Для дальнейшего нам потребуется вытекающая из хорошо известной [4] оценка коэффициентов Фурье аналитической функции

Лемма. *Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка*

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}\omega = \lambda u + U(\varphi), \tag{12}$$

где $\varphi \in C^{\nu}$, $\lambda \in R^1$; $U(\varphi)$—*комплекснозначная функция, аналитическая при* $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant \nu} |\mathrm{Im}\,\varphi_j| < \bar{\sigma}$; $\omega \in R^{\nu}$.

Предположим, что имеет место одно из трех: а) $\lambda \neq 0$; б) $\lambda = 0$, ω_j $(1 \leqslant j \leqslant \nu)$ рационально независимы, $U(\varphi)$ — тригонометрический полином с нулевым средним значением; в) $\lambda = 0$, $U(\varphi)$ имеет нулевое среднее значение, для любого $\gamma > 0$ существует $S(\gamma) > 0$, для которого

$$\left|\sum_{i=1}^{\nu} k_i\omega_i\right| \geqslant S(\gamma)\, e^{-\gamma(|k_1|+|k_2|+\ldots+|k_\nu|)}$$

при любых целых k_i $(1 \leqslant i \leqslant \nu)$, не обращающихся в 0 одновременно.

Тогда (11) имеет аналитическое при $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant \nu} |\mathrm{Im}\,\varphi_j| < \bar{\sigma}$ решение, которое в случае б) является тригонометрическим полиномом.

Используя метод неопределенных коэффициентов, лемму и теорему, получаем следующее. Предположим, что для системы (1) с постоянным линейным приближением выполняется одно из трех условий:

1) λ_i $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$ рационально независимы;

2) коэффициенты в разложении $X_0(x, \varphi)$ по степеням x_i $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$ —тригонометрические полиномы по φ, ω_j $(1 \leqslant j \leqslant \nu)$ — рационально независимы;

3) ω удовлетворяет условию в) леммы.

Тогда аналитической заменой переменных система (1) приводится в случае 1) к виду

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{\varphi} = \omega,$$

в случаях 2) и 3)—к виду, когда правая часть первого уравнения—полином по x_i $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$ с постоянными коэффициентами, содержащий только резонансные члены.

Условие в) леммы занимает промежуточное положение между условиями ω и $\bar{\omega}$ из работы А. Д. Брюно [2]. В случаях 1) и 2) полученный результат вытекает из теоремы Э. Г. Белаги [3].

Литература

1. Sternberg S.— Amer. I. Math., 1957, vol. 79, p. 809—824.
2. Брюно А. Д.— Труды ММО, 1971, т. 25, с. 119—262.
3. Белага Э. Г.— Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 2, с. 255—258.
4. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978, с. 107—109.

Ленинградский институт водного транспорта

Поступила в редакцию 7 декабря 1979 г.

УДК 517.925.31

О. П. ФИЛАТОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОЧАСТОТНЫХ СИСТЕМ ПРИ РЕЗОНАНСЕ БЕЗ СИНХРОНИЗАЦИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Рассмотрим многочастотную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \mu X(x, y, q), \quad \dot{y} = \mu Y(x, y, q), \quad \dot{q} = \omega(x) + \mu Q(x, y, q), \tag{1}$$

$0 \leqslant \mu \ll 1$, $x \in R^m$, $y \in R^n$, $q \in R^l$ $(l \geqslant 2)$; вещественные вектор-функции X, Y, и Q определены в области $D_x \times D_y \times R^l$, где $D_x \subset R^m$, $D_y \subset R^n$; $\omega_i(x) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ при $x \in D_x$; функция $X(x, y, q)$ периодическая по q с периодом 2π и может быть представлена рядом Фурье, сходящимся абсолютно в области $x \in D_x$, $y \in D_y$. Запись системы (1) учитывает, что частоты ω зависят только от части медленных переменных. Будем

исследовать систему вида (1) на устойчивость по переменным x на бесконечном интервале. Исследование стационарных резонансных решений на устойчивость без дополнительной информации о синхронизации фазовых переменных [1, 2] было предложено в работе [3]. Отметим, что этот подход основан на втором обобщенном методе Ляпунова [4,5]. В данной работе, по методу [3], исследуется система вида (1), для которой условие изолированности резонанса [3] формулируется с учетом свойств резонансных членов в правой части системы (1).

2. Будем исследовать на устойчивость точку $x = x_0$ в силу системы (1). Разложим $X(x, y, q)$ в ряд Фурье

$$X(x, y, q) = X_0(x, y) + X_1(x, y, q) + X_2(x, y, q), \tag{2}$$

$$X_1(x, y, q) = \sum_{k \in K} X_k(x, y) \exp(ikq), \quad X_2(x, y, q) = \sum_{s \bar{\in} K \cup \{0\}} X_s(x, y) \exp(isq),$$

где $i^2 = -1$, $K = \{k : k\omega(x_0) = 0, \ k \neq 0\}$. Базисные векторы множества K обозначим через $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(r)}$ $(r \leqslant l - 1)$ [2].

Определение 1. Множество K назовем r-кратным множеством, если $\forall k \in K$, $\exists i_0 \ (1 \leqslant i_0 \leqslant r)$, $\exists c_0 \in N^1 : k = c_0 k^{(i_0)}$.

Если K — r-кратное множество, то $X_1(x, y, q)$ можно представить в виде

$$X_1(x, y, q) = \sum_{m=1}^{r} \sum_{n \neq 0} X_{mn}(x, y) \exp(n\overset{(m)}{i}kq).$$

Предположим, что $x = x_0$ является стационарным, асимптотически устойчивым решением системы $\dot{x} = \mu X_0(x, y)$, где $y \in D_y$ считается параметром. Устойчивость гарантируется существованием функции Ляпунова $v = v(x)$ $(v(x_0) = 0)$ в области $B(\varepsilon_0) = \{x : \| x - x_0 \| < \varepsilon_0\}(\| x \|^2 = x_1^2 + \ldots + x_m^2)$. Обозначим $P(c) = \{x : v(x) < c^2\}$; Δ — окрестность некоторого множества, например $P(c)$, будем обозначать через $P_\Delta(c)$.

Определение 2. Частоты $s\omega(x)$ $(s \bar{\in} K \cup \{0\})$ назовем осциллирующими, если $\forall \varepsilon > 0 \ (\varepsilon < \varepsilon_0)$, $\forall \eta > 0 \ (\eta < \varepsilon)$ $\exists \gamma(\varepsilon, \eta) > 0 : | s\omega(x) | \geqslant \gamma(\varepsilon, \eta)$ при $\eta \leqslant \| x - x_0 \| \leqslant \varepsilon$.

Обозначим $S_i = \{x : k^{(i)}\omega(x) = 0\}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ резонансные поверхности системы (1).

3. Пусть в любой окрестности $B(\varepsilon)$ $(\varepsilon < \varepsilon_0)$ можно построить односвязную область $H(\varepsilon)$ типа «криволинейной трубки», содержащей точку $x = x_0$, на боковой поверхности которой определен знак проекции вектора $X_0(x, y) + X_1(x, y, q)$ на внешнюю нормаль к поверхности. Предположим для простоты, что боковая граница может быть задана уравнением $u_\varepsilon(x) = 0$, где $u_\varepsilon(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция в $\Delta(\varepsilon)$-окрестности каждой точки $x = x_1$, $u_\varepsilon(x_1) = 0$, причем $\nabla u_\varepsilon(x) \neq 0$, а область $H(\varepsilon) = \{x \in B(\varepsilon) : u_\varepsilon(x) < 0\}$. Зафиксируем $c(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $P_\Delta(c) \subset B(\varepsilon)$. С помощью области $H(\varepsilon)$ построим множество $G(\varepsilon) = P(c) \cap H(\varepsilon)$ и будем фиксировать начальные значения по переменным x для системы (1) в этой области. Предполагается, что множество $H(\varepsilon) \setminus P_\Delta(c)$ состоит из двух односвязных, не имеющих общих точек множеств. Обозначим $D = [P_\Delta(c) \cap H_\Delta(\varepsilon)] \setminus P(c)$, $D_1 = [P_\Delta(c) \cap H_\Delta(\varepsilon)] \setminus H(\varepsilon)$. Множество $D \cup D_1$ представляет кольцевую область, окружающую область начальных данных $G(\varepsilon)$.

Определение 3. Резонансные поверхности S_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ назовем изолированными в силу системы (1), если $\forall \varepsilon > 0 \ (\varepsilon < \varepsilon_0)$ можно построить области D, D_1 и указать $\delta(\varepsilon, c, \Delta) > 0$, $\sigma(\varepsilon, c, \Delta) > 0$ так, чтобы а) $| k^{(i)}\omega(x) | \geqslant \delta$ при $x \in D$; б) $\nabla u_\varepsilon(x)[X_0(x, y) + X_1(x, y, q)] \leqslant -\sigma$ при $x \in D_1$, $y \in D_y$, $q \in R^l$.

Для удобства обозначим $\varphi_1(x, y, q) = \nabla u_\varepsilon(X_0 + X_1)$, $\varphi_2(x, y, q) = \nabla u_\varepsilon X_2$.

Лемма. *Пусть а) выполнено условие б) в определении 3;*

б) частоты $s\omega(x)$ $(s \bar{\in} K \cup \{0\})$ являются осциллирующими;

в) $\varphi_2(x, y, q) \in \mathrm{Lip}\{c_1, c_2\}$, $\omega(x) \in \mathrm{Lip}\{c_3\}$ в области $x \in B(\varepsilon_0)$, $y \in D_y$, $q \in R^l$;

г) $\| X(x, y, q) \| \leqslant c_4$, $\| Y(x, y, q) \| \leqslant c_5$, $\| Q(x, y, q) \| \leqslant c_6$ в области, указанной в п. в).

Тогда $\exists \mu_{01} > 0$ такое, что любое решение системы (1) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $q = q(t)$ с начальными условиями $x(0) \in G(\varepsilon)$ удовлетворяет включению $x(t) \in P_\Delta(c) \cap H_\Delta(\varepsilon)$ при $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_{01}$ на отрезке $[0, t_c]$, если известно, что на этом отрезке $x(t) \in P_\Delta(c)$. Число μ_{01} не зависит от $t_c > 0$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \varepsilon_0)$. Построим области H, G, $P(c)$, D_1, как это сделано в п. 3. Из области G выпустим траекторию системы (1) по переменным x. Зафиксируем $t = t_1$, когда первый раз траектория $x(t)$ пересекает границу области $H : u_\varepsilon[x(t_1)] = 0$.

Обозначим $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$, $q_1 = q(t_1)$, $\eta = \min \| x - x_0 \|$ при $x \in D_1$. Из условия б) леммы следует оценка $| s\omega(x) | \geqslant \gamma(\varepsilon, \eta)$ для $x \in D_1$. Следовательно, $\exists l > 0$:

$$\left| \int_{t_1}^{t_1 + l} \varphi_2(x_1, y_1, \bar{q})\, dt \right| \leqslant \frac{\sigma}{2} l, \ \bar{q} = q_1 + \omega(x_1)(t - t_1),$$

где $\sigma > 0$ из определения 3 изолированности резонансных поверхностей в соответствии с п. а) леммы. Предположим, что $t_c \geqslant t_1 + l$. Изменение функции $u_\varepsilon(x)$ вдоль решения системы (1) с учетом (2) можно представить в виде

$$u_\varepsilon[x(t_1+l)] - u_\varepsilon(x_1) = \mu(J_1 + J_2 + J_3 + J_4),$$

$$J_1 = \int_{t_1}^{t_1+l} \varphi_1[x(t),\ y(t),\ q(t)]dt,\quad J_2 = \int_{t_1}^{t_1+l} \varphi_2(x_1,\ y_1,\ \bar{q})\,dt,$$

$$J_3 = \int_{t_1}^{t_1+l} \{\varphi_2[x_1,\ y_1,\ q(t)] - \varphi_2(x_1,\ y_1,\ \bar{q})\}\,dt,$$

$$J_4 = \int_{t_1}^{t_1+l} \{\varphi_2[x(t),\ y(t),\ q(t)] - \varphi_2[x_1,\ y_1,\ q(t)]\}\,dt.$$

Используя обычную методику оценок таких интегралов [3], в силу условий в) и г) леммы полное изменение $u_\varepsilon(x)$ на интервале $[t_1,\ t_1+l]$ можно оценить так:

$$u_\varepsilon[x(t_1+l)] - u_\varepsilon(x_1) \leqslant \mu\left[-\frac{\sigma}{2}l + 2\mu c_2 l^2(c_3c_4l + c_6) + 2\mu c_1 l(c_4 + c_5)\right].$$

Обозначим $\mu_1 = (\sigma/4)[c_2 l(c_3c_4l + c_6) + c_1(c_4 + c_5)]$. Учитывая, что $u_\varepsilon(x_1) = 0$, получим

$$u_\varepsilon[x(t_1+l)] \leqslant 0 \text{ при } \mu \leqslant \mu_1. \tag{3}$$

Потребуем, чтобы $\|x(t) - x_1\| \leqslant \Delta$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + l$. Для этого достаточно ограничить μ числом $\mu_2 = \Delta/(lc_4)$. Следовательно, решение $x(t)$ в силу (3) на интервале $[t_1,\ t_1+l]$ обязательно вернется в область H в момент $t = t^*$ $(t_1 < t^* \leqslant t_1 + l)$ при условии $\mu \leqslant \mu_{01} = \min\{\mu_1,\ \mu_2\}$. Если окажется, что $t_c < t_1 + l$, то утверждение леммы следует из выбора μ_2. Лемма доказана.

Обозначим $\psi_1(x,\ y,\ q) = \nabla v(x)\,X_1$, $\psi_2(x,\ y,\ q) = \nabla v(x)\,X_2$.

4. Теорема. *Пусть: а) резонансные поверхности S_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$ изолированы в силу системы (1) (опр. 3); б) $\nabla v(x)\,X_0(x,\ y) < 0$ при $x \in B(\varepsilon_0)\setminus\{x_0\}$, $y \in D_y$; в) частоты $s\omega(x)$ являются осциллирующими (опр. 2); г) множество резонансных векторов K — r-кратное (опр. 1); д) $\varphi_2(x,\ y,\ q) \in \operatorname{Lip}_{(x,\,y),\,q}\{c_1,\ c_2\}$, $\omega(x) \in \operatorname{Lip}\{c_3\}$ в области $x \in B(\varepsilon_0)$, $y \in D_y$, $q \in R^l$; е) $\psi_1(x,\ y,\ q) \in \operatorname{Lip}_{(x,\,y),\,q}\{c_7,\ c_8\}$, $\psi_2(x,\ y,\ q) \in \operatorname{Lip}_{(x,\,y),\,q}\{c_9,\ c_{10}\}$; ж) $\|X(x,\ y,\ q)\| \leqslant c_4$, $\|Y(x,\ y,\ q)\| \leqslant c_5$, $\|Q(x,\ y,\ q)\| \leqslant c_6$ в области, указанной в п. д). Тогда $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,\mu_0$ и область $G \subset B(\varepsilon)$ такие, что любое решение системы (1) с начальными условиями $x(0) \in G$ удовлетворяет неравенству $\|x(t) - x_0\| \leqslant \varepsilon$ при $t \geqslant 0$ и $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \varepsilon_0)$ и построим области D_1, D и $G(\varepsilon)$. Пусть $x = x(t)$ — решение системы (1) по переменным x с начальными условиями из области G. Будем предполагать, что $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_{01}$, где μ_{01} определяется леммой. Тогда решение $x = x(t)$ может покинуть область $P_\Delta(c) \cap H_\Delta(\varepsilon)$ только через множество D. Далее схема доказательства теоремы совпадает с доказательством леммы. Фиксируется момент времени $t = t_1 : v[x(t_2)] = c$. Оценивается полное изменение функции $v(x)$ вдоль решения $x = x(t)$ на отрезке $[t_1,\ t_1+l]$, где число $l > 0$ выбирается так, чтобы получить необходимую оценку интегралов типа J_2. Для оценки малых знаменателей в области D воспользуемся условиями а), в) и г). Используя условия гладкости е) и ограниченности ж), так же, как и при доказательстве леммы, получим оценку малого параметра μ_{02}. Тогда при всех $0 \leqslant \mu \leqslant \min\{\mu_{01},\ \mu_{02}\}$ решение системы (1) с начальными условиями из области G по переменным x удовлетворяет неравенству $\|x(t) - x_0\| \leqslant \varepsilon$ при $t \geqslant 0$. Теорема доказана.

5. Замечания. 1. В определении 2 можно потребовать наличия оценки $|s\omega(x)| \geqslant \gamma(\varepsilon,\ \eta)$ только для конечного числа векторов $\|s\| \leqslant s_0$, где $s_0 > 0$ зависит от «скорости» убывания членов ряда Фурье, а также от диссипативных свойств системы. 2. Если в определении 3 условие б) сформулировать при $\sigma = 0$, то с небольшими изменениями теорема будет гарантировать устойчивость по переменным x на интервале $[0,\ O(\mu^{-1})]$. 3. Исследование системы на устойчивость вида

$$\dot{x} = \mu X(x,\ y,\ z,\ q),\ \dot{y} = \mu Y(x,\ y,\ z,\ q),\ \dot{z} = Z(x,\ y,\ z,\ q),\ \dot{q} = \omega(x) + \mu Q(x,\ y,\ z,\ q), \tag{4}$$

где $z \in R^s$, функция X зависит линейно от z, а решение порождающей системы по переменным z имеет вид $\bar{z}(t) = z^\circ(t,\ x,\ y,\ z_0) + z^{(1)}(\bar{q},\ x,\ y)$, $z_0 = \bar{z}(t_0)$, $\bar{q} = \omega(x)(t - t_0) + q_0$, $\|z^\circ(t,\ x,\ y,\ q)\| \leqslant c\exp(-\gamma(t - t_0))$, $z^{(1)}(\bar{q} + 2\pi,\ x,\ y) \equiv z^{(1)}(\bar{q},\ x,\ y)$, можно свести

к исследованию системы вида (1), если положить $z = z^{(1)}(x, y, \bar{q})$ в функциях $X(x, y, z, \bar{q})$, $Y(x, y, z, \bar{q})$, $Q(x, y, z, \bar{q})$. Отметим, что гироскопические системы в [6, 7] описываются системами вида (4).

В заключение автор приносит благодарность профессору М. М. Хапаеву за полезные обсуждения и внимание к работе.

Литература

1. Черноусько Ф. Л.— ЖВМ и МФ, 1963, т. 3, № 1.
2. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.— М.: Изд-во МГУ, 1971.
3. Хапаев М. М.— Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 3.
4. Хапаев М. М.— Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 1.
5. Хапаев М. М.— Дифферинц. уравнения, 1973, т. 9, № 11.
6. Мартыненко Ю. Г., Савченко Т. А.— МТТ, 1977, № 6.
7. Савченко Т. А.— Вестник Моск. гос. ун-та, сер. мат., мех., 1978, № 2.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 5 марта 1980 г.

Технический редактор Т. В. Летьен

Сдано в набор 15.12.82. Подписано в печать 25.02.83. АТ 06513. Формат 70×108 1/16. Высокая печать. Печ. л. 11,5. Усл. печ. л. 16,10. Усл. кр.-отт. 16,62. Уч.-изд. л. 16,0. Тираж 1289 экз. Зак. № 2384.

Издательство «Наука и техника» Академии наук БССР и Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220600. Минск, Ленинский проспект, 68. Типография им. Франциска (Георгия) Скорины издательства «Наука и техника». 220600. Минск, Ленинский проспект, 68.