *переходит при этом в оператор* K_1, *удовлетворяющий условиям* 1′), 2′); *соответствующий оператор* Z *можно выбрать гладким, т.е. оператор* N *определяется условием* 3′). *Под действием преобразования* (3.2) *последнее уравнение переходит в уравнение* (3.3):

$$i\epsilon \frac{dy_1}{dt} = (M_1(t,\epsilon) - (i\epsilon)^2 K_2(t))y_1\,,$$

где $M_1 = M - i\epsilon N$.

Отметим, что оператор $M_1 = M - i\epsilon N$ имеет ту же структуру, что и оператор M, лишь параметры μ заменяются на параметры $\mu - \epsilon\nu$. Благодаря этому продолжение процесса с тем, чтобы получить невязку произвольно малого степенного порядка относительно ϵ, проводится аналогично тому, как это было сделано в п. 2.2. Прежде всего выполняются преобразования, которые ведут к замене K_2 оператором K_3, удовлетворяющим условиям типа 1′) и 2′):

1′) $\mathrm{tr}(K_3 - N_1) = 0$,

2′) $\mathrm{tr}(K_3 - N_1)M_1 = 0$.

Здесь N_1 — оператор типа N, определяемый уравнением 3′)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{tr}(K_2 - N_1)M_1}{2k}\,dt = 0\,.$$

После этого преобразование типа (3.2) приводит уравнение (3.3) к виду

$$i\epsilon\frac{dy_2}{dt} = (M_2(t,\epsilon) - (i\epsilon)^3 K_4(t))y_2\,.$$

При этом может, однако, возникнуть *некоторая проблема*: точки поворота, т.е. решения уравнения $\det M_1(t,\epsilon) = 0$, могут (хотя и незначительно, на величину порядка ϵ) сдвинуться в комплексную t-плоскость. Процесс можно будет беспрепятственно провести и продолжить, если *оператор $A(t)$ является аналитической функцией t в некоторой произвольно узкой полосе комплексной плоскости, окружающей интервал* Δ. Конечно, более подробное исследование задачи позволяет снять это неприятное ограничение, но мы не будем на этом останавливаться.

Во Введении мы отмечали, что в рассматриваемом подходе к задаче с двумя точками поворота *в качестве параметра, контролирующего расстояние между точками поворота, выбирается сам оператор A*. Однако *эффективными параметрами*, которые определяют оценки объектов типа T_1, N и типа невязки в уравнении, возникающих при построении последовательных приближений, ведущих к малой невязке, являются равномерные на комплексной окрестности интервала Δ нормы функций ζ, W, их производных, а также функций ζ'^{-1} и W^{-1}.

Рассмотрим семейство $\mathcal{A}$ оператор-функций $A(t)$, для которых любые из перечисленных норм, взятых в произвольном конечном числе, в совокупности ограничены.

Описанная конструкция приводит к следующему результату.

Предложение 3.2. *Решение уравнения* (1.1) *допускает представление*

$$x = WZ_0(I + i\epsilon T_1)Z_1(I + (i\epsilon)^2 T_2)\cdots Z_{n-1}(I + (i\epsilon)^n T_n)y_n\,, \tag{3.11}$$

где

$$Z_l = \exp\left[\frac{-(i\epsilon)^l}{2}\left(\operatorname{tr} K_l + \frac{M_l}{k_l}\int\limits_{t_{1l}}^{t}\frac{\operatorname{tr}(K_l - N_l)M_l}{k_l}dt\right)\right], \tag{3.12}$$

а y_n удовлетворяет уравнению

$$i\epsilon\frac{dy_n}{dt} = \left[M_n(t,\epsilon) - (i\epsilon)^{n+1}K_n(t)\right]y_n\,. \tag{3.13}$$

Операторы N_l имеют структуру N и определяются уравнениями

$$\int\limits_{t_{1l}}^{t_{2l}}\frac{\operatorname{tr}(K_l - N_l)M_l}{2k_l}dt = 0\,. \tag{3.14}$$

Пределы интегрирования t_{1l}, t_{2l} определяются уравнением $\det M_l(t,\epsilon) = 0$, k_l — *собственное значение оператора M_l. Операторы M_l характеризуются соотношениями*

$$M_l = M_{l-1} - (i\epsilon)^l N_{l-1}. \tag{3.15}$$

Операторы M_l, K_l определяются индуктивно соотношениями (3.15) *и* (3.13) *вместе с условиями $M_0 = M$, $K_0 = K = W^{-1}W'$. Для операторов A из множества $\mathcal{A}$ все фигурирующие здесь операторы ограничены в совокупности* (*подразумевается ограниченность в равномерных нормах вместе с любым конечным числом производных*).

Отметим, что фигурирующие в предложении операторы K_l отличаются от рассмотренных выше операторов нумерацией.

Ясно, что Z_l при $l \geq 1$ может быть переразложено по степеням ϵ.

§4. Явные формулы в терминах собственных векторов

Операторы W и W_1, описанные выше, можно описать явно в терминах собственных векторов операторов A и M. Введем невырожденные матрицы-функции U и V, приводящие A и M к диагональному виду $AU = UD$ и $MV = VD$. Они выражаются через собственные векторы $u_{1,2}$ и $v_{1,2}$ операторов A и M. В качестве начального W при этом можно взять оператор

$$W = UV^{-1} = u_1 \frac{\langle \cdot, v_1^* \rangle}{\langle v_1, v_1^* \rangle} + u_2 \frac{\langle \cdot, v_2^* \rangle}{\langle v_2, v_2^* \rangle}.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартная билинейная форма (без комплексного сопряжения) на $\mathbb{C}^2$, а v_1^* и v_2^* — собственные векторы оператора M^*, сопряженного к M относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Мы считаем, что $u_1 = u(t,k)$ и $u_2 = u(t,-k)$, так же для v_1 и v_2. Мы считаем также, что $u(t,k)$ — гладкая функция обеих переменных, но явная связь между этими переменными, конечно, содержит квадратные корни. Операторы U и V следует построить так, чтобы они переводили стандартно нормированные базисные векторы $e_{1,2}$ матрицы D в векторы $u_{1,2}$ и $v_{1,2}$. Выбор нормировок операторов v_1^* и v_2^* не влияет на оператор W. Если не позаботиться, однако, о согласовании нормировок $u(t,k)$ и $v(t,k)$, операторы W, W^{-1} не будут гладкими. Это согласование должно фиксироваться по-разному для разных типов точек поворота. Во всех случаях можно без ограничения общности считать, что $u(t,k)$ и $v(t,k)$ — линейные „неоднородные" функции k. Для параболической точки поворота и для пары типа I нормы u и v можно считать нейтральными, т.е. равномерно ограниченными и отграниченными от нуля (в зависимости от параметров задачи). Для пары типа II это невозможно: гладкие собственные векторы аннулируются при $t, \mu = 0$. Характер поведения u надо всегда подстраивать под выбранный характер поведения v.

Ясно, что введенный выше оператор W обладает свойством

$$Wv_k = u_k\,.$$

Выражение для W_1 можно переписать теперь следующим образом:

$$W_1 = UZV^{-1}\,.$$

Для возникшего здесь Z справедливо представление

$$Z = \exp\left(-\frac{D}{k}\int_{t_1}^{t}\frac{\operatorname{tr}[(K-N)M]}{2k}dt\right).$$

Если A имеет единственную точку поворота, N следует положить равным 0, $t_1 = t_0$. В этом случае и в случае пары точек поворота оператор W_1 определен с точностью до постоянного множителя и не зависит от выбора первоначального оператора W.

Первоначальный оператор W может быть вообще исключен из формулы для оператора W_1: последний может быть полностью выражен в терминах операторов U и V и даже непосредственно в терминах собственных функций.

Введем спектральные проекторы P_1^D и P_2^D оператора D, отвечающие собственным значениям k и $-k$ соответственно. Ясно, что

$$I = P_1^D + P_2^D\,, \quad D = k(P_1^D - P_2^D)\,.$$

Поэтому

$$W_1 = UP_1^D V^{-1} e^{-\int_{t_1}^{t}\Omega dt} + UP_2^D V^{-1} e^{\int_{t_1}^{t}\Omega dt}\,.$$

Здесь

$$\Omega = \frac{\operatorname{tr}[(K-N)M]}{2k}\,.$$

Условие 1) для оператора K принимает при этом вид

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} K &= \operatorname{tr}(U^{-1}U' - V^{-1}V')\\ &= \operatorname{tr}[((U^{-1}U' - V^{-1}V')P_1^D) + ((U^{-1}U' - V^{-1}V')P_2^D)]\\ &= 0\,.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Легко видеть далее, что

$$\operatorname{tr}(KM) = \operatorname{tr}[(U^{-1}U' - V^{-1}V')D] .$$

Воспользуемся формулой (4.1):

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tr}(KM)}{2k} &= \frac{\operatorname{tr}[(U^{-1}U' - V^{-1}V')D]}{2k} \\ &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}((U^{-1}U' - V^{-1}V')P_1^D) - \operatorname{tr}((U^{-1}U' - V^{-1}V')P_2^D)\right] \\ &= \operatorname{tr}((U^{-1}U' - V^{-1}V')P_1^D) = -\operatorname{tr}((U^{-1}U' - V^{-1}V')P_2^D) .\end{aligned}$$

Введем теперь

$$\Omega_1 = \omega = -\frac{\operatorname{tr}(NM)}{2k} + \operatorname{tr}((U^{-1}U' - V^{-1}V')P_1^D)$$

и

$$\Omega_2 = -\omega = +\frac{\operatorname{tr}(NM)}{2k} + \operatorname{tr}((U^{-1}U' - V^{-1}V')P_2^D) .$$

В этих терминах

$$W_1 = UP_1^D V^{-1} e^{-\int_{t_1}^t \Omega_1 dt} + UP_2^D V^{-1} e^{-\int_{t_1}^t \Omega_2 dt} .$$

Все участвующие здесь объекты можно далее выразить в терминах собственных функций:

$$W_1 = u_1 \frac{\langle \cdot, v_1^* \rangle}{\langle v_1, v_1^* \rangle} e^{-\int_{t_1}^t \Omega_1 dt} + u_2 \frac{\langle \cdot, v_2^* \rangle}{\langle v_2, v_2^* \rangle} e^{-\int_{t_1}^t \Omega_2 dt} ,$$

теперь

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= -\frac{\operatorname{tr}(NM)}{2k} + \frac{\langle u_1', u_1^* \rangle}{\langle u_1, u_1^* \rangle} - \frac{\langle v_1', v_1^* \rangle}{\langle v_1, v_1^* \rangle} , \\ \Omega_2 &= \frac{\operatorname{tr}(NM)}{2k} + \frac{\langle u_2', u_2^* \rangle}{\langle u_2, u_2^* \rangle} - \frac{\langle v_2', v_2^* \rangle}{\langle v_2, v_2^* \rangle} .\end{aligned}$$

При непосредственных применениях из выражений Ω_1 и Ω_2 целесообразно выделить полный дифференциал. Чтобы описать результат, полезно ввести новые обозначения:

$$\gamma[u_1] = \frac{1}{2}\left(\frac{\langle u_1', u_1^* \rangle}{\langle u_1, u_1^* \rangle} - \frac{\langle u_1, u_1^{*\prime} \rangle}{\langle u_1, u_1^* \rangle}\right)$$

и аналогично для $\gamma[u_2], \gamma[v_1], \gamma[v_2]$. Положим далее

$$\omega_1 = -\frac{\operatorname{tr}(NM)}{2k} + \gamma[u_1] - \gamma[v_1], \quad \omega_2 = \frac{\operatorname{tr}(NM)}{2k} + \gamma[u_2] - \gamma[v_2].$$

В определенной мере законченный результат принимает теперь вид

$$W_1 = u_1 \frac{\langle \cdot, v_1^* \rangle}{\langle v_1, v_1^* \rangle} \left(\frac{\langle v_1, v_1^* \rangle}{\langle u_1, u_1^* \rangle} \right)^{1/2} e^{-\int_{t_1}^t \omega_1 dt} + u_2 \frac{\langle \cdot, v_2^* \rangle}{\langle v_2, v_2^* \rangle} \left(\frac{\langle v_2, v_2^* \rangle}{\langle u_2, u_2^* \rangle} \right)^{1/2} e^{-\int_{t_1}^t \omega_2 dt}.$$

Для справедливости этой формулы следует принять следующее согласование нормировок: при $t \to t_{1,2}$

$$\frac{\langle u_1, u_1^* \rangle}{\langle v_1, v_1^* \rangle} \to 1, \quad \frac{\langle u_2, u_2^* \rangle}{\langle v_2, v_2^* \rangle} \to 1.$$

Конечно, имеет смысл предполагать, что по образцу связи v_k и u_k существует гладкая невырожденная оператор-функция $\widehat{W}(t)$, связывающая векторы v_k^* и u_k^*:

$$u_k^* = \widehat{W} v_k^*.$$

Если же $\widehat{W} = W^{*-1}$, то компонентам последних формул можно придать вид, который позволяет легко контролировать их гладкость. В частности, при этом

$$\langle u_1, u_1^* \rangle = \langle v_1, v_1^* \rangle, \quad \langle u_2, u_2^* \rangle = \langle v_2, v_2^* \rangle,$$
$$\operatorname{tr}((U^{-1}U' - V^{-1}V')P_1^D) = \frac{\langle K v_1, v_1^* \rangle}{\langle v_1, v_1^* \rangle},$$
$$\operatorname{tr}((U^{-1}U' - V^{-1}V')P_2^D) = \frac{\langle K v_2, v_2^* \rangle}{\langle v_2, v_2^* \rangle}.$$

Отсюда следует

$$\Omega_1 = -\frac{\operatorname{tr}(NM)}{2k} + \frac{\langle K v_1, v_1^* \rangle}{\langle v_1, v_1^* \rangle},$$
$$\Omega_2 = \frac{\operatorname{tr}(NM)}{2k} + \frac{\langle K v_2, v_2^* \rangle}{\langle v_2, v_2^* \rangle}.$$

Список литературы

[1] Федорюк М. В., *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1983.

[2] Маслов В. П., Федорюк М. В., *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука М., 1976.

[3] Wasow W., *Linear turning point theory*, App. Math. Sci., vol. 54, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1985.

[4] Cherry T. M., *Uniform asymptotic formulae for functions with transition points*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 224–257.

[5] Булдырев В. С., Славянов С. Ю., *Равномерные асимптотические разложения для решений уравнения типа Шрёдингера с двумя точками перехода*, Вести. Ленингр. ун-та. Физ. хим. **1968**, вып. 4, 70–84.

[6] Buslaev V., Grigis A., *Turning points for adiabatically perturbed periodic equations*, J. Anal. Math. **84** (2001), 67–143.

С.-Петербургский
государственный университет
НИИФ
198904, Санкт-Петербург
Петродворец, Ульяновская ул., 1
Россия
E-mail: buslaev@mph.phys.spbu.ru

Поступило 11 марта 2002 г.