Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. K. Andreev, I. V. Stepanova, On the conditions for existence of unidirectional motions of binary mixtures in the Oberbeck–Boussinesq model,
Sib. Zh. Ind. Mat., 2019, Volume 22, Number 2, 3–12

https://www.mathnet.ru/eng/sjim1038

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.86
April 30, 2025, 09:45:18

Сибирский журнал
индустриальной математики
Апрель–июнь, 2019. Том XXII, № 2(78)

УДК 532.5

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ В МОДЕЛИ ОБЕРБЕКА — БУССИНЕСКА

В. К. Андреев, И. В. Степанова

Получены условия совместности нестационарных уравнений Обербека — Буссинеска, описывающих однонаправленные движения бинарной смеси жидкостей в горизонтальной полосе. Проанализирован случай полиномиальной зависимости температуры от продольной координаты и влияние такого типа зависимости на остальные неизвестные функции, входящие в исходную систему. Показано, что нестационарное однонаправленное движение между двумя твердыми стенками можно описать посредством исходной модели только для квадратичного и линейного законов распределения температуры по горизонтальной координате. Даны некоторые постановки начально-краевых задач.

Ключевые слова: уравнения Обербека — Буссинеска, бинарная смесь, однонаправленное движение, условия совместности.

DOI 10.33048/sibjim.2019.22.201

Введение. Уравнения Обербека — Буссинеска часто составляют основу математической модели конвективного движения жидкости в естественных условиях. Для исследования влияния эффекта термодиффузии на распределение компонентов бинарной смеси к описанной модели нужно добавить уравнение диффузии. Эти уравнения будут несимметричны относительно искомых функций: эффект термодиффузии учитывается посредством дополнительного слагаемого, связанного с температурой, в уравнении на концентрацию. Полученная система нелинейная и имеет высокий порядок. Построение точных решений такого рода систем является сложной и важной задачей в современной математике и ее приложений в механике сплошных сред. Нужно отметить, что для модели стационарной конвекции в однородной жидкости известно достаточно много точных решений (см., например, монографию [1] и обзор [2]). Результаты исследования уравнений термодиффузионной конвекции можно найти в [3, 4]. Некоторые задачи об устойчивости термодиффузионных течений, а также взаимного влияния эффекта термодиффузии и вибрационного воздействия на смеси описаны в [5, 6]. Вопросам построения и изучения решений нестационарных задач термодиффузии в плоских и цилиндрических областях, выводу достаточных условий их сходимости к стационарному режиму посвящена монография [7].

Исследование, представленное в данной работе, является расширением и обобщением результатов, полученных в [8–10]. Так, в [8] проводился анализ совместности и построение новых точных решений для уравнений однонаправленного стационарного течения бинарной смеси с нелинейной силой плавучести, где плотность есть произвольная функция температуры и концентрации. Работа [9] содержит наиболее подробное исследование аналогичных течений для линейной зависимости плотности от параметров состояния. В [10] показано, что однонаправленные движения однородной жидкости в классической

© 2019 Андреев В. К., Степанова И. В.

модели Обербека — Буссинеска существуют только при линейной зависимости температуры от продольной координаты вдоль слоя жидкости. При этом градиент температуры на стенках слоя может зависеть от времени. Настоящая статья посвящена анализу нестационарных уравнений однонаправленного движения бинарной смеси в приближении Обербека — Буссинеска. Условие совместности данной системы сводится к тому, что функция температуры должна удовлетворять уравнению Пуассона с линейной по горизонтальной координате x правой частью, а функция концентрации должна иметь одинаковый с температурой характер зависимости от x. Полученные результаты обобщают анализ, проведенный в [10] для однородных жидкостей, и дают новую информацию о нестационарных движениях бинарных смесей.

1. Анализ совместности уравнений одномерных нестационарных движений бинарной смеси. Уравнения нестационарного однонаправленного движения бинарной смеси имеют вид

$$\begin{gathered} u_t = \nu u_{yy} - \frac{1}{\rho_0} p^*_x, \quad g(\beta_1\theta + \beta_2 c) = \frac{1}{\rho_0} p^*_y, \\ \theta_t + u\theta_x = \chi(\theta_{xx} + \theta_{yy}), \quad c_t + uc_x = D(c_{xx} + c_{yy}) + D^\theta(\theta_{xx} + \theta_{yy}), \end{gathered} \tag{1}$$

где $u = u(y,t)$ — горизонтальная компонента скорости, $\theta = \theta(x,y,t)$ — температура, $c = c(x,y,t)$ — концентрация легкого компонента, $p^* = p - g\rho_0 y$ — модифицированное давление. Постоянные $\nu > 0$, $\chi > 0$, $D > 0$, D^θ — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, диффузии и термодиффузии соответственно. Система (1) описывает движение бинарной смеси в приближении Обербека — Буссинеска, т. е. уравнение состояния имеет вид $\rho = \rho_0(1 - \beta_1\theta - \beta_2 c)$, где β_1, β_2 — коэффициенты теплового и концентрационного расширения, ρ_0 — средняя плотность смеси.

Принимая L за характерный масштаб длины, ΔT за характерную температуру, введем безразмерные переменные следующим образом:

$$\begin{gathered} \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{y} = \frac{y}{L}, \quad \hat{t} = \frac{\nu}{L^2} t, \quad \hat{u} = \frac{\nu}{g\beta_1 \Delta T L^2} u, \\ \hat{p}^* = \frac{1}{\rho_0 g \beta_1 \Delta T L} p^*, \quad \hat{\theta} = \frac{1}{\Delta T}\theta, \quad \hat{c} = \frac{\beta_2}{\beta_1 \Delta T} c. \end{gathered}$$

В этих переменных система уравнений (1) имеет вид (символ «крышка» опущен)

$$\begin{gathered} u_t = u_{yy} - p_x, \quad \theta + c = p_y, \\ \theta_t + \mathrm{Gr}\, u\theta_x = \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\theta_{xx} + \theta_{yy}), \quad c_t + \mathrm{Gr}\, uc_x = \frac{1}{\mathrm{Sc}}\,[c_{xx} + c_{yy} - \psi(\theta_{xx} + \theta_{yy})], \end{gathered} \tag{2}$$

где $\mathrm{Gr} = g\beta_1 \Delta T L^3/\nu^2$ — число Грасгофа, $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, $\mathrm{Sc} = \nu/D$ — число Шмидта, $\psi = -\beta_2 D^\theta/(\beta_1 D)$ — параметр разделения.

Из первого уравнения системы (2) следует линейность давления от x

$$p(x,y,t) = -a(y,t)x + b(y,t), \tag{3}$$

а из второго — условие на функции температуры и концентрации

$$\theta + c = b_y - a_y x. \tag{4}$$

В равенствах (3) и (4) функции $a(y,t)$, $b(y,t)$ пока произвольные. Выразив в равенстве (4) концентрацию через температуру и подставив в последнее уравнение системы (2), после простых преобразований приходим к еще одному уравнению на $\theta(x,y,t)$:

$$\theta_t + \mathrm{Gr}\, u\theta_x = \frac{1+\psi}{\mathrm{Sc}}(\theta_{xx} + \theta_{yy}) + (b - ax)_{ty} - \frac{1}{\mathrm{Sc}}(b - ax)_{yyy} - \mathrm{Gr}\, ua_y. \tag{5}$$

Сравнивая третье уравнения системы (2) и равенство (5), получим соотношение

$$\left[\frac{1}{\mathrm{Pr}} - \frac{1+\psi}{\mathrm{Sc}}\right](\theta_{xx} + \theta_{yy}) = (b - ax)_{ty} - \frac{1}{\mathrm{Sc}}(b - ax)_{yyy} - \mathrm{Gr}\, u a_y. \tag{6}$$

Для дальнейших рассуждений удобно ввести параметр

$$\Psi = 1/\mathrm{Pr} - (1+\psi)/\mathrm{Sc}. \tag{7}$$

Отметим, что $\Psi = 0$, если физические свойства смеси удовлетворяют равенству $\chi + D^\theta \beta_2/\beta_1 = D$. В случае общего положения $\Psi \neq 0$. Тогда из (6) выражение $\theta_{xx} + \theta_{yy}$ есть линейная функция x:

$$\theta_{xx} + \theta_{yy} = \frac{1}{\Psi}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{Sc}} a_{yyy} - a_{ty}\right)x + b_{ty} - \frac{1}{\mathrm{Sc}} b_{yyy} - \mathrm{Gr}\, u\, a_y\right]. \tag{8}$$

Значит, температура есть решение линейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка:

$$\theta_t + \mathrm{Gr}\, u\theta_x = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\Psi}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{Sc}} a_{yy} - a_t\right)_y x + \left(b_t - \frac{1}{\mathrm{Sc}} b_{yy}\right)_y - \mathrm{Gr}\, u a_y\right] \equiv \alpha(y,t)x + \beta(y,t). \tag{9}$$

Если $\theta_0(x,y)$ — начальное распределение температур, то решение (9) задается формулой

$$\theta(x,y,t) = \theta_0\left(x - \mathrm{Gr}\int\limits_0^t u(y,\tau)\,d\tau, y\right) + \int\limits_0^t \left\{\alpha(y,\tau)\left[x + \mathrm{Gr}\int\limits_0^\tau u(y,\tau_1)\,d\tau_1\right] + \beta(y,\tau)\right\} d\tau - \mathrm{Gr}\int\limits_0^t \alpha(y,\tau)\,d\tau \int\limits_0^t u(y,\tau)\,d\tau. \tag{10}$$

Поле концентраций находим из равенства (4):

$$c(x,y,t) = b_y - a_y x - \theta(x,y,t), \quad c_0(x,y) = b_y(y,0) - a_y(y,0)x - \theta_0(x,y) \tag{11}$$

с функцией $\theta(x,y,t)$ из (10).

Заметим, что распределение температуры θ_0 не произвольное, а должно удовлетворять уравнению Пуассона (см. выражение (8)):

$$\theta_{0xx} + \theta_{0yy} = \mathrm{Pr}[\alpha(y,0)x + \beta(y,0)] \tag{12}$$

с правой частью, линейно зависящей от координаты x.

Подставляя θ из (10) в уравнение (8) при $t \geq 0$, получим соотношение

$$\theta_{0\xi\xi}\left[1 + \mathrm{Gr}^2\left(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\right)^2\right] - 2\,\mathrm{Gr}\,\theta_{0\xi y}\int\limits_0^t u_y\,d\tau + \theta_{0yy} - \mathrm{Gr}\,\theta_{0\xi}\int\limits_0^t u_{yy}\,d\tau = \mathrm{Pr}[\alpha(y,t)x + \beta(y,t)] - Q_{yy}(y,t)x - Q_{1yy}(y,t), \tag{13}$$

где

$$\xi = x - \mathrm{Gr}\int\limits_0^t u(y,\tau)\,d\tau, \quad Q(y,t) = \int\limits_0^t \alpha(y,\tau)\,d\tau, \tag{14}$$

$$Q_1(y,t) = \int\limits_0^t \left[\mathrm{Gr}\,\alpha(y,\tau)\int\limits_0^\tau u(y,\tau_1)\,d\tau_1 + \beta(y,\tau)\right] d\tau - \mathrm{Gr}\int\limits_0^t \alpha(y,\tau)\,d\tau \int\limits_0^t u(y,\tau)\,d\tau.$$

Проведенные рассуждения позволяют сделать выводы.

1. Если задана начальная температура $\theta_0(x,y)$, согласованная с равенством (12), то будут известны начальные данные $\alpha(y,0)$, $\beta(y,0)$. Тогда уравнение (13) с обозначениями (14) определяет связи между функциями $u(y,t)$, $\alpha(y,t)$, $\beta(y,t)$. Для замыкания задачи к этим связям необходимо добавить первое уравнение системы (2) с учетом зависимости давления (3):

$$u_t = u_{yy} + a(y,t). \tag{15}$$

2. В общем случае вид функции $\theta_0(x,y)$ — решения уравнения (12) — зависит от вида граничных условий, например, на твердых стенках $y=0$, $y=1$. Поскольку горизонтальная скорость есть функция только от переменной y, нельзя удовлетворить условиям прилипания при конечном значении x, значит, задача имеет смысл только в неограниченном по x слое.

3. Часто при построении точных решений температура и концентрация берутся в виде полиномов второго [2, 7, 9, 11, 12] или первого [2–4, 13–17] порядков от горизонтальной координаты x. В нашем случае вследствие того, что функция $\theta_0(x,y)$ должна удовлетворять условию (12), ее представление в виде полинома может быть многочленом по x степени не выше трех.

2. Полиномиальное распределение температуры от горизонтальной координаты. Было отмечено, что $\theta_0(x,y)$, а значит и $\theta(t,x,y)$, может быть многочленом по x степени три и меньше. Пусть

$$\theta = s_1(y,t)x^3 + s_2(y,t)x^2 + s_3(y,t)x + s_4(y,t) \tag{16}$$

с пока произвольными функциями s_i, $i=1,\dots,4$. Тогда из (4) представление для концентрации должно быть в виде

$$c = s_5(y,t)x^3 + s_6(y,t)x^2 + s_7(y,t)x + s_8(y,t), \tag{17}$$

причем $s_5 = -s_1$, $s_6 = -s_2$, $s_7 = -s_3 - a_y$, $s_8 = b_y - s_4$. Подстановка такого вида решения в два последних уравнения системы (2) и последующее расщепление по степеням x (с учетом $\Psi \neq 0$) ведет к соотношениям на s_i, $i=1,\dots,8$:

$$\begin{gathered} s_{1t} = 0, \quad s_{1yy} = 0, \quad s_{2yy} = 0, \quad s_{2t} = -3\,\mathrm{Gr}\,us_1, \\ s_{3t} + 2\,\mathrm{Gr}\;us_2 = \frac{1}{\mathrm{Pr}}(6s_1 + s_{3yy}), \quad s_{4t} + 2\,\mathrm{Gr}\;us_3 = \frac{1}{\mathrm{Pr}}(2s_2 + s_{4yy}), \\ s_{7t} - 2\,\mathrm{Gr}\;us_2 = \frac{1}{\mathrm{Sc}}(s_{7yy} - \psi s_{3yy} - 6(1+\psi)s_1), \\ s_{8t} + \mathrm{Gr}\;us_7 = \frac{1}{\mathrm{Sc}}(s_{8yy} - \psi s_{4yy} - 2(1+\psi)s_2). \end{gathered} \tag{18}$$

Уравнение (15) для функции u остается в том же виде. При найденных s_i функции a и b восстанавливаются из равенств

$$a_y = -s_7 - s_3, \quad b_y = s_4 + s_8. \tag{19}$$

Из первых четырех равенств в (18) следует, что если $s_1 = \varphi_1 y + \varphi_2 \neq 0$, $s_2 = \varphi_3(t)y + \varphi_4(t)$ (φ_1, φ_2 — постоянные, φ_3, φ_4 — функции переменной t), то функция u имеет специальный вид:

$$u = -\frac{1}{3\,\mathrm{Gr}}\frac{\varphi_3' y + \varphi_4'}{\varphi_1 y + \varphi_2}. \tag{20}$$

Штрих означает производную по t. Такая зависимость скорости ограничивает возможности при постановке граничных условий для ее определения из (15). Например, нельзя удовлетворить условиям прилипания на двух неподвижных твердых стенках. Аналогично, выполнение условия теплоизоляции одной из стенок, например верхней ($\partial\theta(x,1,t)/\partial y = 0$), влечет $\varphi_1 = \varphi_3(t) = 0$, т. е. функция скорости не зависит от y. В качестве еще одного примера невозможности использования зависимости (20) для описания движения приведем выполнение условия отсутствия потока вещества, скажем, на нижней стенке $y = 0$:

$$\frac{\partial c}{\partial y}\,(x,0,t) - \psi\frac{\partial\theta}{\partial y}\,(x,0,t) = 0. \tag{21}$$

Подставляя в (21) представления для температуры (16), концентрации (17) и расщепляя полученные равенства по x, заметим, что $(1+\psi)\varphi_1 = 0$, $(1+\psi)\varphi_3(t) = 0$, откуда в случае $\psi \neq -1$ следует, что скорость не зависит от y. В случае $\psi = -1$ градиенты плотности, вызванные неоднородностью температуры и концентрации, уравновешивают друг друга. Плотность становится постоянной, уравнения (1) выходят за рамки модели Обербека — Буссинеска. Иногда вместо (21) задается нулевая концентрация $c(x,0,t) = 0$. Тогда $\varphi_2 = 0$, $\varphi_4(t) = 0$ и вновь скорость, определяемая формулой (20), есть только функция переменной t.

Таким образом, справедлив следующий вывод.

4. В случае общего положения ($\Psi \neq 0$, $\psi \neq -1$) однонаправленное движение бинарной смеси на твердой подложке невозможно, если температура и концентрация представляют собой полиномы третьего порядка.

Такой же вывод можно сделать, если рассмотреть линию $y = 1$ как свободную границу, на которой задается динамической условие $\rho_0\nu u_y = -\varkappa_1\theta_x - \varkappa_2 c_x$, где $\varkappa_1$ — тепловой коэффициент поверхностного натяжения, $\varkappa_2$ — коэффициент поверхностной активности свободной границы. В безразмерных переменных это условие перепишется как

$$\left(u_y + \frac{\mathrm{Ma}^\theta}{\mathrm{Gr}}\theta_x + \frac{\mathrm{Ma}^c}{\mathrm{Gr}}c_x\right)\bigg|_{y=1} = 0.$$

Здесь $\mathrm{Ma}^\theta = \varkappa_1\triangle TL/(\rho_0\nu^2)$, $\mathrm{Ma}^c = \varkappa_2\beta_1\triangle TL/(\beta_2\rho_0\nu^2)$ — тепловое и концентрационное числа Марангони (безразмерные параметры). Подставляя вид функций u, θ и c из (20), (16), (17) соответственно, получим, что условие на свободной границе после расщепления по степеням x распадается на равенства

$$s_1(\mathrm{Ma}^\theta - \mathrm{Ma}^c) = 0, \quad s_2(\mathrm{Ma}^\theta - \mathrm{Ma}^c) = 0,$$
$$\left(\frac{\varphi_3' y + \varphi_4'}{\varphi_1 y + \varphi_2}\right)_y - 3(\mathrm{Ma}^\theta\, s_3 - \mathrm{Ma}^c\, s_7) = 0,$$

из которых следует, что кубическая зависимость температуры и концентрации ($s_1 \neq 0$) возможна только в смесях, для которых выполнено соотношение $\varkappa_1/\beta_1 = \varkappa_2/\beta_2$. В случае общего положения для движения смеси по твердой подложке со свободной верхней границей справедлив вывод 4.

Перейдем к анализу квадратичной зависимости функций θ и c от x. В случае стационарного распределения температуры $\theta = s_2(y)x^2 + s_3(y)x + s_4(y)$ функции s_i, $i = 2, 3, 4, 7, 8$, найдены в работе авторов [8]. Там же предложены постановки краевых задач для описания установившегося течения жидкости в канале с твердыми стенками и свободной поверхностью с данной зависимостью температуры и концентрации. Отметим также, что в случае совместного двухслойного течения бинарной смеси и однородной жидкости квадратичная зависимость температуры используется в работах [11, 12] для описания термоконцентрационной конвекции с зависимостью скорости от двух пространственных координат.

Положим в (16), (17) $s_1 \equiv 0$ ($s_5 \equiv 0$). Тогда $s_2 = \varphi_5 y + \varphi_6$ с постоянными φ_5, φ_6. Как и при анализе кубической зависимости в случае общего положения ($\Psi \neq 0$, $\psi \neq -1$), можно считать $\varphi_5 = 0$, а φ_6 — заданной постоянной. Учитывая первое равенство в (19), из (15) получим уравнение на скорость

$$u_t - u_{yy} = -\int\limits_{y_0}^{y} [s_3(z,t) + s_7(z,t)]\, dz + f(t) \tag{22}$$

с произвольной функцией $f(t)$.

Замечание 1. Согласно (3) правая часть (22), взятая с обратным знаком, представляет собой градиент давления вдоль оси x. Тем самым на движение жидкости оказывают влияние только коэффициенты при первой степени x в температуре (16) и концентрации (17), а также функция $f(t)$, которую можно назвать дополнительным градиентом давления.

Замечание 2. Поскольку $s_2 = \varphi_6 = \mathrm{const}$, то уравнения на $s_3(y,t)$, $s_7(y,t)$, $u(y,t)$ образуют замкнутую систему линейных уравнений

$$\begin{gathered} s_{3t} + 2\,\mathrm{Gr}\, u\varphi_6 = \frac{1}{\mathrm{Pr}} s_{3yy}, \quad s_{7t} - 2\,\mathrm{Gr}\, u\varphi_6 = \frac{1}{\mathrm{Sc}}(s_{7yy} - \psi s_{3yy}), \\ u_t - u_{yy} = -\int\limits_{y_0}^{y} [s_3(z,t) + s_7(z,t)]\, dz + f(t). \end{gathered} \tag{23}$$

Функции $s_4(y,t)$, $s_8(y,t)$ находятся из двух параболических уравнений

$$s_{4t} + 2\,\mathrm{Gr}\, us_3 = \frac{1}{\mathrm{Pr}}(2\varphi_6 + s_{4yy}), \quad s_{8t} + \mathrm{Gr}\, us_7 = \frac{1}{\mathrm{Sc}}[s_{8yy} - \psi s_{4yy} - 2(1+\psi)\varphi_6]. \tag{24}$$

Для системы (23), (24) можно ставить различные начально-краевые задачи, описывающие те или иные движения смеси в плоском слое. Приведем одну из постановок, описывающую движение смеси в слое с твердыми неподвижными стенками $y = 0$, $y = 1$, причем на нижней стенке задана температура $\theta_1(x,t) = \varphi_6 x^2 + s_{31}(t)x + s_{41}(t)$, а верхняя теплоизолирована: $\theta_y(x,1,t) = 0$. Кроме того, на этих стенках выполняются условия прилипания и отсутствия потока вещества вида (21). Итак, имеем граничные условия

$$\begin{gathered} s_3(0,t) = s_{31}(t), \quad s_4(0,t) = s_{41}(t), \quad s_{7y}(0,t) = \psi s_{3y}(0,t), \\ s_{8y}(0,t) = \psi s_{4y}(0,t), \quad u(0,t) = 0. \\ s_{3y}(1,t) = 0, \quad s_{4y}(1,t) = 0, \quad s_{7y}(1,t) = 0, \quad s_{8y}(1,t) = 0, \quad u(1,t) = 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Краевые условия (25) необходимо дополнить начальными данными

$$s_3(y,0) = s_{30}(y), \quad s_4(y,0) = s_{40}(y), \quad s_7(y,0) = s_{70}(y), \quad s_8(y,0) = s_{80}(y) \tag{26}$$

с заданными функциями $s_{30}(y)$, $s_{40}(y)$, $s_{70}(y)$, $s_{80}(y)$, $y \in [0,1]$.

Для существования гладкого решения должны выполняться условия согласования на функции, входящие в правые части равенств (25), (26):

$$\begin{gathered} s_{31}(0) = s_{30}(0), \quad s_{41}(0) = s_{40}(0), \\ \frac{\partial s_{70}(0)}{\partial y} = \psi \frac{\partial s_{30}(0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial s_{80}(0)}{\partial y} = \psi \frac{\partial s_{40}(0)}{\partial y}, \\ \frac{\partial s_{30}(1)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial s_{40}(1)}{\partial y} = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Если функция $f(t)$ из (22) задана, то постановка рассматриваемой задачи завершена. Для неизвестной $f(t)$ нужно поставить еще одно условие на скорость $u(y,t)$. Обычно таковым является задание объемного расхода

$$\int_0^1 u(z,t)\,dz = v(t). \tag{28}$$

В этом случае задача будет *обратной*. Ее интерпретация такова: какой дополнительный градиент давления $f(t)$ нужно приложить, чтобы обеспечить заданный расход смеси $v(t)$?

Замечание 3. Задание температуры на нижней стенке в виде $\theta_1(x,t) = \varphi_6 x^2 + s_{31}(t)x + s_{41}(t)$ означает, что она имеет экстремум в точке $x_0(t) = -s_{31}(t)/2\varphi_6$ (максимум при $\varphi_6 < 0$, минимум при $\varphi_6 > 0$).

Наконец, если дополнительно к $s_1 \equiv 0$ считаем, что и $s_2 \equiv 0$ ($\varphi_6 = 0$), то распределение температуры (16) и концентрации (17) будет линейным по переменной x. Система (23), (24) упрощается, вид условий (25)–(28) остается без изменений.

Замечание 4. Необходимо отметить, что задание функций температуры и концентрации в виде (16), (17) согласуется с уравнением (13) на функцию θ, которое можно считать условием совместности исходной системы (2).

Покажем это на примере линейной зависимости функций θ_0 и θ от переменной x. Итак, если $\theta_0(x,y) = A_0(y)x + A_1(y)$, то из уравнения Пуассона (12) имеем

$$A_{0yy} = \mathrm{Pr}\,\alpha(y,0), \quad A_{1yy} = \mathrm{Pr}\,\beta(y,0).$$

Соотношение (13) дает равенство

$$A_{1yy} + A_{0yy}x - \mathrm{Gr}\left[A_0(y)\int_0^t u(y,\tau)\,d\tau\right]_{yy} = \mathrm{Pr}(\alpha x + \beta) - Q_{yy}x - Q_{1yy},$$

которое расщепляется по переменной x на два уравнения:

$$A_{0yy} = \mathrm{Pr}\,\alpha - Q_{yy}, \quad A_{1yy} - \mathrm{Gr}\left[A_0\int_0^t u(y,\tau)\,d\tau\right]_{yy} = \mathrm{Pr}\,\beta - Q_{1yy}. \tag{29}$$

Если обозначить

$$A_0(y) + \int_0^t \alpha(y,\tau)\,d\tau = s_3(y,t),$$

$$A_1(y)\int\limits_0^t \left\{\beta(y,\tau)+\mathrm{Gr}\left[\alpha(y,\tau)\int\limits_0^\tau u(y,\tau_1)\,d\tau_1-A_0(y)u(y,\tau)\right]\right\}d\tau$$

$$-\,\mathrm{Gr}\int\limits_0^t \alpha(y,\tau)\,d\tau\int\limits_0^t u(y,\tau)\,d\tau=s_4(y,t), \qquad (30)$$

тогда из первого равенства (29) получается, что $s_{3t}=s_{3yy}/\,\mathrm{Pr}$, а из второго — $s_{4t}=s_{4yy}/\,\mathrm{Pr}-\mathrm{Gr}\,us_3$. Тем самым формулы (30) показывают, что температура ищется в виде

$$\theta(x,y,t)=s_3(y,t)x+s_4(y,t).$$

Согласно представлению (11) концентрация также является линейной функцией координаты x

$$c(x,y,t)=s_7(y,t)x+s_8(y,t), \quad s_7(y,t)x=-a_y(y,t)-s_3(y,t),$$
$$s_8(y,t)=b_y(y,t)-s_4(y,t)$$

с функциями $s_i(y,t)$, $i=3,4,7,8$, из (16), (17).

3. Разрешимость системы (2) в случае $\boldsymbol{\Psi=0}$. В предыдущих разделах исследовался случай общего положения: параметр Ψ из формулы (7) считался отличным от нуля. Если положить его равным нулю, тогда физические постоянные смеси связаны соотношением $D=\chi+\beta_2D^\theta/\beta_1$ и правая часть равенства (6) обращается в нуль. Поэтому

$$\bar a_t=\frac{1}{\mathrm{Sc}}\,\bar a_{yy}, \qquad (31)$$

$$\bar b_t=\frac{1}{\mathrm{Sc}}\,\bar b_{yy}+\mathrm{Gr}\,u\bar a, \qquad (32)$$

где

$$\bar a(y,t)=a_y(y,t), \quad \bar b(y,t)=b_y(y,t). \qquad (33)$$

Уравнение (15) с учетом (33) примет вид

$$u_t=u_{yy}+\int\limits_{y_0}^{y}\bar a(z,t)\,dz+g(t) \qquad (34)$$

с некоторой функцией $g(t)$.

Если $g(t)$ известна, то уравнения (31), (34) образуют замкнутую систему для определения $\bar a(y,t)$, $u(y,t)$. После этого функция $\bar b(y,t)$, не влияющая на поле скоростей, найдется как решение уравнения (32), поле температур — из третьего уравнения системы (2), а концентрация — из равенства (4).

Возникает вопрос о постановке начальных и граничных условий для уравнений (31), (32). Пусть $\theta_0(x,y)$, $c_0(x,y)$ — начальные значения температуры и концентрации. Тогда из (4) и обозначений (33) имеем

$$\bar b(y,0)-\bar a(y,0)x=\theta_0(x,y)+c_0(x,y)\equiv q_2(y)-q_1(y)x.$$

Значит, $\bar a(y,0)=q_1(y)$, $\bar b(y,0)=q_2(y)$ и есть начальные условия.

Граничные условия зависят от интерпретации решения. Предположим, что смесь движется в плоском слое, ограниченном неподвижными стенками $y=0$ и $y=1$. На нижней стенке задан поток тепла

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}(x,0,t)=G(x,t) \qquad (35)$$

($G(x,t)$ — безразмерный поток тепла), а верхняя стенка теплоизолирована:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}(x,1,t) = 0. \tag{36}$$

Кроме того, отсутствует поток вещества через эти стенки, так что

$$\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \psi \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \Big|_{y=0,1} = 0. \tag{37}$$

Учитывая равенство (4), из (35) и первого равенства (37) выводим зависимость

$$G(x,t) = G_0(t)x + G_1(t)$$

с заданными функциями $G_0(t)$, $G_1(t)$. Вновь обращаясь к (35)–(37), выводим граничные условия

$$\bar{a}_y(0,t) = -(1+\psi)G_0(t), \quad \bar{b}_y(0,t) = -(1+\psi)G_1(t), \quad \bar{a}_y(1,t) = 0, \quad \bar{b}_y(1,t) = 0.$$

Для уравнения (34) ставятся стандартные начальное и граничное условия

$$u(y,0) = u_0(y), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Если функция $g(t)$ не задана, то задается безразмерный объемный расход по формуле (28). В этом случае задача нахождения функций $u(y,t)$, $g(t)$ будет обратной.

Заключение. Проанализированы условия совместности уравнений Обербека — Буссинеска, описывающих однонаправленное нестационарное движение бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии. Получено соотношение на функцию температуры, при выполнении которого существует решение для исходной системы. Данное соотношение предполагает, что если функция температуры представляет собой многочлен по степеням горизонтальной переменной, то она может быть полиномом степени не выше третьей. Показано, что для кубической зависимости температуры затруднительно ставить физически осмысленные граничные условия для скорости. Тем самым, такая зависимость хоть и позволяет разрешить исходные уравнения, но полученное решение, по-видимому, не имеет физической интерпретации. Для квадратичной и линейной зависимости температуры от продольной координаты выписаны уравнения для нахождения всех составляющих функций температуры, концентрации и скорости. Предложена постановка начально-краевой задачи для описания движения между двумя неподвижными твердыми стенками. Система уравнений в этой задаче разделяется на три линейных уравнения, образующих замкнутую подсистему, и два нелинейных. Следует отметить, что решение системы может быть получено методом разделения переменных. При этом ряды, составляющие решение, сходятся медленно, например, если функции $s_{3i}(t)$, $s_{4i}(t)$, $i = 0, 1$, $s_{70}(t)$, $s_{80}(t)$ имеют разрывы первого рода. Поэтому по крайней мере линейную часть задачи удобнее решать методом Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
2. *Андреев В. К.* Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения // Красноярск, 2010. 66 с. (Препринт/ИВМ СО РАН; № 1–10).
3. *Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В.* Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008.
4. *Рыжков И. И.* Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013.

5. *Гневанов Н. В., Смородин Б. Л.* Конвективная неустойчивость течения бинарной смеси в условиях вибрации и термодиффузии // Прикл. механика и техн. физика. 2006. Т. 47, № 2. С. 77–84.
6. *Рыжков И. И., Степанова И. В.* Групповые свойства и точные решения модели вибрационной конвекции бинарной смеси // Прикл. механика и техн. физика. 2011. Т. 52, № 4. С. 72–82.
7. *Андреев В. К., Собачкина Н. Л.* Движение бинарной смеси в плоских и цилиндрических областях // Красноярск: Ред.-изд. центр СФУ, 2012.
8. *Andreev V. K., Stepanova I. V.* Ostroumov—Birikh solution of convection equations with nonlinear buoyancy force // Appl. Math. Comput. 2014. V. 228. P. 59–67.
9. *Андреев В. К., Степанова И. В.* Однонаправленные течения бинарных смесей в модели Обербека — Буссинеска // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 13–24.
10. *Пухначев В. В.* Нестационарные аналоги решения Бириха // Изв. АлтГУ. Математика и механика. 2011. № 1–2(69). С. 62–69.
11. *Ефимова М. В., Дараби Н.* Термоконцентрационная конвекция в системе вязкой жидкости и бинарной смеси в плоском канале при малых числах Марангони // Прикл. механика и техн. физика. 2018. Т. 59, № 5. С. 93–103.
12. *Андреев В. К., Ефимова М. В.* Свойства решений задачи совместного медленного движения жидкости и бинарной смеси в плоском канале // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 3(75). С. 3–17.
13. *Остроумов Г. А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гостехиздат, 1952.
14. *Бирих Р. В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1966. № 3. С. 69–72.
15. *Гончарова О. Н., Резанова Е. В., Люлин Ю. В., Кабов О. А.* Изучение конвективных течений жидкости и спутного потока газа с учетом испарения // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55, № 6. С. 720–732.
16. *Bekezhanova V. B., Goncharova O. N.* Stability of the exact solutions describing the two-layer flows with evaporation at interface // Fluid Dyn. Res. 2016. V. 48, N 6. P. 061408.
17. *Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Резанова Е. В., Шефер И. А.* Устойчивость двухслойных течений жидкости с испарением на границе раздела // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 3. С. 23–35.

Поступила в редакцию 24 декабря 2018 г.
После доработки 24 декабря 2018 г.
Принята к публикации 14 марта 2019 г.

Андреев Виктор Константинович
Степанова Ирина Владимировна
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Институт математики и фундаментальной информатики СФУ
Академгородок, 50/44
660036 г. Красноярск
E-mail: andr@icm.krasn.ru; stepiv@icm.krasn.ru