Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 80—81.

УДК 513.836

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ЛЕФШЕЦА

К. К. Карчяускас

1. Введение. В этой заметке под *многообразием* понимается множество общих нулей нескольких однородных многочленов в $\mathbf{C}P^q$ с некоторым q. Выражение *пара многообразий* (V, W) употребляется только в случае, когда $W \subset V$. *Полным пересечением* называется многообразие, допускающее представление с числом многочленов, равным коразмерности (никакая регулярность не требуется). Под стратификацией многообразия всегда понимается комплексно аналитическая стратификация Уитни (определение и доказательство существования которой можно найти у Мазера [1]). Стратификацией пары (V, W) мы называем стратификацию многообразия V, при которой W является объединением страт. Всякую пару многообразий также можно стратифицировать в этом смысле. Если гиперплоскость L трансверсальна любой страте некоторой стратификации многообразия V, то L называется гиперплоскостью *общего положения* по отношению к V.

Перечислим главные теоремы лефшецовского типа, имеющиеся в литературе. Теорема Лефшеца утверждает, что если многообразие V имеет размерность n и его гиперплоское сечение H содержит все его особые точки, то пара (V, H) $(n-1)$-связна. (В этом виде теорема Лефшеца была опубликована Андреотти и Франкелем [3]; первоначальная формулировка Лефшеца утверждала, что $H_i(V, H; \mathbf{Z}) = 0$ при $i \leqslant n-1$.) В последние годы появились попытки получить подобные теоремы в других ситуациях. Хамм и Ле Дунг Транг [4] доказали, что если W — гиперповерхность и L — гиперплоскость общего положения по отношению к W, то пара $(\mathbf{C}P^q \setminus W, L \setminus W)$ $(q-1)$-связна (эта теорема обобщает известную теорему Зариского о фундаментальной группе [5], полное доказательство которой опубликовали, кроме Хамма и Ле Дунг Транга, Варченко [2] и Шенье [6]). Шенье [7] доказал, что если W — многообразие с $\operatorname{codim} W \geqslant 2$ и L — гиперплоскость общего положения по отношению к W, то пара $(\mathbf{C}P^q \setminus W, L \setminus W)$ $(q-1)$-связна.

В настоящей работе формулируется обобщение теоремы Лефшеца (теорема D), содержащее в себе перечисленные теоремы лефшецовского типа. Это обобщение применяется затем для изучения топологических свойств полных пересечений.

2. Гомотопически правильные пересечения. Будем говорить, что многообразие M *гомотопически правильно пересекает* пару многообразий (V, W), если для всякого положительного ε существует такая окрестность U многообразия M, что любой компакт $K \subset (V \setminus W) \cap U$ допускает гомотопию $F\colon K \times [0, 1] \to V \setminus W$ со свойствами: 1) $F(x, 0) = x$ для всякого $x \in K$; 2) $F(K \times 1) \subset (V \setminus W) \cap M$; 3) $F(x, t) = x$ для любых $x \in K \cap M$, $t \in [0, 1]$; 4) $\operatorname{dist}(x, F(x, t)) < \varepsilon$ для любых $x \in K$, $t \in [0, 1]$, где dist — стандартная метрика в $\mathbf{C}P^q$.

Следующие предложения A, B, C дают эффективные условия, достаточные для того, чтобы M гомотопически правильно пересекало пару (V, W).

A. *Если W пусто, то всякое многообразие M гомотопически правильно пересекает пару (V, W).*

B. *Если M неособо и существует такая стратификация пары (V, W), что M трансверсально каждой страте из W, то M гомотопически правильно пересекает пару (V, W).*

C. *Если V и W неособы и пересечение $V \cap M$ обладает стратификацией, каждая страта которой трансверсальна к W в V, то M гомотопически правильно пересекает пару (V, W).*

3. Основная теорема. Пусть M — многообразие и (V, W) — пара многообразий. Положим $p = \max p(Z)$, где Z — *стратификация пары* (V, W) и $p(Z)$ — наименьшая размерность страт из $V \setminus W$, не содержащихся в M.

D. *Если M является пересечением r гиперповерхностей и гомотопически правильно пересекает пару (V, W), причем множество $V \setminus W$ связно и $r \leqslant p$, то пара $(V \setminus W, M \setminus W)$ $(p-r)$-связна.*

Теорема Лефшеца содержится в теореме D в силу предложения A. Подобным же образом упомянутые выше результаты работ [4] и [7] содержатся в теореме D в силу предложения B.

4. Теоремы о полных пересечениях. Наши более специальные результаты, относящиеся к полным пересечениям, перечисляются в теоремах E — I. Во всем пункте A обозначает полное пересечение, S — многообразие его особенностей, а n и k — размерности многообразий A и S (если S пусто, то $k = -1$).

E. *Пара $(\mathbf{C}P^q, A)$ n-связна.*

(Это прямо следует из теоремы D. Заметим, что это нетрудно вывести и из формулировки теоремы Лефшеца, данной Андреотти и Франкелем; см. п. 1.)

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»,
«Функциональный анализ и его приложения», 1977

Следствие. *При* $i \leqslant n-1$ *группа* $\pi_i(A)$ *изоморфна* $\pi_i(CP^n)$.

F. Если L — *гиперплоскость общего положения по отношению к* A, *то* $A \setminus L$ *имеет гомотопический тип букета* n*-мерных сфер.*

G. *При* $i \geqslant n+k+2$ *группа* $H_i(A; \mathbf{Z})$ *изоморфна* $H_i(CP^n; \mathbf{Z})$.

H. *При* $i \leqslant n-k-2$ *группа* $\pi_i(A \setminus S)$ *изоморфна* $\pi_i(CP^n)$.

I. *Пусть* S *лежит в гиперплоскости* L, *которая нетрансверсальна к* $A \setminus S$ *только в точках некоторого многообразия* R *размерности* r. *Тогда* $\pi_i(A \setminus L) = 0$ *при* $i \leqslant n-2-\max(k, r)$.

Заметим, что для случая, когда A — регулярное полное пересечение, теоремы E, F, G, H не являются новыми. Кроме того, один специальный случай теоремы F имеется у Герстнера и Каупа [8], а один специальный случай теоремы I — у Ховарда [9].

Автор благодарен В. А. Рохлину за большое внимание к работе.

Ленинградский государственный университет

Поступило в редакцию 14 марта 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Мазер Дж., УМН XXVII, вып. 5 (1972), 85—118. 2. Варченко А. Н., Изв. АН СССР, серия матем. 36 (1972), 957—1019. 3. Andreotti A., Frankel T., Ann. Math. 69 (1959), 713—714. 4. Hamm H., Le Dung Trang, C. r. Acad. scient. 272 (1971), 946—949. 5. Zariski O., Ann. Math. 36 (1937), 131—141. 6. Cheniot D., Asterisque 7—8 (1973), 253—261. 7. Cheniot D., Ann. Inst. Fourier 25 (1975), 195—213. 8. Gerstner O., Kaup L., Math. Ann. 204 (1973), 105—130. 9. Howard A., Ann. Math. 84 (1966), 197—216.