S. G. Leiko, Rotary diffeomorphisms on Euclidean spaces,
Mat. Zametki, 1990, Volume 47, Issue 3, 52–57

Математические заметки

том 47 выпуск 3 март 1990

ПОВОРОТНЫЕ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

С. Г. Лейко

Изучены поворотные диффеоморфизмы [1] на поверхностях евклидова пространства E_3, которые характеризуются тем, что переводят геодезические кривые в изопериметрические экстремали поворота (вдоль последних геодезическая кривизна пропорциональна гауссовой). Для этих диффеоморфизмов выведены основные уравнения. Локально (с точностью до геодезического диффеоморфизма) представлены метрики поверхностей, допускающих поворотные диффеоморфизмы. Указан геометрический способ их реализации на поверхностях вращения.

1. Рассмотрим двумерное риманово пространство V_2 с метрическим тензором g. Пусть $g_{ij}(x^1, x^2)$ $(i, j, \ldots = 1, 2)$ — компоненты g в некоторой локальной карте. Для кривой γ: $(t_0, t_1) \to V_2$ с параметрическими уравнениями $x^h = x^h(t)$ построим векторы $\xi^h = \mathrm{d}x^h/\mathrm{d}t$, $\xi_1^h = \nabla_t \xi^h$, $\xi_2^h = \nabla_t \xi_1^h$. Здесь ∇_t — оператор ковариантного дифференцирования вдоль γ относительно метрической связности. Обозначим

$$s[\gamma] = \int \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}\, \mathrm{d}t, \qquad \theta[\gamma] = \int k(s)\, ds$$

— функционалы длины и поворота кривой; k — кривизна Френе, s — длина дуги. Если $V_2 \subset E_3$, то k — геодезическая кривизна кривой.

Определение 1. Кривые, которые являются решением вариационной изопериметрической задачи extrem $\theta[\gamma]$, $s[\gamma] = \mathrm{const}$ с закрепленными концами, будем называть изопериметрическими экстремалями поворота.

В работах [1—4] показано, что в двумерном (не плоском) пространстве кривая является изопериметрической экстремалью поворота, только если вдоль нее кривизна Френе k и гауссова кривизна K пропорциональны: $k = cK$, $c = \mathrm{const}$. Если на экстремали взять канонический параметр $t = as + b$, a, b — const, то последнее условие эквивалентно можно представить в виде

$$\xi_2^h = -\frac{\langle \xi_1, \xi_1 \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle} \xi^h + \frac{K_i \xi^i}{K} \xi_1^h, \tag{1}$$

$$\langle \xi, \xi_1 \rangle = 0, \quad \text{где } K_i = \partial_i K,\ K \neq 0. \tag{2}$$

Геодезические кривые условимся называть тривиальными экстремалями поворота, вдоль них $\theta = 0$, $\xi_1^h(t) = 0$. Отметим, что нетривиальные изопериметрические экстремали поворота являются «прямейшими» среди допустимых кривых (класса C^4, не имеющих точек распрямления), в то время как тривиальные экстремали — геодезические — являются «кратчайшими».

2. Возьмем два римановых пространства $\overline{V}_2$, V_2 и установим некоторый диффеоморфизм ρ: $\overline{V}_2 \to V_2$.

Определение 2. Диффеоморфизм ρ называем поворотным, если вследствие его каждая геодезическая кривая $\overline{\gamma}$ из $\overline{V}_2$ становится изопериметрической экстремалью поворота в пространстве V_2.

Пусть $\overline{\nabla}$, ∇ — метрические связности на $\overline{V}_2$, V_2 и $\overline{\Gamma}_{ij}^h$, Γ_{ij}^h — соответствующие кристоффели, построенные из метрических тензоров $\overline{g}_{ij}$, g_{ij} в данной локальной карте. Обозначим через

$$P_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \overline{\Gamma}_{ij}^h \tag{3}$$

— тензор аффинной деформации, порожденной диффеоморфизмом ρ.

Возьмем на $\overline{V}_2$ геодезическую $\overline{\gamma}$, отнесенную к произвольному параметру t. Тогда вдоль нее $\overline{\xi}_1^h = \overline{\nabla}_t \xi^h = \varphi(t)\, \xi^h$, а вследствие (3)

$$\xi_1^h = \nabla_t \xi^h = \overline{\xi}_1^h + P_{ij}^h \xi^i \xi^j = \varphi \xi^h + P_{ij}^h \xi^i \xi^j. \tag{4}$$

В соответствии с определением 2 требуем, чтобы кривая $\gamma = \rho \circ \overline{\gamma}$ была в пространстве V_2 изопериметрической экстремалью поворота. Следовательно, вдоль γ должны выполняться (1) и (2). Из (2), (4) вытекает

$$\begin{gathered} \varphi \langle \xi, \xi \rangle + g_{hk} P_{ij}^h \xi^i \xi^j \xi^k = 0, \\ \varphi = -\langle \xi, P \rangle / \langle \xi, \xi \rangle, \qquad P^h \equiv P_{ij}^h \xi^i \xi^j, \end{gathered} \tag{5}$$

т. е. $\varphi(x, \xi)$ — функция точек области касательного расслоения.

После дифференцирования (4) вдоль кривой γ и подстановки соответствующих величин в (1) получим $\langle \xi, \xi \rangle (P_1^h \langle \xi, \xi \rangle - \langle \xi, P_1 \rangle \xi^h) = (3 \langle \xi, P \rangle + \langle \xi, \xi \rangle K_i \xi^i / K)(\langle \xi, P \rangle \xi^h - \langle \xi, \xi \rangle P^h)$, $P_1^h \equiv (\nabla_k P_{ij}^h + 2 P_{ia}^h P_{jk}^a)\, \xi^i \xi^j \xi^k$. Рассмотрим полученные формы в изотермической системе координат $x^{i'}$. Тогда после сравнения соответствующих коэффициентов форм, в частности, обнаруживаем, что $P_{1'1'}^{1'} = P_{2'2'}^{1'} + 2P_{1'2'}^{2'}$, $P_{2'2'}^{2'} = P_{1'1'}^{2'} + 2P_{1'2'}^{1'}$. Учитывая эти соотношения в выражении для функции $\varphi(x, \xi)$, получаем, что форма $\langle \xi, P \rangle$ делится на $\langle \xi, \xi \rangle$ и, таким образом, φ является линейной формой относительно переменных $\xi^{i'}$: $\varphi = \varphi_{i'} \xi^{i'}$. Здесь $\varphi_{i'}(x)$ — некоторый ковектор.

Возвращаясь в исходную систему координат, после симметризации (5) имеем

$$\varphi_{(i} g_{jk)} + g_{h(k} P_{ij)}^h = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим (6) как систему линейных уравнений относительно неизвестных P_{ij}^h. Ее частное решение можно взять в виде

$$P_{ij}^h = -\varphi^h g_{ij}, \varphi^h = g^{hi}\varphi_i. \tag{7}$$

Найдем затем общее решение соответствующей однородной системы:

$$g_{h(k}P_{ij)}^h = 0. \tag{8}$$

В изотермических координатах $x^{i'}$ из (8) вытекает, что

$$\begin{aligned} &P_{1'1'}^{1'} = P_{2'2'}^{2'} = 0, \\ &2P_{1'2'}^{1'} + P_{1'1'}^{2'} = 2P_{1'2'}^{2'} + P_{2'2'}^{1'} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим $P_{1'2'}^{2'} = \lambda_{1'}$, $P_{1'2'}^{1'} = \lambda_{2'}$ и перейдем от изотермических координат $x^{i'}$ к исходным x^i. Используя (9) и тензорный закон преобразования величин P_{ij}^h, для них получим

$$P_{ij}^h = \lambda_i \delta_j^h + \lambda_j \delta_i^h - 2g_{ij}\lambda^h, \tag{10}$$

где $\lambda_i = \lambda_{i'} A_i^{i'}$, $\lambda^h = g^{hi}\lambda_i$, $A_i^{i'} = \partial x^{i'}/\partial x^i$. Таким образом, величины λ_i представляют компоненты ковектора.

Складывая (7) и (10), получаем общее решение уравнений (6) в виде

$$P_{ij}^h = \lambda_i \delta_j^h + \lambda_j \delta_i^h + \psi^h g_{ij}, \tag{11}$$

где $\psi^h = -\varphi^h - 2\lambda^h$. Вследствие (11) из (4) имеем

$$\xi_1^h = -\psi_i \xi^i \xi^h + \psi^h \langle \xi, \xi \rangle, \tag{12}$$

$$\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = \Delta_1 \psi \langle \xi, \xi \rangle^2 - (\psi_i \xi^i)^2 \langle \xi, \xi \rangle, \tag{13}$$

где $\Delta_1\psi = \psi_i \psi^i$. Дифференцированием (12) вдоль γ получим, учитывая (2),

$$\begin{aligned} \xi_2^h = \xi^h (-\nabla_j \psi_i \xi^i \xi^j + 2(\psi_i \xi^i)^2 - \Delta_1 \psi \langle \xi, \xi \rangle) - \\ - \psi_j \xi^j \langle \xi, \xi \rangle \psi^h + \nabla_i \psi^h \langle \xi, \xi \rangle. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя необходимые величины (12), (13), (14) в первую группу дифференциальных уравнений экстремалей (1), получаем

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi \rangle (\nabla_i \psi^h \xi^i - \psi^h \psi_i \xi^i - \psi^h K_i \xi^i / K) = \\ = \xi^h (\nabla_j \psi_i \xi^i \xi^j - \psi_i \psi_j \xi^i \xi^j - \psi_i \xi^i K_j \xi^j / K). \end{aligned}$$

Эти равенства должны иметь тождественный характер относительно точек (x, ξ) области касательного расслоения, что возможно, только если

$$\nabla_j \psi_i = \psi_i (\psi_j + K_j/K) + \nu g_{ij}, \tag{15}$$

где ν — некоторый инвариант. Его значение можно уточнить, если рассмотреть условия интегрируемости

$$\nabla_{[kj]} \psi_i = \psi_a R_{ijk}^a = K(\psi_j g_{ik} - \psi_k g_{ij}).$$

Используя при этом (15), находим

$$\nu_i = \nu K_i/K + (\nu - K)\psi_i, \qquad \nu_i = \partial_i \nu,$$

что можно ψ_i представить

$$\psi_i = \partial_i \ln |(\nu - K)/K|. \tag{16}$$

Отсюда вытекает, что ковектор ψ_i является градиентным, т. е. существует инвариант ψ такой, что $\psi_i = \partial_i \psi$. Вследствие этого после интегрирования (16) получаем

$$\nu = K(Ae^{\psi} + 1), \qquad A = \text{const}.$$

Тем самым (15) принимает вид

$$\nabla_j \psi_i = \psi_i (\psi_j + K_j/K) + K(Ae^{\psi} + 1) g_{ij}. \tag{17}$$

Из формулы Фосса — Вейля $\frac{1}{2}\partial_i \ln g = \Gamma^k_{ik}$, $g = \det(g_{ij})$ вследствие (11) имеем $\frac{1}{2}\partial_i \ln \frac{g}{\bar g} = 2\lambda_i + \psi_i = -\varphi_i$, $g = \det(g_{ij})$. Таким образом, ковекторы λ_i и φ_i также должны быть градиентными. Получена

ТЕОРЕМА 1. *Диффеоморфизм $\rho: \bar V_2 \to V_2$ на двумерных римановых пространствах является поворотным тогда и только тогда, когда существуют два инварианта λ, ψ таких, что для них выполняются* (11) *и* (17).

Равенства (11) и (17) представляют тем самым основные уравнения поворотного диффеоморфизма для двумерных римановых пространств. Получим из них два следствия.

Следствие 1. *Если $\rho: \bar V_2 \to V_2$ — поворотный диффеоморфизм на поверхностях евклидова пространства E_3, то поверхность V_2 локально изометрична поверхности вращения.*

Доказательство вытекает из результатов работы [5], где было, в частности, обнаружено, что на римановых пространствах V_2, в которых существует градиентный конциркулярный вектор (т. е. вектор ψ_i, удовлетворяющий уравнению вида $\nabla_j \psi_i = \psi_i \beta_j + \alpha g_{ij}$, где β_j — градиент, α — инвариант), основная квадратичная форма может быть приведена к виду $ds^2 = du^{1^2} + F(u^1)\, du^{2^2}$. В нашем случае $\beta_j = \partial_j (\psi + \ln |K|)$.

Следствие 2. *Всякий поворотный диффеоморфизм $\rho: \bar V_2 \to V_2$ на двумерных римановых пространствах является композицией $\rho = \rho_k \circ \rho_r$ геодезического ρ_r и специального конформного ρ_k диффеоморфизмов.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим промежуточное пространство $\tilde V_2$ с метрикой $\tilde g_{ij} = e^{2\psi} g_{ij}$, которое будет находиться в конформном соответствии $\rho_k: \tilde V_2 \to V_2$ с пространством V_2. Следовательно [6, с. 607],

$$\Gamma^h_{ij} - \tilde\Gamma^h_{ij} = -\psi_i \delta^h_j - \psi_j \delta^h_i + \psi^h g_{ij}, \tag{18}$$

где $\widetilde{\Gamma}_{ij}^h$ — кристоффели метрики $\tilde{g}_{ij}$. Учитывая в основных уравнениях (11) равенство (18), получаем

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^h = \overline{\Gamma}_{ij}^h + \varphi_i\delta_j^h + \varphi_j\delta_i^h, \tag{19}$$

что и доказывает следствие 2.

Таким образом, всякий поворотный диффеоморфизм на двумерных римановых пространствах является в своей существенной (нетривиальной) части поворотно-конформным. Поскольку в силу конформности соответствия ρ_k: $\tilde{V}_2 \to V_2$ в пространстве $\tilde{V}_2$ будут выполняться уравнения

$$\tilde{\nabla}_j\psi_i = -\psi_i\psi_j + \psi_i K_j/K + e^{-2\psi}K(Ae^{\psi} - \Delta_1\psi)\, g_{ij},$$

то на основании тех же результатов [5] заключаем, что поверхности $\tilde{V}_2 \subset E_3$ также локально изометричны поверхностям вращения. В итоге получаем, что поворотно-конформные диффеоморфизмы в евклидовом пространстве E_3 реализуются только на поверхностях, локально изометричных поверхностям вращения.

Рассмотрим в этой связи поверхность вращения V_2, имеющую в ортонормированной системе $Oxyz$ пространства E_3 параметрические уравнения $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $z = f(r)$, где r — радиус, α — угол вращения, функция $f(r)$ представляет меридиан. Тогда $(g_{ij}) = \operatorname{diag}(1 + f'^2, r^2)$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = 1/r$, $\Gamma_{11}^1 = f'f''/(1 + f'^2)$, $\Gamma_{22}^1 = -r/(1 + f'^2)$, $K = f'f''/(r(1 + f'^2)^2)$. Подставив эти величины в дифференциальные уравнения (17), на опорную функцию $\psi(r)$ ковектора ψ_i получим единственное уравнение $\psi' = f'f''(Ae^{\psi} + 1)/(1 + f'^2)$ (одно из них является тождеством, а другое следует из записанного). Заменой $u = e^{\psi}$ последнее сводится к уравнению Бернулли. После его интегрирования получаем

$$e^{\psi} = -\sqrt{1 + f'^2}/(B + \sqrt{1 + f'^2})\,A, \quad A \neq 0,\ B - \text{const}, \tag{20}$$

$$e^{\psi} = B\sqrt{1 + f'^2}, \quad A = 0,\ B - \text{const}. \tag{21}$$

На основании (20), (21) и следствия 2 получена

ТЕОРЕМА 2. *Все поверхности* $\sim V_2$ *евклидова пространства* E_3, *допускающие поворотно-конформные диффеоморфизмы, имеют в специальной системе координат* r, α *метрику одного из двух видов*:

$$(\tilde{g}_{ij}) = \frac{1 + f'^2}{A^2(B + \sqrt{1 + f'^2})^2}\operatorname{diag}(1 + f'^2(r), r^2),$$

$$(\tilde{g}_{ij}) = B^2(1 + f'^2(r))\operatorname{diag}(1 + f'^2(r), r^2),$$

$$A \neq 0,\quad B - \text{const}.$$

Поворотно-конформные диффеоморфизмы по своим деформационным свойствам можно рассматривать как естественное и широкое обобщение классической стереографической проекции на произвольные поверхности вращения (как известно, при стереографической проекции плоскости на сферу «кратчайшие» переходят в «прямейшие» и соответствие конформно). Подобным образом расположим в ортонормированной системе $Oxyz$ две поверхности вращения $\tilde{V}_2$, V_2, считая, что ось Oz — их общая ось вращения. Введем соответствие ρ_k: $\tilde{V}_2 \to V_2$, полагая, что общие локальные координаты r, α заданы по правилу $\tilde{x} = R(r)\cos(\alpha + \alpha_0)$, $\tilde{y} = R(r)\sin(\alpha + \alpha_0)$, $\tilde{z} = F(R(r))$, $\alpha_0 = \mathrm{const}$, т. е. точка $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ переходит в точку $M(x, y, z)$. Другими словами, чтобы найти прообраз точки M, нужно ее сдвинуть с меридиана $f(r)$ на меридиан $F(R(r))$ и повернуть на угол α_0. Функции $R(r)$, $F(R)$ подбираем так, чтобы соответствие было поворотно-конформным. Введенный таким образом диффеоморфизм будем называть каноническим поворотно-конформным диффеоморфизмом. Поскольку

$$d\tilde{s}^2 = (dR/dr)^2[1 + (dF/dR)^2]\,dr^2 + R^2 d\alpha^2,$$

то в силу конформности соответствия ρ_k получаем

$$\tilde{g}_{ij} = e^{2\psi} g_{ij}, \quad R = e^{\psi} r,$$

$$(dR/dr)^2[1 + (dF/dR)^2] = [1 + f'^2(r)]\,e^{2\psi}.$$

Отсюда находим

$$F(R(r)) = \pm\int e^{\psi}\sqrt{1 + f'^2 - (\psi' r + 1)^2}\,dr$$

— закон деформирования меридиана $f(r)$ поверхности V_2 в меридиан $F(R)$ поверхности $\tilde{V}_2$ при каноническом поворотно-конформном диффеоморфизме. При этом функция e^{ψ} определена через (20) или (21). Отметим, что классическая стереографическая проекция выделяется из канонических поворотно-конформных диффеоморфизмов в случае, когда $f = 1 + \sqrt{1 - r^2}$, $A = 1/2$, $B = -1$, $\alpha_0 = 0$.

Одесский государственный
университет

Поступило
21.07.86
Переработанный вариант
23.03.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Лейко С. Г. Поворотные отображения римановых пространств и их приложения // Оптимальное управление. Геометрия и анализ. Всесоюзная школа. Кемерово, 1986.
[2] Лейко С. Г. Теорема существования экстремалей поворота на поверхностях в E_3 и поворотные диффеоморфизмы // Оптимальное управление. Геометрия и анализ. Всесоюзная школа. Кемерово, 1988.
[3] Лейко С. Г. Законы сохранения для спин-траекторий, порожденных изопериметрическими экстремалями поворота // Гравитация и теория относительности. Вып. 26. Казань, 1988. С. 117—124.
[4] Лейко С. Г. Поворотные преобразования поверхностей // Укр. геометрический сборник. 1990. Вып. 34.
[5] Fialkow A. Conformals geodesics // Trans. Amer. Math. Soc. 1939. V. 45. P. 443—473.
[6] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.