

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 13 Выпуск 2 (2012)

Труды IX Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной 80-летию профессора Мартина Давидовича
Гриндлингера

УДК 511.9.

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ¹

© 2012. А. В. Одеров (г. Тула)

Аннотация

В вычислительной математике существенную роль играет интерполяция функций, т.е. построение по заданной функции другой (как правило, более простой), значения которой совпадают со значениями заданной функции в некотором числе точек. Причем интерполяция имеет как практическое, так и теоретическое значение. На практике часто возникает задача о восстановлении непрерывной функции по ее табличным значениям, например полученным в ходе некоторого эксперимента.

В работе приводятся результаты численного эксперимента по интерполяции и аппроксимации периодических функций на единичном квадрате.

Ключевые слова: Интерполяционные формулы, аппроксимация функций, параллелепипедальные сетки.

Библиография: 3 названия.

NUMBER-THEORETIC ALGORITHMS OF INTERPOLATION

© 2012. A. V. Oderov (c. Tula)

Abstract

In calculus mathematics an essential role interpolation of functions, i.e. construction on the given function plays another (as a rule, more simple) which values coincide with values of the given function in some number of points. Interpolation has both practical, and theoretical value. In practice often there is a task about restitution of a continuous function on its tabular values for example received during some experiment.

¹Работа выполнена по гранту РФФИ 11-01-00571

1 Интерполяция и аппроксимация функций многих переменных

Часто для задания функции $f(x_1, \dots, x_s)$, принадлежащей тому или иному классу A_s , приходится использовать таблицу значений этой функции в узлах некоторой сетки

$$M_k = (\xi_1(k, N), \dots, \xi_s(k, N)), (k = 1, 2, \dots, N)$$

Рассмотрим таблицы значений функции $f(x_1, \dots, x_s)$, получающиеся с помощью двух различных сеток с одинаковым числом узлов. Очевидно, лучшей будет та из этих таблиц, которая позволит восстановить функцию в точках, не принадлежащих сеткам с большей точностью равномерно для всех $f(\vec{x}) \in A_s$. Как было показано в [3], при табличном задании функций, принадлежащих к классам E_s^α и H_s^α , теоретико-числовые сетки значительно выгоднее равномерных.

Определим функцию $P(x_1, \dots, x_s)$ равенством

$$P(x_1, \dots, x_s) = \sum_{k=1}^N f(\xi_1(k, N), \dots, \xi_s(k, N)) \psi_{k,N}(x_1, \dots, x_s), \quad (1)$$

где $\psi_{k,N}(x_1, \dots, x_s)$ — некоторые известные функции. Пусть функция $R^*(\vec{x})$ определена равенством

$$f(x_1, \dots, x_s) = P(x_1, \dots, x_s) + R^*(x_1, \dots, x_s). \quad (2)$$

При построении интерполяционных и аппроксимационных формул естественно выбирать сетки M_k и функции $\psi_{k,N}(x_1, \dots, x_s)$ так, чтобы при возрастании N скорость убывания погрешности $R^*(x_1, \dots, x_s)$ была возможно большей.

Пусть $f \in E_s^\alpha$, a_1, \dots, a_s — оптимальные коэффициенты по модулю p , β — их индекс, $N = p$ и $N_1 = \lfloor \frac{\sqrt{N}}{\ln^{\frac{\beta}{2}} N} \rfloor$. Определим функцию $P(x_1, \dots, x_s)$ с помощью равенств

$$\begin{aligned} \tilde{C}(m_1, \dots, m_s) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) e^{-2\pi i \frac{(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)k}{p}} \\ P(x_1, \dots, x_s) &= \sum_{\overline{m_1 \dots m_s} \leq N_1} \tilde{C}(m_1, \dots, m_s) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначая $f - P$ через R^* , получим соотношение

$$f(x_1, \dots, x_s) = P(x_1, \dots, x_s) + R^*(x_1, \dots, x_s),$$

которое, как видно из теоремы 1, представляет собой аппроксимационную формулу.

ТЕОРЕМА 1. (Рябенский В.С.) Если функция $f(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит классу $E_s^\alpha(C)$ и тригонометрический многочлен $P(x_1, \dots, x_s)$ определен равенствами [3], то справедлива оценка

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 |f(x_1, \dots, x_s) - P(x_1, \dots, x_s)|^2 dx_1 \dots dx_s = O\left(N^{-\alpha + \frac{1}{2}} \ln^\gamma N\right),$$

где $\gamma \leq \alpha\beta + s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3] стр. 165.

Таким же путем, как и в теореме 1, можно получить оценку модуля погрешности аппроксимационной формулы.

ТЕОРЕМА 2. Если функция $f_1(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит классу $E_s^\alpha(C)$ и тригонометрический многочлен $P(x_1, \dots, x_s)$ определен равенствами [3], то справедлива оценка

$$f(x_1, \dots, x_s) - P(x_1, \dots, x_s) = O\left(N^{-\frac{\alpha-1}{2}} \ln^{\gamma_1} N\right), \quad (4)$$

где $\gamma_1 \leq \frac{\alpha\beta}{2} + s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3] стр. 167.

Таким образом, в случае аппроксимационных формул с параллелепipedальными сетками, построенных без использования производных аппроксимируемой функции, для функции $f \in E_s^\alpha$ при $s \geq 2$ нельзя получить оценку погрешности лучшую, чем $O(N^{-\frac{\alpha}{2}})$.

Интерполяционные формулы для функций, принадлежащих к классу E_s^α , представляют из себя конечные ряды Фурье.

Пусть $p > 1$ — целое и функция $f(x_1, \dots, x_s)$ определена в точках

$$\left(\frac{z_1}{p}, \dots, \frac{z_s}{p}\right) \quad (z_\nu = 0, 1, \dots, p-1; 1 \leq \nu \leq s). \quad (5)$$

Определим целые p_1 и p_2 равенствами:²

$$p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right], \quad p_2 = \left[\frac{p}{2}\right].$$

Тогда целые числа интервала $-p_1 \leq k \leq p_2$ образуют полную систему вычетов по модулю p .

²Здесь $[x]$ — целая часть числа x .

ТЕОРЕМА 3. В каждой из точек (5) выполняется равенство

$$f\left(\frac{z_1}{p}, \dots, \frac{z_s}{p}\right) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -p_1}^{p_2} C_p(m_1, \dots, m_s) e^{2\pi i \frac{m_1 z_1 + \dots + m_s z_s}{p}}, \quad (6)$$

где

$$C_p(m_1, \dots, m_s) = \frac{1}{p^s} \sum_{k_1, \dots, k_s = 0}^{p-1} f\left(\frac{k_1}{p}, \dots, \frac{k_s}{p}\right) e^{-2\pi i \frac{m_1 k_1 + \dots + m_s k_s}{p}}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [3] стр. 26.

В работах [1] и [2] рассматриваются конечные ряды для произвольных обобщенных параллелепипедальных сеток с целочисленными решетками. Конечный ряд Фурье из теоремы 3 является частным, наиболее простым случаем общей конструкции.

2 Численный эксперимент

Для сравнения вышеописанных методов аппроксимации интерполяции следует провести численный эксперимент. Для этого будет использован математический пакет Mathcad.

Для простоты эксперимента рассмотрим двумерный случай.

Пусть исходная функция задана формулой:

$$f(x, y) = 9((1 - 2x)(1 - 2y))^2.$$

Её график представлен на рисунке 1.

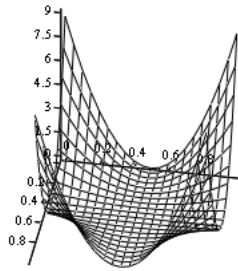


Рис. 1: График оригинальной функции

Для первого случая интерполяционная формула будет выглядеть следующим образом:

$$f_{int1}(x, y) = \sum_{m_1, m_2 = -\frac{P-1}{2}}^{\frac{P-1}{2}} (a_{m_1, m_2} \cos(2\pi(m_1 x + m_2 y)) - b_{m_1, m_2} \sin(2\pi(m_1 x + m_2 y))).$$

Формулы для расчетов коэффициентов a_{m_1, m_2} и b_{m_1, m_2} :

$$a_{m_1, m_2} = \frac{1}{P^2} \sum_{k, n=0}^{P-1} f\left(\frac{k}{P}, \frac{n}{P}\right) \cos\left(-2\pi \left(\frac{k \cdot m_1 + n \cdot m_2}{P}\right)\right),$$

$$b_{m_1, m_2} = \frac{1}{P^2} \sum_{k, n=0}^{P-1} f\left(\frac{k}{P}, \frac{n}{P}\right) \sin\left(-2\pi \left(\frac{k \cdot m_1 + n \cdot m_2}{P}\right)\right).$$

Пусть, $P = 59$. График функции, построенный с помощью интерполяционной формулы, представлен на рисунке 2

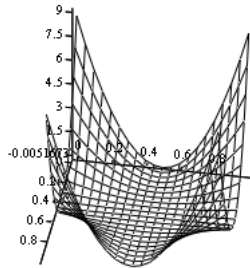


Рис. 2: График, построенный с помощью интерполяционной формулы

Для расчета ошибки интерполяции применим следующую формулу:

$$r(x, y) = |f(x, y) - f_{int}(x, y)| \quad (8)$$

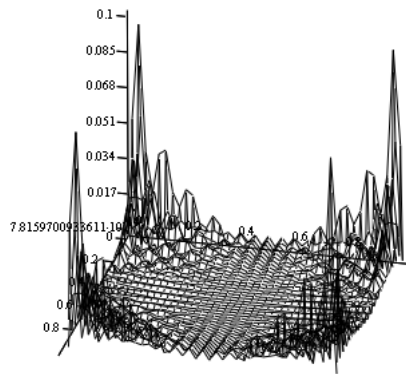


Рис. 3: График ошибки интерполяции

Как можно увидеть из рисунка 3 ошибка интерполяции достигает максимального значения на границах квадрата.

Теперь рассмотрим второй способ аппроксимации.

Аппроксимационная формула для этого случая будет выглядеть следующим образом:

$$f_{int2}(x, y) = \sum_{\overline{m_1 \cdot m_2} < \frac{\sqrt{P}}{\ln P}} (a_{m_1, m_2} \cos(2\pi(m_1 x + m_2 y)) - b_{m_1, m_2} \sin(2\pi(m_1 x + m_2 y))).$$

Тогда, формулы расчета коэффициентов a и b примут следующий вид:

$$a_{m_1, m_2} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P f\left(\left\{\frac{a_1 \cdot k}{P}\right\}, \left\{\frac{a_2 \cdot k}{P}\right\}\right) \cos\left(-2\pi \left(\frac{(k \cdot m_1 + n \cdot m_2) \cdot k}{P}\right)\right),$$

$$b_{m_1, m_2} = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P f\left(\left\{\frac{a_1 \cdot k}{P}\right\}, \left\{\frac{a_2 \cdot k}{P}\right\}\right) \sin\left(-2\pi \left(\frac{(k \cdot m_1 + n \cdot m_2) \cdot k}{P}\right)\right),$$

где a_1 и a_2 являются оптимальными коэффициентами.

Пусть, в этом случае, $P = 701$, $a_1 = 1$ и $a_2 = 21$.

Тогда график интерполяционной формулы будет выглядеть так:

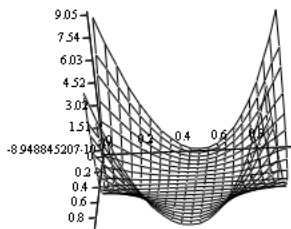


Рис. 4: График, построенный с помощью интерполяционной формулы

График ошибки интерполяции, построенный с помощью функции 8, представлен на рисунке 5.

Как видно из рисунков 3 и 5 первый подход к построению интерполяционных формул дает более точные результаты. Тоже самое можно увидеть и в таблице 1.

Файлы проектов данного эксперимента доступны по адресу <http://poivs.tspu.ru:8181/xwiki/bin/view/Статьи/ПОИВС+<ТМК>%3A+Теоретико-числовые+алгоритмы+интерполяции>

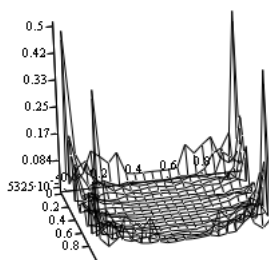


Рис. 5: График ошибки интерполяции

x	y	$f(x, y)$	$f_{int1}(x, y)$	$r_1(x, y)$	$f_{int2}(x, y)$	$r_2(x, y)$
0	0	9	9	$7.816 * 10^{-14}$	9.048	0.048
0	1	9	9	$7.816 * 10^{-14}$	9.048	0.048
1	0	9	9	$7.816 * 10^{-14}$	9.048	0.048
1	1	9	9	$7.816 * 10^{-14}$	9.048	0.048
0.5	0.5	0	$2.967 * 10^{-6}$	$2.967 * 10^{-6}$	$9.83 * 10^{-4}$	$9.83 * 10^{-4}$

Таблица 1: Экспериментальные расчеты

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. Тула. Изд-во Тул. гос. ун-та 1998. Том 4, выпуск 3, С. 56 — 67.
- [2] Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая фурье интерполяция // Чебышевский сборник Тула. Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого 2004. Том 5, выпуск 1 С. 122 — 143.
- [3] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 29.04.12