Ю. Г. Тетерин, Спинорные нормы локальных автометрий обобщенных квадратичных решеток, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1994, том 211, 161–173

Ю. Г. Тетерин

СПИНОРНЫЕ НОРМЫ ЛОКАЛЬНЫХ АВТОМЕТРИЙ ОБОБЩЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ РЕШЕТОК

§ 1. Введение

Одним из центральных понятий современной арифметической теории квадратичных форм над алгебраическими числовыми полями является понятие спинорного рода, введенное М.Айхлером [5]. При этом оказывается, что основные свойства спинорных родов описываются в терминах групп $\theta(O^+(L_\mathfrak{p}))$ – спинорных норм локальных автометрий решетки L, отвечающей квадратичной форме. Для нечетных нормирований $\mathfrak{p} \nmid 2$ эти группы были вычислены М.Кнезером [7], а для четных $\mathfrak{p} \mid 2$ в наиболее важных случаях это проделали Сия и Эрнест [6,4]. Во всех исследованных случаях оказалось, что указанные группы порождаются спинорными нормами симметрий, содержащихся в $O(L_\mathfrak{p})$ (точнее, пар таких симметрий). Более того, практически во всех случаях и сама группа автометрий $O(L_\mathfrak{p})$ порождается такими симметриями.

В готовящейся к публикации работе [2] мы вводим в рассмотрение понятие обобщенных квадратичных решеток. Это понятие оказывается весьма полезным при изучении представлений форм формами, в частности при изучении представлений с дополнительными конгруэнц-условиями. На обобщенные решетки переносятся основные результаты арифметической теории квадратичных форм. В частности, определяются классы, роды и спинорные роды обобщенных квадратичных решеток, и исследование последних снова сводится к вычислению групп $\theta(O^+(\mathcal{L}_\mathfrak{p}))$ – спинорных норм локальных автометрий уже для обобщенной квадратичной решетки $\mathcal{L}$.

В общем случае вычисление этих групп является весьма сложной проблемой. Однако при решении абсолютного большинства задач классической теории квадратичных форм оказывается достаточным ограничиться рассмотрением обобщенных реше-

---

Статья подготовлена при финансовой поддержке фонда Американского Математического Общества для бывшего Советского Союза (AMS for fSU)

Предварительный вариант статьи был ранее опубликован в сборнике: Аналитическая теория чисел. Петрозаводск, 1992, 106–119 .

ток специального вида – так называемых обобщенных трансляций. Главной целью этой заметки и является вычисление групп $\theta(O^+(\mathcal{L}_\mathfrak{p}))$ для обобщенной трансляции $\mathcal{L}$ и нечетных $\mathfrak{p} \nmid 2$. Мы покажем (см. теорему 2), что в этом случае, как и для классических квадратичных решеток, группа $\theta(O(\mathcal{L}_\mathfrak{p}))$ порождается спинорными нормами симметрий $\tau_\mathbf{x} \in O(\mathcal{L}_\mathfrak{p})$, а $\theta(O^+(\mathcal{L}_\mathfrak{p}))$ – произведениями пар спинорных норм таких симметрий. Вместе с тем, сама группа локальных автометрий $O(\mathcal{L}_\mathfrak{p})$ обобщенной квадратичной решетки в отличие от классического случая уже не порождается содержащимися в ней симметриями даже для нечетных $\mathfrak{p} \nmid 2$ – так, для обобщенной трансляции $\mathcal{L}$ к ним приходится добавлять произведения двух и даже четырех симметрий специального вида, однако эти дополнительные автометрии имеют единичную спинорную норму (см. теорему 1 и замечание к ней).

В качестве следствия мы приводим без доказательства обобщение известного результата о том, что если дискриминант квадратичной $\mathbb{Z}$-решетки не содержит высоких степеней простых чисел, то род такой решетки совпадает со спинорным родом, а также дальнейшее обобщение этого результата на случай алгебраических числовых полей (теорема 3 и следствие к ней). В частности, для неопределенных квадратичных форм это дает достаточное условие одноклассности рода обобщенных решеток.

§ 2. Основные определения и результаты

Мы стараемся придерживаться обозначений книг О'Мира [9] и Касселса [3] и работ М. Кнезера [7,8]. Пусть V – векторное пространство размерности n над глобальным полем k или его локализацией $k_\mathfrak{p}$, φ – симметричная невырожденная билинейная форма на V, $f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x},\mathbf{x})$ – отвечающая ей квадратичная форма, $O(V)$ – группа линейных преобразований V, сохраняющих форму f, $O^+(V)$ – группа преобразований определителя $+1$ из $O(V)$, θ – гомоморфизм спинорной нормы, $O'(V) = O^+(V) \bigcap \mathrm{Ker}(\theta)$ – подгруппа автометрий из $O^+(V)$ единичной спинорной нормы, $\nu_\mathfrak{p}(a)$ – показатель, с которым $\mathfrak{p}$ входит в a (см. [9]). В работе [2] вводится понятие обобщенных квадратичных решеток в V и тесно связанных с ними относительных решеток. Среди обобщенных решеток наибольший интерес представляют так называемые обобщенные трансляции, которым отвечают простейшие относительные решетки вида M/L, $M \supseteq L$, где M и L – обычные (классические) решетки в V, т.е. полные конечно порожденные $\mathfrak{o}$- или $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-модули ($\mathfrak{o}$ – кольцо целых элементов поля k). Решетку M/L можно рассматривать как упорядоченный набор смежных классов из фактор-группы M/L;

на множестве относительных решеток действует группа $O(V)$, в частности группа автометрий относительной решетки M/L может быть определена как

$$O(M/L) = \{\sigma \in O(V) \mid \sigma\mathbf{x} \in \mathbf{x} + L \text{ для всех } \mathbf{x} \in M\}.$$

Как показывается в [2], если обобщенной решетке $\mathcal{L}$ отвечает относительная решетка M/L, то группа автометрий $O(\mathcal{L})$ этой обобщенной решетки совпадает с $O(M/L)$, а классы, спинорные роды и cg-роды в роде $\mathcal{L}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами, спинорными родами и cg-родами в роде M/L. Поэтому, чтобы не вводить новых (и достаточно сложных) определений, мы везде в дальнейшем формулируем все результаты в терминах относительных решеток, имея в виду, что все они дословно переносятся и на обобщенные трансляции.

Для классической решетки $L \subseteq V$ и вектора $\mathbf{x} \in V$ мы обозначаем $\varphi(\mathbf{x}, L) = \{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in L\}$, $f(L) = \{f(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in L\}$. Как обычно для L определяются норма $\mathfrak{n}L$ как идеал, порожденный $f(L)$, "шкала" (делитель) $\mathfrak{s}L = \{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L\}$ и "объем" (т.е. дискриминант) $\mathfrak{v}L$ (см. [9]), а также приведенный объем $\mathfrak{V}L = \mathfrak{s}L^{-n}\mathfrak{v}L$ и приведенная ступень $\mathfrak{S}L = (\mathfrak{s}L \cdot \mathfrak{s}L^{\#})^{-1}$, где $L^{\#}$ – двойственная решетка. Если M/L – относительная решетка, то ее нормой, шкалой, объемом, приведенным объемом и приведенной ступенью называют соответственно норму, шкалу, объем, приведенный объем и приведенную ступень решетки L. Кроме того, для относительной решетки определяется степень неоднородности $i(M/L)$, равная рангу модуля M/L, и модуль неоднородности $\mathfrak{m}(M/L) = \{a \in k \mid aM \subseteq L\}$.

Далее везде, кроме формулировки теоремы 3, мы будем рассматривать только локальные решетки, т.е. $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-решетки из квадратичного пространства V над локальным полем $k_{\mathfrak{p}}$ при $\mathfrak{p} \nmid 2$. В частности, для таких решеток $\mathfrak{n}L = \mathfrak{s}L$.

Для каждого вектора $\mathbf{x} \in V$ с условием $f(\mathbf{x}) \neq 0$ определяется симметрия $\tau_{\mathbf{x}} \in O(V)$ пространства V:

$$\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - 2\frac{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f(\mathbf{x})}\mathbf{x},$$

причем $\det(\tau_{\mathbf{x}}) = -1$ и $\theta(\tau_{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x})k_{\mathfrak{p}}^{*2}$ (см. [9, 3, 8]).

Обозначим через $\mathcal{T}(V)$ и $\mathcal{T}(M/L)$ множества всех симметрий пространства V и решетки M/L:

$$\mathcal{T}(V) = \{\tau_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in V,\ f(\mathbf{x}) \neq 0\} \subseteq O(V),$$
$$\mathcal{T}(M/L) = \mathcal{T}(V) \bigcap O(M/L),$$

и через $O'(M/L)$ – множество собственных автометрий решетки M/L единичной спинорной нормы:

$$O'(M/L) = O'(V) \bigcap O(M/L).$$

Обозначим также

$$T(M/L) = \theta(\mathcal{T}(M/L)),$$

т.е. $T(M/L)$ – подмножество группы $k_{\mathfrak{p}}^{*}/k_{\mathfrak{p}}^{*2}$, состоящее из спинорных норм симметрий, содержащихся в $O(M/L)$. Главная цель этой заметки – доказательство следующей теоремы 1 и эквивалентной ей теоремы 2:

Теорема 1. *Пусть M/L – относительная $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-решетка, $\mathfrak{p} \nmid 2$. Тогда группа $O(M/L)$ порождается множеством $\mathcal{T}(M/L) \bigcup O'(M/L)$, т.е. содержащимися в ней симметриями и автометриями единичной спинорной нормы.*

Замечание. Из доказательства теоремы 1 видно, что в случае $\mathfrak{m}(M/L) \supseteq \mathfrak{p}$, т.е. когда $M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L$, вместо группы $O'(M/L)$ в теореме 1 достаточно взять множество, состоящее из произведений двух или четырех симметрий специального вида. Уточняя доказательство теоремы 1, нетрудно снять указанное ограничение на $\mathfrak{m}(M/L)$. Мы не останавливаемся на этом подробнее, поскольку для теории спинорных родов вполне достаточно теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть M/L – относительная $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-решетка, $\mathfrak{p} \nmid 2$. Тогда группа $\theta(O(M/L))$ порождается множеством $T(M/L)$, а $\theta(O^{+}(M/L))$ – произведениями пар элементов из $T(M/L)$.*

Множество $T(M/L)$ вычисляется достаточно просто (см. лемму 4). В частности, из теоремы 2 (точнее, из ее тривиальной части $\theta(O(M/L) \supseteq T(M/L))$ легко выводятся следующие результаты, которые мы приведем без доказательств:

Предложение 1. *Пусть M/L – относительная $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-решетка ранга $n \geqslant 2$, степени неоднородности i, приведенной ступени $\mathfrak{S}$ и приведенного "объема" (дискриминанта) $\mathfrak{V}$, и $\mathfrak{p} \nmid 2$. Тогда если*

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{S}) < n - 2i - 1$$

или

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{V}) < \frac{(n-2i-1)(n+2i)}{2},$$

то

$$\theta(O^{+}(M/L)) \supseteq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{*} k_{\mathfrak{p}}^{*2}.$$

Пусть теперь k – глобальное поле, Ω – множество всех нормирований k, Σ – выделенное множество неархимедовых нормирований k, содержащее почти все нормирования из Ω, $\mathfrak{o} = \{a \in k \mid |a|_{\mathfrak{p}} \leqslant 0$ для всех $\mathfrak{p} \in \Sigma\}$ – кольцо Σ-целых элементов k, $k^*_{\mathbb{A}}$ – группа иделей поля k, $O_{\mathbb{A}}(V) \subseteq \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega} O(V_{\mathfrak{p}})$ – адельная ортогональная группа квадратичного k-пространства (V, f), $O^+_{\mathbb{A}}(V) = O_{\mathbb{A}}(V) \bigcap \prod_{\mathfrak{p}\in\Omega} O^+(V_{\mathfrak{p}})$ (ср. [9,7]). Тогда гомоморфизм спинорной нормы θ продолжается до гомоморфизма $O_{\mathbb{A}}(V) \to k^*_{\mathbb{A}}/k^{*2}_{\mathbb{A}}$ по правилу $\theta(\Psi) = \{\theta(\Psi_{\mathfrak{p}})\}_{\mathfrak{p}\in\Omega}$ для любого $\Psi = \{\Psi_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}\in\Omega} \in O_{\mathbb{A}}(V)$, и определены группы

$$\begin{aligned} O'_{\mathbb{A}}(V) &= \mathrm{Ker}(\theta) &&= \{\Psi \in O^+_{\mathbb{A}}(V) \mid \theta(\Psi) = k^{*2}_{\mathbb{A}}\}, \\ O^{k+}_{\mathbb{A}}(V) &= \theta^{-1}(k^+) &&= \{\Psi \in O^+_{\mathbb{A}}(V) \mid \theta(\Psi) \in k^+ k^{*2}_{\mathbb{A}}/k^{*2}_{\mathbb{A}}\} \end{aligned}$$

адельных автометрий единичной и “главной” спинорной нормы (здесь k^+ – множество элементов из k^*, положительных относительно всех архимедовых нормирований $\mathfrak{p} \in \Omega$, для которых квадратичное пространство $(V_{\mathfrak{p}}, f)$ анизотропно). Кроме того, определено действие группы $O_{\mathbb{A}}(V)$ на множестве классических $\mathfrak{o}$-решеток $L \subseteq V$ (см. [9,7]), которое индуцирует действие $O_{\mathbb{A}}(V)$ на множестве смежных классов вида $\mathbf{x} + L$, $\mathbf{x} \in V$, и как следствие – на множестве относительных решеток M/L из V по правилу

$$\Psi(M/L) = \Psi M/\Psi L \text{ для любого } \Psi \in O_{\mathbb{A}}(V)$$

(порядок на множестве смежных классов определяется действием Ψ на них). Тогда род, cg-род, спинорный род и класс относительной $\mathfrak{o}$-решетки M/L из V определяются как

$$\begin{aligned} \mathrm{gen}\,(M/L) &= O_{\mathbb{A}}(V)(M/L), \\ \mathrm{cgr}^+(M/L) &= O^+(V) O^{k+}_{\mathbb{A}}(V)(M/L), \\ \mathrm{spn}^+(M/L) &= O^+(V) O'_{\mathbb{A}}(V)(M/L), \\ \mathrm{cls}^+\,(M/L) &= O^+(V)(M/L). \end{aligned}$$

Из предложения 1 стандартным образом выводится (ср. [3,9,1]):

Теорема 3. *Пусть M/L – относительная $\mathfrak{o}$-решетка ранга $n \geqslant 3$, степени неоднородности i, модуля неоднородности $\mathfrak{m}$, приведенной ступени $\mathfrak{S}$ и приведенного “объема” (дискриминанта) $\mathfrak{V}$ в квадратичном k-пространстве (V, f). Тогда если*

1) *для всех $\mathfrak{p} \in \Sigma$, $\mathfrak{p}|2$ $\quad \theta(O^+(M_{\mathfrak{p}}/L_{\mathfrak{p}})) \supseteq \mathfrak{o}^*_{\mathfrak{p}}$ (например, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$ и $M_{\mathfrak{p}} = L_{\mathfrak{p}}$ является модулярной или максимальной),*

2) *для всех* $\mathfrak{p} \in \Sigma$, $\mathfrak{p} \nmid 2$

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{S}) < n - 2i - 1 \quad \textit{или} \quad \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}) < \frac{(n-2i-1)(n+2i)}{2},$$

то

$$\mathrm{cgr}^+(M/L) = \mathrm{spn}^+(M/L).$$

Если, кроме того, квадратичная форма f является “неопределенной”, т.е. изотропной на $V_{\mathfrak{p}}$ для некоторого $\mathfrak{p} \in \Omega \setminus \Sigma$, то

$$\mathrm{cgr}^+(M/L) = \mathrm{cls}^+(M/L).$$

Следствие. *Пусть M/L – относительная $\mathbb{Z}$-решетка ранга $n \geqslant 3$, степени неоднородности i, модуля неоднородности m, приведенной ступени S и приведенного дискриминанта D в квадратичном $\mathbb{Q}$-пространстве (V, f). Тогда если $2 \nmid m$ и*

1) $2^{2[n/2-1]} \nmid S$ *или* $2^{n(n-1)/2+[(n+1)/2]} \nmid D$,

2) *для любого простого* $p > 2$

$$p^{n-2i-1} \nmid S \quad \textit{или} \quad p^{(n-2i-1)(n+2i)/2} \nmid D,$$

то

$$\mathrm{gen}(M/L) = \mathrm{spn}^+(M/L).$$

Если, кроме того, квадратичная форма f является неопределенной, то

$$\mathrm{gen}(M/L) = \mathrm{cls}^+(M/L).$$

Теорема 3 и следствие к ней буквально переносятся на произвольные обобщенные решетки. Мы не останавливаемся на этом, чтобы не вводить новых определений.

§ 3. Свойства автометрий, симметрий и множества $T(M/L)$

Везде в этом параграфе $\mathfrak{p} \nmid 2$, M, L – классические $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-решетки размерности n в квадратичном $k_{\mathfrak{p}}$-пространстве (V, f), $M \supseteq L$.

Лемма 1. *Если $M_1 \supseteq M_2 \supseteq L$, то*

$$O(M_1/L) \subseteq O(M_2/L).$$

Доказательство. Вытекает из определения $O(M/L)$.

Лемма 2. *Если* $\mathbf{x} \in L$, $\mathbf{y} \in M$, $\sigma \in O(M/L)$, *то*

$$\varphi(\sigma\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \pmod{\mathfrak{n}L}.$$

Доказательство. Если $\sigma \in O(M/L)$, то и $\sigma^{-1} \in O(M/L)$. Поэтому

$$\varphi(\sigma\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \sigma^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{y}) \subseteq \varphi(\mathbf{x}, L) \subseteq \mathfrak{n}L.$$

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{x} \in L$, $f(\mathbf{x}) \neq 0$. *Тогда:*

1) *если* $\mathbf{y} \in V$, $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathfrak{p}^t f(\mathbf{x})$, *то* $\tau_\mathbf{x}\mathbf{y} \equiv \mathbf{y} \pmod{\mathfrak{p}^t L}$ $(t \in \mathbb{Z})$;

2) *если* $\varphi(\mathbf{x}, M) \subseteq f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, *то* $\mathbf{x}$ *примитивен в* M, $\tau_\mathbf{x} \in O(M/L)$ *и*

$$L = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}\mathbf{x} \perp L', \ M = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}\mathbf{x} \perp M', \quad \text{где } L' = L \bigcap \mathbf{x}^\perp, \ M' = M \bigcap \mathbf{x}^\perp;$$

3) *если* $\mathbf{x}$ *примитивен в* L *и* $\tau_\mathbf{x} \in O(M/L)$, *то* $\mathbf{x}$ *примитивен в* M *и* $\varphi(\mathbf{x}, M) \subseteq f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$.

Доказательство. Прямо следует из определений $\tau_\mathbf{x}$ и $O(M/L)$.

Лемма 4.

$$T(M/L) = \{f(\mathbf{x})k_\mathfrak{p}^{*2} \mid \mathbf{x} \in L, \ \varphi(\mathbf{x}, M \bigcap \mathfrak{p}^{-1}L) \subseteq f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\}$$

Доказательство. Если $T \in T(M/L)$, то $T = \theta(\tau_\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})k_\mathfrak{p}^{*2}$ для некоторого $\mathbf{x} \in V$ с условием $\tau_\mathbf{x} \in O(M/L)$. Домножив, если нужно, $\mathbf{x}$ на число из $k_\mathfrak{p}$, мы можем считать, что $\mathbf{x} \in L$ и $\mathbf{x}$ примитивен в L. Тогда в силу леммы 1 и леммы 3
$\varphi(\mathbf{x}, M \bigcap \mathfrak{p}^{-1}L) \subseteq \varphi(\mathbf{x}, M) \subseteq f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$.
Обратно, пусть $\mathbf{x} \in L$, $\varphi(\mathbf{x}, M \bigcap \mathfrak{p}^{-1}L) \subseteq f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Пусть $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(t)} \in M$ – система представителей классов вычетов M/L, $\mathbf{z}^{(j)} = c_j\mathbf{y}^{(j)}$, где $c_j \in k$ выбрано так, чтобы $\mathbf{z}^{(j)} \in L$ и $\mathbf{z}^{(j)}$ был примитивен в L $(j = 1, \dots, t)$. Поскольку $\mathfrak{p} \nmid 2$, то $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-решетка L обладает ортогональным базисом $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Пусть $\pi \in k_\mathfrak{p}$ – образующая идеала $\mathfrak{p}$, $\varepsilon = \nu_\mathfrak{p}(f(\mathbf{x}))$, $\varepsilon_i = \nu_\mathfrak{p}(f(\mathbf{e}_i))$, $f(\mathbf{e}_i) = u_i\pi^{\varepsilon_i}$, $u_i \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}^*(1 \leqslant i \leqslant n)$ и упорядочим $\mathbf{e}_i$ так, что $\varepsilon_i \leqslant \varepsilon$ для $i \leqslant s$, $\varepsilon_i \geqslant \varepsilon$ для $i > s$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$. Пусть x_i и $z_i^{(j)}$ – координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}^{(j)}$ в этом базисе: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{z}^{(j)} = z_1^{(j)}\mathbf{e}_1 + \ldots + z_n^{(j)}\mathbf{e}_n$, $1 \leqslant j \leqslant t$. Тогда условие $\varphi(\mathbf{x}, M \bigcap \mathfrak{p}^{-u}L) \subseteq f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ для $u \geqslant 1$ эквивалентно тому, что $x_i = \pi^{\varepsilon - \varepsilon_i}x_i'$, $x_i' \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ для $i \leqslant s$, и $u_1x_1'z_1^{(j)} + \ldots + u_sx_s'z_s^{(j)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^u}$ для всех $j = 1, \dots, t$.
Тогда это решение системы линейных сравнений при $u = 1$ может быть поднято до решения соответствующего уравнения в $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, т.е. найдутся такие $X_1', \dots, X_s' \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, что $X_1' \equiv x_1'$, $\dots$, $X_s' \equiv x_s' \pmod{\mathfrak{p}}$ и $u_1X_1'z_1^{(j)} + \ldots + u_sX_s'z_s^{(j)} = 0$ для всех $j = 1, \dots, t$.

Положим $X_i = \pi^{\varepsilon-\varepsilon_i}X_i'$ для $i \leqslant s$, $X_i = x_i$ для $i > s$, $\mathbf{X} = X_1\mathbf{e}_1 + \ldots + X_n\mathbf{e}_n$. Тогда $f(\mathbf{X}) \equiv f(\mathbf{x}) \pmod{\mathfrak{p}^{\varepsilon+1}}$, $\mathbf{X}$ примитивен в L и $\varphi(\mathbf{x}, M) \subseteq f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = f(\mathbf{X})\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Поэтому в силу леммы 1 $\tau_\mathbf{X} \in O(M/L)$ и $f(\mathbf{x})k_\mathfrak{p}^{*2} = f(\mathbf{X})k_\mathfrak{p}^{*2} = \theta(\tau_\mathbf{X}) \in T(M/L)$, что и доказывает лемму 4.

Следствие. *$T(M/L) = T(M\bigcap\mathfrak{p}^{-1}L\,/\,L)$, т.е. $T(M/L)$ зависит только от трансляции по модулю $\mathfrak{p}$.*

Лемма 5. *Пусть $L_1 \subseteq L$ – такая подрешетка L размерности $m \leqslant n$, что $\mathfrak{v}L_1 \supseteq (\mathfrak{n}L)^m$, и $W = k_\mathfrak{p}L_1$ – $k_\mathfrak{p}$-пространство, натянутое на L_1. Тогда*

$$L_1 = L\bigcap W \text{ и } L = L_1 \perp L_2, \text{ где } L_2 = L\bigcap W^\perp.$$

Доказательство. Из условий $\mathfrak{p}\nmid 2$ и $\mathfrak{v}L_1 \supseteq (\mathfrak{n}L)^m$ следует

$$(\mathfrak{n}L)^m \supseteq \mathfrak{n}(L\bigcap W)^m \supseteq \mathfrak{V}(L\bigcap W) \supseteq \mathfrak{V}(L_1) \supseteq (\mathfrak{n}L)^m,$$

так что $\mathfrak{V}(L_1) = (\mathfrak{n}L)^m$ и $L_1 = L\bigcap W$. Тогда L_1 является ортогональной суммой одномерных решеток: $L_1 = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}\mathbf{x}_1 \perp \ldots \perp \mathfrak{o}_\mathfrak{p}\mathbf{x}_m$, причем $f(\mathbf{x}_j)\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{n}L$, $j = 1, \ldots, m$. Следовательно, любой $\mathbf{y} \in L$ представим в виде $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, где

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1)}{f(\mathbf{x}_1)}\mathbf{x}_1 + \ldots + \frac{\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}_m)}{f(\mathbf{x}_m)}\mathbf{x}_m \in L_1, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{y} - \mathbf{y}_1 \in L\bigcap W^\perp,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 6. *Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \neq 0$. Тогда если $f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \neq 0$, то $\tau_{\mathbf{x}-\mathbf{y}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, а если $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \neq 0$, то $\tau_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\tau_\mathbf{x}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.*

Доказательство. Проверяется непосредственно, ср. [3].

Лемма 7. *Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$, $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \neq 0$, $f(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \in \mathfrak{p}^t f(\mathbf{x})$, $t \geqslant 1$, $\lambda = \tau_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\tau_\mathbf{x}$. Тогда $\lambda \in O^+(L)$, $\theta(\lambda) = k_\mathfrak{p}^{*2}$, $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{y}$ и*

$$f(\lambda\mathbf{z} - \mathbf{z}) \in \varphi(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{z})^2 f(\mathbf{x})^{-1}(1 + \mathfrak{p}^t) \text{ для любого } \mathbf{z} \in L, \tag{3.1}$$

$$\lambda\mathbf{v} - \mathbf{v} \in \mathfrak{p}^s L \text{ для любого } \mathbf{v} \in V \text{ с условием}$$
$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathfrak{p}^s f(\mathbf{x}),\ \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \in \mathfrak{p}^s f(\mathbf{x})\ (s \in \mathbb{Z}); \tag{3.2}$$

если кроме того $\mathbf{y} \in \mathbf{x} + \mathfrak{p}^t L$ и $f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{n}L$, то $\lambda \in O^+(L/\mathfrak{p}^t L)$.

Доказательство. Из условия $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ следует, что

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = 2\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 4f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \in 4f(\mathbf{x})(1 + \mathfrak{p}^t), \tag{3.3}$$

$$2\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \in \mathfrak{p}^t f(\mathbf{x}). \tag{3.4}$$

Поэтому $\lambda \in O^+(V)$, $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{y}$ в силу леммы 6, и

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{z} - \mathbf{z} &= -2\frac{\varphi(\mathbf{x},\mathbf{z})}{f(\mathbf{x})}\mathbf{x} - 2\frac{\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})}{f(\mathbf{x}+\mathbf{y})}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + 4\frac{\varphi(\mathbf{x},\mathbf{z})\,\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})\,f(\mathbf{x}+\mathbf{y})}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\\ &= \frac{\varphi(\mathbf{x},\mathbf{z})}{f(\mathbf{x})}\mathbf{y} - 2\frac{\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})}{f(\mathbf{x}+\mathbf{y})}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\\ &\equiv \frac{1}{f(\mathbf{x})}\left(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{z})\,\mathbf{y} - 2\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})\,(\mathbf{x}+\mathbf{y})\right)\\ &\equiv \frac{1}{f(\mathbf{x})}\left(\varphi(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{z})\,\mathbf{x} + \left(\varphi(\mathbf{x},\mathbf{z}) - \frac{\varphi(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{z})}{2}\right)(\mathbf{y}-\mathbf{x})\right) \pmod{\mathfrak{p}^t L}\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.4) следует (3.1). Если же $\mathbf{y}-\mathbf{x} \in \mathfrak{p}^t L$, то отсюда следует, что $\lambda\mathbf{z} - \mathbf{z} \in f(\mathbf{x})^{-1}\mathfrak{p}^t\mathfrak{n}L \cdot L$, так что в случае $f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{n}L$ $\lambda\mathbf{z} \in \mathbf{z} + \mathfrak{p}^t L$ для всех $\mathbf{z} \in L$, т.е. $\lambda \in O^+(L/\mathfrak{p}^t L)$. Наконец, (3.2) следует из (3.3) и леммы 3.

§ 4. Доказательство теорем 1 и 2

Прежде всего покажем, что доказательство теорем 1 и 2 в общем случае сводится к доказательству теоремы 1 в случае $M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L$. Действительно, пусть M/L – произвольная относительная решетка, и предположим, что мы уже установили справедливость теоремы 1 для всех решеток M'/L' с условием $M' \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L'$, в частности – и для решетки $(M \bigcap \mathfrak{p}^{-1}L)/L$. Если обозначить через $\langle T(M/L)\rangle$ подгруппу $k_\mathfrak{p}^*/k_\mathfrak{p}^{*2}$, порожденную $T(M/L)$, а через $\langle T(M/L)\rangle_2$ – подгруппу $k_\mathfrak{p}^*/k_\mathfrak{p}^{*2}$, порожденную произведениями пар элементов из $T(M/L)$, то это будет означать, что

$$\begin{aligned}\langle T(M \textstyle\bigcap \mathfrak{p}^{-1}L/L)\rangle &= \theta(O(M \textstyle\bigcap \mathfrak{p}^{-1}L/L)),\\ \langle T(M \textstyle\bigcap \mathfrak{p}^{-1}L/L)\rangle_2 &= \theta(O^+(M \textstyle\bigcap \mathfrak{p}^{-1}L/L)).\end{aligned}$$

Тогда в силу леммы 1, леммы 4 и определения $T(M/L)$ имеем

$$\begin{aligned}\langle T(M/L)\rangle = \langle T(M \textstyle\bigcap \mathfrak{p}^{-1}L/L)\rangle = \theta(O(M \textstyle\bigcap \mathfrak{p}^{-1}L/L)) \supseteq\\ \supseteq \theta(O(M/L)) \supseteq \langle T(M/L)\rangle.\end{aligned}$$

Следовательно, $\theta(O(M/L)) = \langle T(M/L)\rangle$. Аналогично получаем $\theta(O^+(M/L)) = \langle T(M/L)\rangle_2$, что и доказывает теорему 2, а следовательно и эквивалентную ей теорему 1.

Итак, нам осталься доказать теорему 1 в случае $M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L$. Доказательство проведем индукцией по рангу n решетки M/L. Базой индукции является случай $n = 0$, когда $V = L = M = \{0\}$, $O(M/L) = \{\mathrm{Id}\}$, так что утверждение теоремы становится тривиальным.

Пусть теперь $n \geqslant 1$ и справедливость теоремы 1 доказана для всех $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-решеток M'/L' с условием $M' \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L'$, ранг n' которых меньше n. Докажем ее справедливость для решетки M/L ранга n с условием $M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L$. Пусть $\sigma \in O(M/L)$. Обозначим через $\langle \mathcal{T}(M/L) \rangle$ подгруппу $O(M/L)$, порожденную $\mathcal{T}(M/L)$. Мы найдем такую автометрию

$$\lambda \in \langle \mathcal{T}(M/L) \rangle \bigcup O'(M/L) \tag{4.1}$$

и такое невырожденное подпространство $W \subseteq V$, что

$$\lambda \mathbf{x} = \sigma \mathbf{x} \text{ для всех } \mathbf{x} \in W, \tag{4.2}$$

$$L = L_1 \perp L_2, \quad \text{где } L_1 = L \bigcap W, \quad L_2 = L \bigcap W^{\perp}, \tag{4.3}$$

$$M = M_1 \perp M_2, \quad \text{где } M_1 = M \bigcap W, \quad M_2 = M \bigcap W^{\perp}. \tag{4.4}$$

Тогда M_2/L_2 является относительной решеткой в $W^{\perp}$ с условием $M_2 \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L_2$. Пусть $O(V, W) = \{\alpha \in O(V) \mid \alpha\mathbf{x} = \mathbf{x} \text{ для всех } \mathbf{x} \in W\}$. Тогда очевидное отождествление $O(W^{\perp})$ с $O(V, W)$ индуцирует вложения

$$O(M_2/L_2) \subseteq O(M/L), \ \mathcal{T}(M_2/L_2) \subseteq \mathcal{T}(M/L), \ O'(M_2/L_2) \subseteq O'(M/L), \tag{4.5}$$

и в силу (4.2) $\lambda^{-1}\sigma \in O(W^{\perp})$. Следовательно согласно индукционному предположению $\lambda^{-1}\sigma$ представимо в виде произведения автометрий из $\mathcal{T}(M_2/L_2) \bigcup O'(M_2/L_2) \subseteq \mathcal{T}(M/L) \bigcup O'(M/L)$. Поэтому из (4.1) следует, что и $\sigma = \lambda(\lambda^{-1}\sigma)$ является произведением автометрий из $\mathcal{T}(M/L) \bigcup O'(M/L)$, что и требовалось доказать.

Для построения автометрии λ и подпространства W рассмотрим три случая:

1) Существует вектор $\mathbf{x} \in L$ с условием $\varphi(\mathbf{x}, M) \subseteq f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Тогда $\sigma\mathbf{x} \in L$, $f(\sigma\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, $\varphi(\sigma\mathbf{x}, M) = \varphi(\mathbf{x}, \sigma^{-1}M) = \varphi(\mathbf{x}, M) \subseteq f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, и следовательно $\mathbf{x} \pm \sigma\mathbf{x} \in L$, $\varphi(\mathbf{x} \pm \sigma\mathbf{x}, M) \subseteq f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Кроме того, поскольку $\mathfrak{p} \nmid 2$, то из соотношения

$$f(\mathbf{x} - \sigma\mathbf{x}) + f(\mathbf{x} + \sigma\mathbf{x}) = 2f(\mathbf{x}) + 2f(\sigma\mathbf{x}) = 4f(\mathbf{x})$$

следует, что либо $\nu_\mathfrak{p}(f(\mathbf{x} - \sigma\mathbf{x})) = \nu_\mathfrak{p}(f(\mathbf{x}))$, либо $\nu_\mathfrak{p}(f(\mathbf{x} + \sigma\mathbf{x})) = \nu_\mathfrak{p}(f(\mathbf{x}))$. В первом случае положим $\lambda = \tau_{\mathbf{x}-\sigma\mathbf{x}}$, во втором $\lambda = \tau_{\mathbf{x}+\sigma\mathbf{x}}\tau_{\mathbf{x}}$, и $W = k_\mathfrak{p}\mathbf{x}$. Тогда условия $\lambda \in \langle \mathcal{T}(M/L) \rangle$, (4.3) и (4.4) следуют из леммы 3, а условие (4.2) – из леммы 6.

2) $\mathfrak{n}M \supseteq \mathfrak{p}^{-2}\mathfrak{n}L$. Тогда $\mathfrak{n}M = \mathfrak{p}^{-2}\mathfrak{n}L$, поскольку $\mathfrak{n}M \subseteq \mathfrak{p}^{-2}\mathfrak{n}L$ в силу условия $M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L$. Поэтому найдется вектор $\mathbf{y} \in M$ с условием

$$f(\mathbf{y})\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{n}M = \mathfrak{p}^{-2}\mathfrak{n}L. \tag{4.6}$$

Положим $W = k_\mathfrak{p}\mathbf{y}$, $\lambda = \tau_{\mathbf{y}+\sigma\mathbf{y}}\tau_\mathbf{y}$. Из условия $M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L$ следует, что $\mathfrak{p}\mathbf{y} \subseteq L$, так что условия (4.3) и (4.4) с $M_1 = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}\mathbf{y}$, $L_1 = \mathfrak{p}\mathbf{y}$ следуют из леммы 5 и (4.6). Из условия $\mathbf{y} \in M$ следует, что $\sigma\mathbf{y} \in \mathbf{y} + \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in L$, причем в силу (4.6) и условия $\mathbf{y} \in M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L$ имеем $\varphi(\mathbf{y},\mathbf{x}) \in \mathfrak{p}^{-1}\varphi(L,L) = \mathfrak{p}f(\mathbf{y})$. Поэтому $f(\mathbf{y}+\sigma\mathbf{y}) = 4f(\mathbf{y}) + 4\varphi(\mathbf{y},\mathbf{x}) \in 4(1+\mathfrak{p})f(\mathbf{y}) \subseteq f(\mathbf{y})k_\mathfrak{p}^{*2}$, т.е. $\theta(\lambda) = f(\mathbf{y})f(\mathbf{y}+\sigma\mathbf{y})k_\mathfrak{p}^{*2} = k_\mathfrak{p}^{*2}$. Кроме того, лемма 7, примененная к вектору $\mathbf{y}$ и решетке $\mathfrak{p}^{-1}L$, вместе с леммой 1 показывает, что $\lambda \in O^+(\mathfrak{p}^{-1}L/L) \subseteq O^+(M/L)$, так что $\lambda \in O'(M/L)$. Наконец, условие (4.2) выполнено в силу леммы 6.

3) Не выполнены условия случаев 1 и 2. Для упрощения выкладок будем далее предполагать без ограничения общности, что $\mathfrak{n}L = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ (если это не так, то заменим f на af, где $a \in k_\mathfrak{p}$, $a\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{n}L^{-1}$). Тогда $\mathfrak{n}M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}$, поскольку иначе мы оказываемся в случае 2. Возьмем любой вектор $\mathbf{x} \in L$ с условием $f(\mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ (он существует в силу условия $\mathfrak{n}L = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$). Тогда найдется вектор $\mathbf{z} \in M$ с условием $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{z})\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{-1}$ (если это не так, то $\varphi(\mathbf{x}, M) = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, поскольку $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} \subseteq \varphi(\mathbf{x}, M) \subseteq \mathfrak{p}^{-1}$ в силу условия $L \subseteq M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L$, т.е. мы попадаем в случай 1). Кроме того,

$$f(\sigma\mathbf{x} - \mathbf{x}) \in \mathfrak{p}, \tag{4.7}$$

поскольку иначе $f(\sigma\mathbf{x} - \mathbf{x})\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{n}L$, а из леммы 2 следует, что $\varphi(\sigma\mathbf{x} - \mathbf{x}, M) \subseteq \mathfrak{n}L$, т.е. мы снова оказываемся в случае 1.

Из условий на $f(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и $f(\mathbf{z}) \in \mathfrak{n}M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}$ следует, что квадратное уравнение $f(\mathbf{x})t^2 + 2\varphi(\mathbf{x},\mathbf{z})t + f(\mathbf{z}) = 0$ имеет корень $t \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Тогда вектор $\mathbf{y} = \mathbf{z} + t\mathbf{x}$ обладает свойствами

$$\mathbf{y} \in M, \quad f(\mathbf{y}) = 0, \quad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{-1}. \tag{4.8}$$

Положим

$$\mathbf{a} = \mathbf{x} - \frac{f(\mathbf{x})+2}{2\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{x} - \frac{f(\mathbf{x})-2}{2\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})}\mathbf{y}. \tag{4.9}$$

Тогда из (4.8) и условия $\mathbf{y} \in M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}L$ следует, что

$$\mathbf{a},\mathbf{b} \in L, \; f(\mathbf{a}) = -2 \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}^*, \; f(\mathbf{b}) = 2 \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}^*, \; \varphi(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0, \tag{4.10}$$

$$\sigma\mathbf{a} - \mathbf{a} \equiv \sigma\mathbf{b} - \mathbf{b} \equiv \sigma\mathbf{x} - \mathbf{x} \pmod{\mathfrak{p}L}. \tag{4.11}$$

Положим $W = k_\mathfrak{p}\mathbf{x} + k_\mathfrak{p}\mathbf{y} = k_\mathfrak{p}\mathbf{a} + k_\mathfrak{p}\mathbf{b}$,

$$\alpha = \tau_{\mathbf{a}+\sigma\mathbf{a}}\tau_\mathbf{a}, \qquad \beta = \tau_{\mathbf{b}+\alpha^{-1}\sigma\mathbf{b}}\tau_\mathbf{b}, \qquad \lambda = \alpha\beta$$

и покажем, что W и λ являются требуемыми, т.е. обладают свойствами (4.1)–(4.4). Действительно, $M \bigcap W$ содержит подрешетку

$M_1 = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}\mathbf{x} + \mathfrak{o}_\mathfrak{p}\mathbf{y}$, "объем" которой в силу (4.8) равен $\mathfrak{v}M_1 = \mathfrak{p}^{-2}$. Поэтому (4.4) следует из леммы 5. Аналогично $L\bigcap W$ содержит подрешетку $L_1 = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}\mathbf{x}+\mathfrak{p}\mathbf{y}$ и $\mathfrak{v}L_1 = \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, откуда в силу леммы 5 следует (4.3). Далее, поскольку $\alpha, \sigma \in O(V)$ и в силу леммы 6 $\alpha\mathbf{a} = \sigma\mathbf{a}$, $\beta\mathbf{b} = \alpha^{-1}\sigma\mathbf{b}$, то в силу (4.10)

$$\varphi(\mathbf{a}, \alpha^{-1}\sigma\mathbf{b}) = \varphi(\alpha\mathbf{a}, \sigma\mathbf{b}) = \varphi(\sigma\mathbf{a}, \sigma\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$$

и следовательно

$$\beta\mathbf{a} = \mathbf{a}, \ \ \alpha\mathbf{b} = \mathbf{b}. \tag{4.12}$$

Поэтому

$$\lambda\mathbf{a} = \alpha\beta\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} = \sigma\mathbf{a}, \ \ \lambda\mathbf{b} = \alpha\beta\mathbf{b} = \alpha(\alpha^{-1}\sigma\mathbf{b}) = \sigma\mathbf{b}, \tag{4.13}$$

откуда следует (4.2). Далее, в силу (4.12), (4.11) и (4.7) имеем

$$f(\sigma\mathbf{a} - \mathbf{a}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$
$$f(\alpha^{-1}\sigma\mathbf{b} - \mathbf{b}) = f(\sigma\mathbf{b} - \alpha\mathbf{b}) = f(\sigma\mathbf{b} - \mathbf{b}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

откуда в силу леммы 7 и (4.10)

$$\lambda \in O^+(L), \qquad \theta(\lambda) = \theta(\alpha) = \theta(\beta) = k_\mathfrak{p}^{*2}, \tag{4.14}$$

$$\lambda\mathbf{v} \equiv \alpha\mathbf{v} \equiv \beta\mathbf{v} \equiv \mathbf{v} \pmod{L} \text{ для всех } \mathbf{v} \in M \text{ с условием} \tag{4.15}$$

$$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{v}) \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}, \ \ \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{v}) \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}, \tag{4.16}$$

поскольку в силу леммы 2 из (4.16) следует, что $\varphi(\sigma\mathbf{a}, \mathbf{v}) \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, $\varphi(\sigma\mathbf{b}, \mathbf{v}) \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, $\varphi(\alpha^{-1}\sigma\mathbf{b}, \mathbf{v}) = \varphi(\sigma\mathbf{b}, \alpha\mathbf{v}) \in \varphi(\sigma\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \varphi(L, L) \subseteq \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$.

Покажем теперь, что $\lambda \in O(M/L)$. Пусть $\mathbf{v} \in M$. Тогда из условия $\mathbf{y} \in M$, $\mathfrak{n}M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}$ следует, что

$$\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \in \mathfrak{p}^{-1}.$$

Положим $\mathbf{v}_1 = \dfrac{\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})}\mathbf{y}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$. Тогда в силу (4.8) и (4.9)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \qquad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in M, \tag{4.17}$$

$$\mathbf{v}_1 \in \mathfrak{p}^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \tag{4.18}$$

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2) = 0, \qquad \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{v}_2) \in \mathfrak{n}M \subseteq \mathfrak{p}^{-1}, \tag{4.19}$$

и из (4.18), (4.13) и (4.11) следует, что

$$\lambda\mathbf{v}_1 = \sigma\mathbf{v}_1 \equiv \mathbf{v}_1 \pmod{L}. \tag{4.20}$$

Далее, из (4.8), (4.9) и (4.19) следует, что

$$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{v}_2) \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}, \qquad \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{v}_2) \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p},$$

так что в силу (4.15) $\lambda \mathbf{v}_2 \equiv \mathbf{v}_2 \pmod L$; вместе с (4.17) и (4.20) это дает $\lambda \mathbf{v} \equiv \mathbf{v} \pmod L$, т.е. $\lambda \in O(M/L)$. Отсюда и из (4.14) следует, что $\lambda \in O'(M/L)$. Таким образом, W и λ действительно удовлетворяют условиям (4.1)–(4.4), что и завершает доказательство.

Литература

1. Ю. Г. Тетерин, *О понятии cg-рода квадратичных форм.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ **160** (1987), 170–181.
2. Ю. Г. Тетерин, *Классы, роды и спинорные роды квадратичных форм* (готовится к печати).
3. J. W. S. Cassels, *Rational quadratic forms.* London, Academic Press, 1978; Русский перевод: *Рациональные квадратичные формы.* М., 1982.
4. A. G. Earnest, J. S. Hsia, *Spinor norms of local integral rotations. II.* — Pacific J. Math. **61** no. 1 (1975), 71–86.
5. M. Eichler, *Quadratishe Formen und ortogonale Gruppen.* Berlin a.o., Springer, 1952.
6. J. S. Hsia, *Spinor norms of local integral rotations. I.* — Pacific J. Math. **57** no. 1 (1975), 199–206.
7. M. Kneser, *Klassenzahlen indefiniter quadratischer Formen in drei oder mehr Verãnderlichen.* — Arch. Math. **7** no. 5 (1956), 323–332.
8. M. Kneser, *Quadratische Formen (Vorlesungen).* Gottingen, Math. Inst., 1974.
9. O. T. O'Meara, *Introduction to quadratic forms.* Berlin a.o., Springer, 1963.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 февраля 1994 г.