



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. E. Skurikhin, A. G. Sukhonos, Cohomologies and dimensions of Chu spaces,  
*Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2005, Volume 6, Number 1, 14–22

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.82

December 13, 2024, 21:10:50



УДК 512.667.5, 512.737  
 MSC2000 18F10, 18F20

© Е.Е. Скурихин, А.Г. Сухонос\*

## Когомологии и размерность пространств Чу

На пространствах Чу задаются топологии Гротендика и на этой основе определяются их размерности, пучковые когомологии и когомологические размерности. Устанавливаются взаимосвязи между различными размерностями.

Ключевые слова: *пространства Чу, топология Гротендика, пучковые когомологии, размерность,*

### Введение

Категорию пространств Чу ввел (под другим названием) в своей магистерской диссертации Po-Hsiang Chu. Она была опубликована в 1979 г. в качестве приложения к работе [1], а название “пространство Чу” для введенных в ней объектов предложено в 1993 г. Барром. Пространства Чу оказались связанными со многими важными объектами и понятиями, в том числе и в компьютерной науке. Активно изучались и изучаются общие свойства пространств Чу [2–5].

В данной работе с пространствами Чу ассоциируются топологии Гротендика и на этой основе определяются их размерности, пучковые когомологии и когомологические размерности. Устанавливаются взаимосвязи между различными размерностями. В частности, дается когомологическая характеристика размерности для пространств Чу, принадлежащих некоторому классу, включающему пространства произвольной размерности.

### 1. Размерность пространств Чу.

Тройка  $(A, r, X)$ , где  $r : A \times X \rightarrow \Sigma$  и  $\Sigma$  содержит больше одного элемента, называется *пространством Чу над алфавитом  $\Sigma$*  (или просто *пространством Чу*). В данной работе рассматриваются пространства Чу над алфавитом  $\Sigma$  из двух элементов  $\Sigma = \{0, 1\}$ ; мы будем писать  $\Sigma = 2$ . Каждому пространству Чу  $(A, r, X)$  сопоставляется пара  $F(A, r, X) = (P, 2^X)$ , а именно  $B \in P$  тогда и только тогда, когда существует  $a \in A$  такой, что  $B = \{x \in X \mid r(a, x) \neq 0\}$ . Такие пары тесно связаны с соответствующими пространствами Чу; в частности,  $F$  продолжается до функтора из категории пространств Чу в категорию пар, который во многих важных случаях является полным и строгим, или даже эквивалентностью категорий [4–6]. Пространство Чу  $(X, r^\perp, A)$  называется *дуальным* к  $(A, r, X)$ , если  $r^\perp(x, a) = r(a, x)$ .

Если  $F(A, r, X) = (P, 2^X)$ , то при некоторых ограничениях на пространство Чу можно положить  $F(X, r^\perp, A) = (Q, 2^P)$ , где  $q = \{q_x \in 2^P \mid x \in X\}$  и  $q_x(p) = p(x)$  для любого  $p \in P$ . Пару  $(Q, 2^P)$  будем называть *дуальной* к  $(P, 2^X)$  и обозначать  $(Q, 2^P) = (P, 2^X)^\perp$ .

\* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения Российской Академии наук, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: eesku@iam.dvo.ru

В дальнейшем мы будем отождествлять  $2^X$  с множеством подмножеств  $X$ , сопоставляя каждому отображению из  $X$  в  $\{0, 1\}$  множество точек, в которых оно принимает значение, отличное от нуля.

Будем предполагать также, чтобы не вдаваться в теоретико-множественные тонкости, что мощности всех элементов  $P$  конечны и ограничены сверху.

Введем понятие размерности пространства Чу, используя общее определение размерности элемента частично упорядоченного множества, снабженного топологией Гротендика [7, 8]. Напомним определение топологии Гротендика [9].

Пусть  $K$  — нижняя полурешетка. Говорят, что на  $K$  задана *топология Гротендика*, если для любого  $a \in K$  зафиксирован класс  $\tau(a)$  семейств вида  $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\}$  таких, что выполнены 4 условия:

$$\tau 1) \{a\} \in \tau(a);$$

$$\tau 2) \text{ если } \alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a) \text{ и } b \leq a, \text{ то } \alpha \wedge b = \{a_i \wedge b \in K | i \in I\} \in \tau(b);$$

$$\tau 3) \text{ если } \alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a) \text{ и } \alpha_i = \{a_{ij} \in K | j \in J\} \in \tau(a_i) \text{ (} i \in I \text{), то}$$

$$\beta = \{a_{ij} \in K | i \in I, j \in J\} \in \tau(a);$$

$$\tau 4) \text{ если } \beta = \{b_j \leq a | j \in J\} \text{ и существует } \alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a) \text{ такое, что } \alpha \prec \beta, \text{ то}$$

$$\beta \in \tau(a).$$

Для изучения пространства Чу  $(A, r, X)$  введем топологию Гротендика  $\tau$  на частично упорядоченном множестве  $2^X$ , где порядок — это включение подмножеств, следующим образом. Пусть  $(P, 2^X)$  — пара (т. е.  $P \subset 2^X$ ),  $a \in 2^X$ . Определим класс  $\tau(a)$ , полагая  $\alpha = \{a_i \in 2^X | i \in I\} \in \tau(a)$  в том и только том случае, когда

$$\bigcup_{i \in I} a_i = a; \tag{1}$$

$$P_a \prec \alpha, \tag{2}$$

где  $P_a = \{p \in P | p \subseteq a\}$ , т. е. для любого  $p \in P$  такого, что  $p \subseteq a$  существует  $i \in I$  такой, что  $p \subseteq a_i$ .

Нетрудно видеть, что это топология Гротендика. Она определяется множеством  $P \subset 2^X$ , и поэтому будем называть ее *P-топологией*.

**Лемма 1.1.** *Класс  $\{\tau(a) | a \in 2^X\}$  является топологией Гротендика на  $2^X$ .*

*Доказательство.* Аксиомы  $\tau 1)$  и  $\tau 4)$  очевидно выполняются.

$\tau 2)$  Пусть  $\alpha = \{a_i \in 2^X | i \in I\} \in \tau(a)$  и  $b \subseteq a$ . Надо показать, что  $\beta = \{a_i \cap b | i \in I\} \in \tau(b)$ . Так как  $\bigcup_{i \in I} (a_i \cap b) = (\bigcup_{i \in I} a_i) \cap b = a \cap b = b$ , то условие (1) выполняется. Если  $p \subseteq b$ , то  $p \subseteq a$ .

Значит, существует  $i \in I$  такой, что  $p \subseteq a_i$ , откуда  $p \subseteq a_i \cap b$ . Проверено условие (2).

$\tau 3)$  Пусть  $\alpha = \{a_i \in 2^X | i \in I\} \in \tau(a)$ ,  $\alpha_i = \{a_{ij} \in 2^X | j \in J_i\} \in \tau(a_i)$ ,  $\gamma = \{a_{ij} | i \in I, j \in J_i\}$ . Если  $p \subseteq a$ , то поскольку  $\alpha \in \tau(a)$ , значит, существует  $i \in I$  такое, что  $p \subseteq a_i$ , а так как  $\alpha_i \in \tau(a_i)$ , то существует  $j \in J_i$  такое, что  $p \subseteq a_{ij}$ . Равенство  $\bigcup_{i \in I, j \in J} a_{ij} = a$  очевидно, поэтому  $\gamma \in \tau(a)$ .

Данная топология Гротендика определяется множеством  $P \subset 2^X$ , и поэтому будем называть ее *P-топологией*.

Пусть  $(P, 2^X)$  — пара и  $a \in 2^X$ . Через  $P_a^\#$  будем обозначать множество *всех максимальных по включению подмножеств*  $P_a$ . Через  $\beta_a$  будем обозначать семейство  $\beta_a = P_a^\# \cup \{\{x\} | x \in a, \{x\} \notin P_a\}$ .

**Лемма 1.2.** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара,  $\tau$  —  $P$ -топология Гротендика на  $2^X$ ,  $a \in 2^X$ . Тогда  $\beta_a \in \tau(a)$  и покрытие  $\beta_a$  вписано в любое покрытие  $\alpha \in \tau(a)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\alpha = \{a_i \in 2^X \mid i \in I\} \in \tau(a)$ ,  $\beta_a = \{b_j \mid j \in J\}$ . Если  $b_j \in P_a^\#$ , то  $b_j \in P_a$  и, значит, по условию существует  $i \in I$  такое, что  $b_j \subseteq a_i$ . Если  $b_j \notin P_a^\#$ , то  $b_j = \{x\}$ ,  $x \in a$ . Тогда существует  $i \in I$  такой, что  $x \in a_i$ . Таким образом,  $\beta_a \prec \alpha$ .

Покажем, что  $\beta_a \in \tau(a)$ . По построению  $\bigcup_{j \in J} b_j = a$ . Пусть  $p \in P_a$ . Тогда существует  $q \in P_a^\#$  такое, что  $p \subseteq q$ , и так как  $q = b_j$  для некоторого  $j \in J$ , то  $p \subseteq b_j$ .

Пусть  $K$  — нижняя полурешетка с нулем,  $\tau$  — топология Гротендика на  $K$ . *Кратностью* кра семейства  $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\}$  называется минимальное целое число  $n$  такое, что если мощность множества  $\sigma \subseteq I$  больше  $n$ , то  $\bigcap \{a_i \mid i \in \sigma\} = 0$ . Число  $n$  называется  $\tau$ -размерностью  $a$  [7–8], если в каждое  $\tau$ -покрытие можно вписать  $\tau$ -покрытие  $a$  кратности  $\leq n + 1$ , и имеется  $\tau$ -покрытие  $a$  кратности  $n + 1$ , в которое нельзя вписать  $\tau$ -покрытие  $a$  меньшей кратности.

**Определение 1.1.** Если  $(P, 2^X)$  — пара,  $\tau$  —  $P$ -топология Гротендика на  $2^X$ ,  $a \in 2^X$ , то  $\tau$ -размерность элемента  $a$  будем обозначать через  $\tau Dim a$ . Число  $\tau Dim X$  называется  $\tau$ -размерностью пары  $(P, 2^X)$ .

Пусть  $\alpha = \{a_i \in 2^X \mid i \in I\} \in \tau(a)$ . *Кратностью*  $кр_x \alpha$  семейства  $\alpha$  в точке  $x \in X$  назовем мощность множества  $\{i \in I \mid x \in a_i\}$ . Ясно, что если кратность  $\alpha$  конечна, то она совпадает с максимумом кратностей  $кр_x \alpha$  по всем точкам  $x \in X$ .

**Теорема 1.1.** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара,  $\tau$  —  $P$ -топология Гротендика на  $2^X$ ,  $a \in 2^X$  и  $P_a \neq \emptyset$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $\tau Dim a = n$ ;
- 2)  $кр \beta_a = n + 1$ ;
- 3)  $кр P_a^\# = n + 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**  $2 \Leftrightarrow 1$ . Пусть  $кр \beta_a = n + 1$ . Так как для любого  $\alpha \in \tau(a)$   $\beta_a \prec \alpha$ , то  $\tau Dim a \leq n$ . Поэтому для равенства  $\tau Dim a = n$  достаточно доказать, что в  $\beta_a$  нельзя вписать покрытие кратности меньшей, чем  $n + 1$ . Для этого убедимся, что для любого  $\alpha \in \tau(a)$  выполняется  $кр_x \alpha \geq кр_x \beta_a$ . Заметим, что если  $x \in a$ , то все элементы  $P_a^\#$ , содержащие точку  $x$ , принадлежат покрытию  $\alpha$ . В самом деле, если  $x \in b \in P_a^\#$ , то, так как  $\beta_a \prec \alpha$ , то существует  $c \in \alpha$  такое, что  $b \subseteq c$ , и так как  $\alpha \prec \beta$ , то существует  $p \in P_a^\#$  такое, что  $c \subseteq p$ , т. е.  $b \in P$ , где  $b, p \in P_a^\#$ , откуда  $b = p$  и  $c = b$ . Таким образом, в такой точке  $x \in X$ ,  $кр_x \alpha \geq кр_x \beta_a$ . Если же  $x$  не содержится ни в каком  $p \in P_a^\#$ , то  $кр_x \beta_a = 1$  и тем более  $кр_x \alpha \leq кр_x \beta_a$ .

$2 \Leftrightarrow 3$ . Если точка  $x \in a$  принадлежит хотя бы одному  $b \in P_a$ , то ясно, что  $кр_x \beta_a = кр_x \bar{P}_a$ , откуда и следует доказательство.

Заметим, что пункт 3 в теореме 1.1 эквивалентен следующим двум условиям:

$$\forall p_0, \dots, p_{n+1} \text{ попарно различных из } P_a^\#, p_0 \cap \dots \cap p_{n+1} = \emptyset; \quad (3)$$

$$\exists p_0, \dots, p_n \text{ попарно различных из } P_a^\# \text{ такие, что } p_0 \cap \dots \cap p_n \neq \emptyset. \quad (4)$$

Отметим случаи, в которых размерность  $\tau Dim$  монотонна.

**Лемма 1.3.** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара,  $\tau$  —  $P$ -топология Гротендика на  $2^X$ .

- 1) Если  $a \in P$ , то  $\tau Dim a = 0$ .
- 2) Если  $P$  такое, что вместе с любым элементом содержит все его подмножества, то для любых  $a \subseteq b$ ,  $\tau Dim a \leq \tau Dim b$ .

Пусть  $(P, 2^X)$  — пара. Введем обозначения:

$$q_x = \{p \in P \mid x \in p\}, \quad \bar{P} = \{p \setminus \{x\} \mid p \in P^\#, x \in X\} \cup P^\#.$$

**Определение 1.2.** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара,  $(\bar{P}, 2^X)^\perp = (Q, 2^{\bar{P}})$  и  $\bar{\tau}$  —  $Q$ -топология Гротендика на  $2^{\bar{P}}$ . Тогда число  $\bar{\tau}Dim \bar{P}$  будем называть *дуальной размерностью*  $X$  и обозначать  $\tau Dim^\perp X$ .

**Лемма 1.4.** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара такая, что  $\bar{P} \subset P$  и  $(P, 2^X)^\perp = (Q, 2^{\bar{P}})$ . Тогда

1)  $Q \setminus \{\emptyset\} = Q^\#$ ;

2) из условия  $q_{x_0} \cap \dots \cap q_{x_n} = \{p\}$  следует  $q_{x_0} \cap \dots \cap q_{x_{n-1}} \neq \{p\}$  для любого  $p \in P^\#$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** 1) Предположим, что существуют  $x', x'' \in X$  такие, что  $q_{x'} \subseteq q_{x''}$  и  $q_{x'} \neq q_{x''}$ . Тогда  $x' \neq x''$ . Пусть  $p \in q_{x'}$ . Так как существует  $p^* \in P^\#$  такой, что  $p \subseteq p^*$  и  $\bar{P} \subset P$ , то  $p' = p^* \setminus \{x''\}$  принадлежит  $P$ . Так как  $x' \in p'$  и  $x'' \notin p'$ , то  $p' \in q_{x'}$  и  $p' \notin q_{x''}$ . Это противоречит включению  $q_{x'} \subseteq q_{x''}$ . Таким образом,  $Q \setminus \{\emptyset\} = Q^\#$ .

2) Пусть  $p \in P^\#$  такое, что  $q_{x_0} \cap \dots \cap q_{x_n} = \{p\}$ . Так как  $\bar{P} \subset P$ , то  $p \setminus \{x_n\} \in P$ , т. е.  $r = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  принадлежит  $P$ . Таким образом,  $\{r\} \subseteq q_{x_1} \cap \dots \cap q_{x_{n-1}}$  и  $r \neq p$ , и, значит,  $q_{x_0} \cap \dots \cap q_{x_{n-1}} \neq \{p\}$ .

**Теорема 1.2.** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара,  $(Q, 2^{\bar{P}}) = (P, 2^X)^\perp$ ,  $Q \setminus \{\emptyset\} = Q^\#$  и  $\tau$  —  $Q$ -топология Гротендика на  $2^{\bar{P}}$ . Тогда  $\tau Dim P = n$  в том и только том случае, если для любого  $p \in P^\#$  имеет место  $|p| \leq n + 1$ , и существует  $p \in P^\#$  такой, что  $|p| = n + 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Необходимость. Пусть  $\tau Dim P = n$ . Из (4) следует, что существуют различные  $q_{x_0}, \dots, q_{x_n} \in Q^\#$  такие, что  $q_{x_0} \cap \dots \cap q_{x_n} \neq \emptyset$ , следовательно, существует  $p \in P$  такой, что  $p \subseteq q_{x_0} \cap \dots \cap q_{x_n}$ . Покажем, что  $\{x_0, \dots, x_n\} = p$ . Включение  $\{x_1, \dots, x_{n+1}\} \subseteq p$  очевидно. Пусть  $y \in Y$  такой, что  $y \in p$ . Тогда  $p \in q_y$ . Так как по условию теоремы  $q_y \in Q^\#$ , то  $q_{x_0} \cap \dots \cap q_{x_n} \cap q_y \neq \emptyset$ . Тогда из (4) следует, что существует  $i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , такое, что  $q_{x_i} = q_y$ . Таким образом,  $\{x_0, \dots, x_n\} = p$  и  $p \in P^\#$ .

Из  $\tau Dim P = n$  и условия (3) следует, что для любого  $p \in P_a^\#$  имеет место  $|p| \leq n + 1$ .

Достаточность. Так как  $krQ^\# = n + 1$ , то по теореме 1.1  $\bar{\tau}Dim \bar{P} = n$ , где  $\tau$  —  $Q$ -топология Гротендика на  $2^{\bar{P}}$ . Таким образом,  $\tau Dim^\perp X = n$ .

Следующий результат является следствием теоремы 1.2 с учетом леммы 1.4.

**Теорема 1.3.** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара. Тогда  $\tau Dim^\perp X = n$  в том и только том случае, если для любого  $p \in P^\#$  имеет место  $|p| \leq n + 1$ , и существует  $p \in P^\#$  такой, что  $|p| = n + 1$ .

Пусть  $(P, 2^X)$  — пара. Обозначим, через  $\check{P}$  нижнюю полурешетку, порожденную  $P$ , т. е.  $c \in \check{P}$  в том и только том случае, если  $c = b_0 \cap \dots \cap b_k$  для некоторых  $b_0, \dots, b_k \in P$ .  $\check{P}$ -топологию Гротендика на  $2^X$  будем обозначать через  $\check{\tau}$ .

**Лемма 1.5** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара. Тогда  $\tau(X) = \bar{\tau}(X) = \check{\tau}(X)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\alpha \in \tau(X)$ . Так как  $\bar{P} \subset P$ , то  $\bar{P} \prec \alpha$ . Пусть  $\alpha \in \bar{\tau}(X)$ . Поскольку  $P \prec \bar{P}$ , то  $P \prec \alpha$ . Таким образом,  $\tau(X) = \bar{\tau}(X)$ . Аналогично  $\tau(X) = \check{\tau}(X)$ .

## 2. Пучковые когомологии пространств Чу

Пусть  $K$  — нижняя полурешетка. Предположим, что для всякого  $a$  из  $K$  задана абелева группа  $\mathcal{A}(a)$ , для любых  $a, b \in K$ , таких, что  $b \leq a$ , задан гомоморфизм  $\rho_b^a : \mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{A}(b)$ , и при этом выполняются следующие условия:

(pF1) если  $a, b, c \in K$  такие, что  $c \leq b \leq a$ , то  $\rho_c^a = \rho_c^b \circ \rho_b^a$ ;

(pF2)  $\rho_a^a = id_{\mathcal{A}(a)} : \mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{A}(a)$  — тождественное отображение.

Тогда говорят, что на  $K$  задан абелев предпучок  $\mathcal{A}$ . В дальнейшем, слово “абелев” будет опускаться, так как в данной работе рассматриваются только абелевы предпучки. Гомоморфизм  $\rho_b^a$  называется *гомоморфизмом ограничения*. Элемент  $\rho_b^a(s) \in \mathcal{A}(b)$ , где  $s \in \mathcal{A}(a)$ , будем обозначать  $s|b$ .

Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — предпучки на  $K$ , тогда  $u : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  называются *гомоморфизмом предпучков*, если для любых  $a, b \in K$  таких, что  $b \leq a$  существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(a) & \xrightarrow{u(a)} & \mathcal{B}(a) \\ \downarrow \rho_b^a & & \downarrow \rho_b^a \\ \mathcal{A}(b) & \xrightarrow{u(b)} & \mathcal{B}(b), \end{array}$$

где  $u(a) : \mathcal{A}(a) \longrightarrow \mathcal{B}(a)$  — гомоморфизм абелевых групп для любого  $a \in K$ .

Совокупность подгрупп  $\mathcal{B}(k) \subset \mathcal{A}(k)$  ( $k \in K$ ) называется *подпредпучком*  $\mathcal{A}$ , если для любых  $a \leq b$  ( $a, b \in K$ ),  $s \in \mathcal{B}(a)$  имеет место  $s|b \in \mathcal{B}(b)$ . Таким образом, подпредпучок также является предпучком, а отображения ограничений в нем определяются так, чтобы включения  $\mathcal{B}(k) \longrightarrow \mathcal{A}(k)$  задавали гомоморфизм предпучков.

Пусть  $u : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  — гомоморфизм предпучков, тогда подпредпучок  $keru$  предпучка  $\mathcal{A}$  называются *ядром гомоморфизма предпучков*, если  $(keru)(a) = ker(u(a)) : \mathcal{A}(a) \longrightarrow \mathcal{B}(a)$ , и подпредпучок  $imu$  предпучка  $\mathcal{B}$  называется *образом гомоморфизма предпучков*, если  $(imu)(a) = im(u(a)) : \mathcal{A}(a) \longrightarrow \mathcal{B}(a)$ .

Говорят, что последовательность предпучков  $\mathcal{A} \xrightarrow{u} \mathcal{B} \xrightarrow{v} \mathcal{C}$  *точна*, если для любого  $a \in K$  последовательность абелевых групп  $\mathcal{A}(a) \xrightarrow{u(a)} \mathcal{B}(a) \xrightarrow{v(a)} \mathcal{C}(a)$  *точна*.

Напомним некоторые определения, связанные с топологиями Гротендика [7–9].

Пусть  $\mathcal{A}$  — предпучок на  $K$ ,  $a \in K$  и  $s \in \mathcal{A}(a)$ . Если существует  $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$  такое, что для любого  $i \in I$  имеет место  $s|a_i = 0$ , то  $s$  называется  *$\tau$ -нулевым*. Если для любого  $a \in K$  все  $s \in \mathcal{A}(a)$  являются  $\tau$ -нулевыми, то *предпучок*  $\mathcal{A}$  называется  *$\tau$ -нулевым*.

Подпредпучок  $\mathcal{A}$  предпучка  $\mathcal{B}$  называется  *$\tau$ -плотным* в предпучке  $\mathcal{B}$ , если для любых  $a \in K$ ,  $s \in \mathcal{B}(a)$  существует покрытие  $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$  и семейство  $\{t_i \in \mathcal{A}(a_i) | i \in I\}$  такое, что  $t_i = s|a_i$  для любого  $i \in I$ .

Говорят, что последовательность предпучков  $\mathcal{A} \xrightarrow{u} \mathcal{B} \xrightarrow{v} \mathcal{C}$   *$\tau$ -точна*, если для любого  $a \in K$  выполняются следующие условия:

- 1) для любого  $s \in \mathcal{A}(a)$  элемент  $(v \circ u)(s) \in \mathcal{C}(a)$  является  $\tau$ -нулевым;
- 2) для любого  $t \in \mathcal{B}(a)$  такого, что  $v(t) = 0$ , существует  $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$  и  $\{s_i \in \mathcal{A}(a_i) | i \in I\}$  такое, что для любого  $i \in I$  имеет место  $u(s_i) = t|a_i$ .

Семейство  $\{s_i \in \mathcal{A}(a_i) | i \in I\}$  называется *согласованным*, если  $s_i|a_i \wedge a_j = s_j|a_i \wedge a_j$  для любых  $i, j \in I$ .

Пусть  $\tau$  —  $P$ -топология Гротендика на  $K$ . Предпучок  $\mathcal{A}$  на  $K$  называется  *$\tau$ -пучком*, если для любого  $a \in K$  выполняются следующие условия:

( $\tau F1$ ) для любых  $s, t \in \mathcal{A}(a)$  и для любого  $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$  из того, что  $s|a_i = t|a_i$  ( $i \in I$ ), следует, что  $s = t$ ;

( $\tau F2$ ) для любого  $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$  и для любого согласованного семейства  $\{s_i \in \mathcal{A}(a_i) | i \in I\}$  существует  $s \in \mathcal{A}(a)$  такое, что  $s|a_i = s_i$  для любого  $i \in I$ .

*Под категорией пучков* понимается полная подкатегория категории предпучков, состоящая из пучков.

Категория абелевых пучков является абелевой и содержит достаточно много инъективных объектов.

При этом последовательность  $\tau$ -пучков  $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$  *точна* тогда и только тогда, когда она  $\tau$ -точна, как последовательность предпучков, ядро  $Keru$  гомоморфизма пучков  $u : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$  совпадает с  $keru$  — ядром  $u$  в категории предпучков, а  $Imu$  определяется так:  $s \in (Imu)(a)$  в том и только том случае, когда существует  $\{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$  такое, что  $s|a_i \in (imu)(a_i)$  для любого  $i \in I$ .

Известно, что для любого предпучка  $\mathcal{A}$  существует такой гомоморфизм  $u : \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ , что  $keru$  —  $\tau$ -нулевой предпучок,  $imu$  —  $\tau$ -плотен в  $\mathcal{A}$  и  $\tilde{\mathcal{A}}$  —  $\tau$ -пучок. Такой пучок  $\tilde{\mathcal{A}}$  определен с точностью до изоморфизма и называется  *$\tau$ -пучком*, порожденным предпучком  $\mathcal{A}$ .

Пусть  $a \in K$ ,  $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\}$  — семейство элементов и  $\mathcal{A}$  — предпучок на  $K$ . Стандартным образом строится цепной комплекс  $C^*(\alpha, \mathcal{A})$ , т. е. последовательность вида  $0 \longrightarrow C^0(\alpha, \mathcal{A}) \xrightarrow{d^0} C^1(\alpha, \mathcal{A}) \xrightarrow{d^1} C^2(\alpha, \mathcal{A}) \longrightarrow \dots$ , где  $d^k \circ d^{k-1} = 0$ . А именно, для любого  $p \geq 0$  полагаем  $C^p(\alpha, \mathcal{A}) = \prod \{\mathcal{A}(a_s) \mid s \in I^{p+1}\}$ , где  $a_s = a_{i_0} \cap \dots \cap a_{i_n}$ , если  $s = (i_0, \dots, i_n)$ . Таким образом,  $\delta \in C^p(\alpha, \mathcal{A})$  тогда и только тогда, когда  $\delta = \{\delta_s \in \mathcal{A}(a_s) \mid s \in I^{p+1}\}$ . Последовательность отображений  $d^p : C^p(\alpha, \mathcal{A}) \longrightarrow C^{p+1}(\alpha, \mathcal{A})$  задаваемых формулой  $(d^p \delta)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \delta_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}} | a_{i_0, \dots, i_{p+1}}$ , превращает  $\{C^p(\alpha, \mathcal{A}) \mid p \in \mathbb{Z}\}$  в комплекс.

Через  $H^p(\alpha, \mathcal{A}) = H^p(C^*(\alpha, \mathcal{A}))$  обозначим  $p$ -ю группу когомологий цепного комплекса  $C^*(\alpha, \mathcal{A})$ . Тогда когомологии Александрова-Чеха элемента  $a$  с коэффициентами в  $\tau$ -пучке  $\mathcal{A}$  определяются равенством  $\check{H}_\tau^n(a, \mathcal{A}) = \varinjlim_{\tau(a)} H^n(\alpha, \mathcal{A})$ .

Группа когомологий Гротендика  $H_\tau^n(a, \mathcal{A})$  — это  $R^n \Gamma_a(\mathcal{A})$ , где  $R^n \Gamma_a$  —  $n$ -й правый производный функтор,  $\Gamma_a$  — функтор из категории  $\tau$ -пучков в категорию абелевых групп, который задается формулой  $\Gamma_a(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(a)$ .

Пусть  $a \in K$ . Покрытие  $\beta \in \tau(a)$  такое, что его можно вписать в любое покрытие  $\alpha \in \tau(a)$ , назовем минимальным покрытием элемента  $a$ . Заметим, что если  $\beta$  — минимальное покрытие, то для любого предпучка  $\mathcal{A}$  выполняется равенство  $\check{H}_\tau^n(a, \mathcal{A}) = H_\tau^n(\beta, \mathcal{A})$ .

**Лемма 2.1.** Пусть  $K$  — нижняя полурешетка,  $\tau$  — топология Гротендика на  $K$  и каждый  $a \in K$  обладает минимальным  $\tau$ -покрытием  $\beta_a$ . Предпучок  $\mathcal{A}$  на  $K$  —  $\tau$ -нулевой в том и только том случае, если для любых  $a \in K$ ,  $s \in \mathcal{A}(a)$  и элемента  $b$  покрытия  $\beta_a$   $s|b = 0$ .

В частности, если  $\{b\}$  является минимальным покрытием  $b$ , то  $\mathcal{A}(b) = 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Необходимость. Пусть  $a \in K$ ,  $s \in \mathcal{A}(a)$ . Так как предпучок  $\mathcal{A}$  —  $\tau$ -нулевой, то существует  $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\} \in \tau(a)$  такое, что для любого  $i \in I$  имеет место  $s|a_i = 0$ . Поскольку  $\beta_a \prec \alpha$ , то для любого  $b \in \beta_a$  существует  $i \in I$  такой, что  $b \leq a_i$ . Следовательно, для любого  $b \in \beta_a$  имеет место  $s|b = s|a_i|b = 0$ .

Достаточность. Очевидно.

**Лемма 2.2.** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара,  $\tau$  —  $P$ -топология Гротендика на  $2^X$ . Если  $\mathcal{A}$  —  $\tau$ -нулевой предпучок,  $P$  — нижняя полурешетка, то  $\check{H}_\tau^n(X, \mathcal{A}) = 0$  для любого  $n \geq 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** По лемме 1.2  $\beta_X$  — минимальное покрытие  $X$ , так что достаточно показать, что  $C^n(\beta_X, \mathcal{A}) = 0$ . Пусть  $\delta \in C^n(\beta_X, \mathcal{A}) = 0$ ,  $s = (i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}$  и  $\delta_s \in \mathcal{A}(b_s)$ . Если  $b_{i_0}, \dots, b_{i_n} \in P^\#$ , то  $b = b_{i_0} \cap \dots \cap b_{i_n} \in P$ , так что  $\{b\}$  — минимальное  $\tau$ -покрытие  $b$ , и по лемме 2.1  $\mathcal{A}(b) = 0$ . Таким образом,  $\delta_s = 0$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара,  $\tilde{\mathcal{A}}$  —  $\tau$ -пучок, порожденный  $\mathcal{A}$ . Тогда

- 1)  $\check{H}_\tau^n(a, \mathcal{A}) = H_\tau^n(a, \tilde{\mathcal{A}})$  для любого  $a \in 2^X$ ;
- 2) для любого предпучка  $\mathcal{A}$  на  $2^X$   $\check{H}_\tau^n(X, \mathcal{A}) = \check{H}_\tau^n(X, \tilde{\mathcal{A}}) = H^n(\beta_X, \mathcal{A})$ . Если же  $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$ , то все эти группы равны  $H_\tau^n(X, \tilde{\mathcal{A}})$ ;
- 3)  $\tau \text{Dim } X = \check{\tau} \text{Dim } X$ ;
- 4) если  $n = \tau \text{Dim } X$ , то для любого  $m > n$  и для любого абелева предпучка  $\mathcal{A}$  с условием  $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$   $\check{H}_\tau^m(X, \mathcal{A}) = \check{H}_\tau^m(X, \tilde{\mathcal{A}}) = H^m(\beta_X, \mathcal{A}) = 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** 1) Равенство  $H_\tau^n(a, \tilde{\mathcal{A}}) = \check{H}_\tau^n(a, \mathcal{A})$  можно вывести из леммы 2.2 и спектральной последовательности, связывающей когомологии Чеха и Гротендика [9]. Необходимые детали имеются, например, в [7, 8].

2) Первые два равенства следуют из соотношения  $\tau(x) = \check{\tau}(x)$  и того факта, что  $\beta_X$  — минимальное  $\tau$ -покрытие  $X$ . Равенство  $H_{\check{\tau}}^n(X, \tilde{\mathcal{A}}) = \check{H}_{\check{\tau}}^n(X, \mathcal{A})$  следует из 1).

3) Следует из соотношения  $\tau(X) = \check{\tau}(X)$ .

4) Следует из п. 2 и того известного факта, что когомологии семейства элементов нижней полурешетки с коэффициентами в любом предпучке с условием  $\mathcal{A}(0) = 0$  равны нулю, если  $m$  — число, большее, чем кратность этого семейства (необходимые ссылки имеются в [7, 8]).

**Определение 2.1** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара. Определим когомологические размерности элемента  $a \in 2^X$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma\tau D_{\mathcal{A}} a \leq n &\Leftrightarrow \check{H}_{\check{\tau}}^{n+k}(a, \mathcal{A}) = 0 \quad \forall k > 0, \\ \sigma\tau D a \leq n &\Leftrightarrow \check{H}_{\check{\tau}}^{n+k}(a, \mathcal{A}) = 0 \quad \forall \mathcal{A} \text{ — абелева предпучка и } \forall k > 0. \end{aligned}$$

**Лемма 2.3** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара. Тогда  $\sigma\tau D_{\mathcal{A}} X = \check{\sigma}\tau D_{\mathcal{A}} X = \check{\sigma}\tau D_{\mathcal{A}} X \leq \sigma\tau DX = \check{\sigma}\tau DX = \check{\sigma}\tau DX \leq \tau \text{Dim} X = \check{\tau} \text{Dim} X = \bar{\tau} \text{Dim} X$ .

**Доказательство.** Равенства  $\sigma\tau D_{\mathcal{A}} X = \check{\sigma}\tau D_{\mathcal{A}} X = \check{\sigma}\tau D_{\mathcal{A}} X$ ,  $\sigma\tau DX = \check{\sigma}\tau DX = \check{\sigma}\tau DX$  и  $\tau \text{Dim} X = \check{\tau} \text{Dim} X = \bar{\tau} \text{Dim} X$  следуют из соотношения  $\tau(x) = \check{\tau}(x) = \bar{\tau}(x)$ . Очевидно,  $\sigma\tau D_{\mathcal{A}} X \leq \sigma\tau DX$ . Из теоремы 2.1, п. 4, следует, что  $\sigma\tau DX \leq \tau \text{Dim} X$ .

Теперь мы покажем, что для достаточно широкого класса пространств Чу, содержащего, в частности, пространства любой наперед заданной размерности, имеет место равенство  $\sigma\tau DX = \tau \text{Dim} X$ , т. е. размерность характеризуется когомологически.

**Лемма 2.4.** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара. Если существует такой набор  $\{p_0, \dots, p_n\} \subseteq P^{\#}$ , что  $p_0 \cap \dots \cap p_n$  не пусто, и пересечение любого набора из  $k$  элементов  $P^{\#}$  при  $k < n$  и  $k > n$  не равно  $p_0 \cap \dots \cap p_n$ , то существует предпучок  $\mathcal{A}$  на  $2^X$  такой, что  $H^n(\beta_X, \mathcal{A}) \neq 0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим предпучок  $\mathcal{A}$  такой, что  $\mathcal{A}(b) = 0$  для любого  $b \in 2^X$ , кроме  $\mathcal{A}(p_0 \cap \dots \cap p_n) = Z$ , и  $\rho_d^c = 0$  при  $c \neq d$ . Как известно, когомологии Чеха можно вычислять по кососимметрическим коцепям, т. е. по коцепному комплексу  $C_a^*(\beta_X, \mathcal{A}) \subset C^*(\beta_X, \mathcal{A})$ , так, что если  $\delta \in C^*(\beta_X, \mathcal{A})$ , то  $\delta_s = 0$  для любого  $s \in I^{n+1}$ , содержащего повторяющиеся индексы. В силу определения предпучка  $\mathcal{A}$  и условия данной леммы  $C_a^{n-1}(\beta_X, \mathcal{A})$  и  $C_a^{n+1}(\beta_X, \mathcal{A})$  — нулевые группы, а  $C_a^n(\beta_X, \mathcal{A}) \neq 0$ . Поэтому  $H^n(\beta_X, \mathcal{A}) \neq 0$ .

**Лемма 2.5** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара такая, что  $\bar{P} \subset P$ ,  $(P, 2^X)^{\perp} = (Q, 2^P)$  и  $\tau \text{Dim} P = n$ , где  $\tau$  —  $Q$ -топология Гротендика на  $2^P$ . Тогда существует предпучок  $\mathcal{A}$  на  $2^P$  такой, что  $H^n(\beta_P, \mathcal{A}) \neq 0$ .

**Доказательство.** Так как  $\bar{P} \subset P$ , то согласно лемме 1.4  $Q \setminus \{\emptyset\} = Q^{\#}$ . Поскольку  $\tau \text{Dim} P = n$ , то по теореме 1.2 существуют  $p \in P^{\#}$  и попарно различные точки  $x_0, \dots, x_n \in X$  такие, что  $\{x_0, \dots, x_n\} = p$  и  $q_{x_0} \cap \dots \cap q_{x_n} = \{p\}$ . Из леммы 1.4 и условия (3) следует, что для любого  $k < n$  и  $k > n$  имеет место  $q_{x_{i_0}} \cap \dots \cap q_{x_{i_k}} \neq \{p\}$ . Поэтому по лемме 2.4 существует предпучок  $\mathcal{A}$  на  $2^P$  такой, что  $H^n(\beta_P, \mathcal{A}) \neq 0$ .

Следующие результаты вытекают теперь из теоремы 2.1.

**Теорема 2.2** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара,  $(Q, 2^{\bar{P}}) = (\bar{P}, 2^X)^{\perp}$ ,  $\tau \text{Dim}^{\perp} X = n$ ,  $\bar{\tau}$  —  $Q$ -топология Гротендика на  $2^{\bar{P}}$ . Тогда существует  $\bar{\tau}$ -пучок  $\mathcal{A}$  на  $2^{\bar{P}}$ , такой, что  $\check{H}_{\check{\tau}}^n(\bar{P}, \mathcal{A}) \neq 0$ .

**Теорема 2.3** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара такая, что  $\bar{P} \subset P$  и  $(P, 2^X)^{\perp} = (Q, 2^P)$ . Тогда  $\check{\tau} \text{Dim} P = \check{\sigma}\tau DP$ , где  $\check{\tau}$  —  $\check{Q}$ -топология Гротендика на  $2^P$ .

Как показывают примеры, равенство  $\tau \text{Dim} X = \sigma\tau DX$  выполняется не всегда. Поэтому полезным является такое следствие теоремы 2.3.

**Теорема 2.4** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара, удовлетворяющая следующему условию:

$$\forall x \in X, \forall p \in P \exists y \in Y : q_x \setminus \{p\} = q_y.$$



Предположим также, что  $(P, 2^X)^{\perp\perp} = (P, 2^X)$  (достаточные условия этого легко сформулировать). Тогда  $\tau \text{Dim } X = \sigma \tau DX$ , где  $\tau$  —  $P$ -топология Гротендика на  $2^X$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $(Q, 2^P) = (P, 2^X)^\perp$ . Тогда  $(Q, 2^P)^\perp = (P, 2^X)$ . Поскольку из условия теоремы следует, что  $\bar{Q} \subseteq Q$ , то по теореме 2.3  $\check{\tau} \text{Dim } X = \sigma \check{\tau} DX$ , где  $\check{\tau}$  —  $\check{P}$ -топология Гротендика на  $2^X$ . Из леммы 2.3 следует, что  $\tau \text{Dim } X = \sigma \tau DX$ , где  $\tau$  —  $P$ -топология Гротендика на  $2^X$ .

### 3. Вялая размерность

Определим по аналогии с соответствующими топологическими понятиями вялую размерность и размерность Бредона пространств Чу.

**Определение 3.1.** Пусть  $\mathcal{A}$  —  $\tau$ -пучок на паре  $(P, 2^X)$ , где  $\tau$  —  $P^\#$ -топология Гротендика на  $2^X$ ,  $a \in 2^X$ . Пучок  $\mathcal{A}$  назовем *a-вялым*, если отображение ограничения  $\mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{A}(b)$  является эпиморфизмом для любого  $b \subset a$ .

*Резольвентой  $\tau$ -пучка  $\mathcal{A}$  на  $K$*  называют точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{A}^2 \rightarrow \dots,$$

где  $\mathcal{A}^k$  —  $\tau$ -пучки на  $K$  для любого  $k \geq 0$ .

Если  $\tau$ -пучок  $\mathcal{A}$  обладает *a-вялой резольвентой* длины  $n$  и не обладает резольвентой меньшей длины, то говорят, что его *вялая размерность* равна  $n$  и обозначают  $Vd_{\mathcal{A}} = n$ . Максимум  $Vd_{\mathcal{A}}$  по всем  $\tau$ -пучкам  $\mathcal{A}$  называется *размерностью Бредона  $Vd_{\mathcal{A}}$*  элемента  $a$ .

Напомним определение когомологий пары [7, 8]. Если  $K$  — нижняя полурешетка,  $a, b \in K$ ,  $b \leq a$ ,  $\mathcal{A}$  —  $\tau$ -пучок, то имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow \Gamma_{a,b}(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma_a(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma_b(\mathcal{A}),$$

где  $\Gamma_a(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(a)$ ,  $\Gamma_{a,b}(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{A}(b))$ .  $(R^n \Gamma_{a,b})(\mathcal{A})$  обозначается через  $H^n(a, b, \mathcal{A})$ , где  $R^n$  —  $n$ -й правый производный функтор. Известно, [7, 8] имеется точная последовательность пары  $(a, b)$ :

$$\dots \rightarrow H^k(a, b, \mathcal{A}) \rightarrow H^k(a, \mathcal{A}) \rightarrow H^k(b, \mathcal{A}) \rightarrow H^{k+1}(a, b, \mathcal{A}) \rightarrow \dots$$

В работах [4, 5] доказаны характеристики вялой размерности, относящиеся к произвольным сайтам Гротендика, которые для случая пространств Чу могут быть сформулированы так:

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mathcal{A}$  —  $\tau$ -пучок на паре  $(P, 2^X)$  и  $a$  — фиксированный элемент  $2^X$ , тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $Vd_{\mathcal{A}} \leq n$ ;
- 2) для любой резольвенты  $\mathcal{A}$  длины  $n$ :  $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}^n \rightarrow 0$  из того, что для любого  $0 \leq i \leq n-1$   $\tau$ -пучки  $\mathcal{A}^i$  — *a-вялые*, следует, что  $\tau$ -пучок  $\mathcal{A}^n$  — *a-вялый*;
- 3)  $H^{n+1}(a, b, \mathcal{A}) = 0$  для любого  $b \leq a$ ;
- 4)  $H^k(a, b, \mathcal{A}) = 0$  для любого  $b \leq a$ , при  $k > n$ ;
- 5)  $H^n(a, \mathcal{A}) \rightarrow H^n(b, \mathcal{A})$  — эпиморфизм для любого  $b \leq a$ ;
- 6)  $H^{n+1}(a, b, \mathcal{A}) \rightarrow H^{n+1}(a, \mathcal{A})$  — мономорфизм, для любого  $b \leq a$ .

Отсюда следует такой результат о связях вышних размерностей с размерностью пространств Чу.

**Теорема 3.2.** Пусть  $(P, 2^X)$  — пара, где  $P$  вместе с каждым своим элементом содержит все его подмножества,  $a \in 2^X$ ,  $\tau$  —  $P$ -топология гротендика на  $2^X$ . Тогда

$$1) \text{Bd}_{\mathcal{A}} a \leq \sigma \tau D_{\mathcal{A}} a + 1$$

$$2) \text{Bd}_X \leq \tau \text{Dim } X + 1$$

**Доказательство.** 1) По теореме 2.5  $\tau \text{Dim } b \leq \tau \text{Dim } a$ . Поэтому, если  $\tau \text{Dim } a = n$ , то  $H_{\tau}^{n+k}(a, \mathcal{A}) = H_{\tau}^{n+k}(b, \mathcal{A})$  для любого  $\mathcal{A}$  и  $k \geq 1$ . Из точной последовательности пары  $(a, b)$  получаем  $H_{\tau}^{n+k}(a, b, \mathcal{A}) = 0$  при  $k \geq 2$ . По теореме 3.1 это влечет  $\text{Bd}_{\mathcal{A}} a \leq n + 1 \leq \sigma \tau D_{\mathcal{A}} a + 1$ .

2) прямо следует из 1).

## Список литературы

1. Barr M. \*-Autonomous categories // Lecture Notes in Mathematics. Heidelberg: Springer, 1979. V. 752.
2. Pratt V.R. Chu spaces from the Representational Viewpoint. Preprint. 2005.
3. Zang G.-Q. Chu spaces, concept lattices, and domain // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. 2004. V. 83.
4. Gupta V., Pratt V.R. Gates Accept Concurrent Behavior // Proc. 34<sup>th</sup> Ann. IEEE Symp. on Foundations of Comp. Sci. 1993. P. 62–71.
5. Pratt V.R. Chu spaces, Notes for school on category theory and applications. Technical report, University of Coimbra, Portugal, 1999.
6. Сухонос А.Г. Эквивалентность категорий  $chu_{\Sigma}$  и  $ps_{\Sigma}$ . Владивосток: Дальнаука, 2004. 20 с. (Препринт / ДВО РАН, Институт прикладной математики. № 19)
7. Скурихин Е.Е. Пучковые кохомологии и размерность частично упорядоченных множеств // Тр. Мат. ин-та В.А. Стеклова РАН. 2002. Т 239. С. 289–317.
8. Скурихин Е.Е. Пучковые кохомологии и размерность частично упорядоченных множеств. Владивосток: Дальнаука, 2004. 194 с.
9. Artin M. Grothendieck topologies. Harvard Math. Dept. Lecture Notes, 1962.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 15 ноября 2005 г.

---

*Skurikhin E.E., Sukhonos A.G.* Cohomologies and dimensions of Chu spaces. Far Eastern Mathematical Journal. 2005. V. 6. № 1–2. P. 14–22.

### ABSTRACT

We define Grothendieck topologies on Chu spaces and consider sheaf cohomologies, dimensions and cohomological dimensions of Chu spaces.

Key words: *Chu spaces, Grothendieck topologies, sheaf cohomology, dimension.*