Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. Yu. Solynin, Boundary distortions and change of module under extension of a doubly connected domain, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1992, Volume 201, 157–163

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.174
January 17, 2025, 08:21:30

А.Ю.Солынин

ГРАНИЧНОЕ ИСКАЖЕНИЕ И ИЗМЕНЕНИЕ МОДУЛЯ ПРИ РАСШИРЕНИИ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

I. Пусть $\mathcal{F}(\rho,r), 0\leqslant r<\rho<1$,– класс регулярных и однолистных в кольце $K(\rho,1)=\{\zeta:\rho<|\zeta|<1\}$ функций $z=f(\zeta)$ таких, что $r<|f(\zeta)|<1$ при $\zeta\in K(\rho,1)$, $|f(\zeta)|=1$ при $|\zeta|=1$, $f(1)=1$. Через $f(\zeta;\rho,r), f(1;\rho,r)=1$, обозначим конформный гомеоморфизм кольца $K(\rho,1)$ на кольцо $K(r,1)$ (возможно, вырожденное) с разрезом по отрезку $[-\kappa,-r]$, где $\kappa=\kappa(\rho,r)$; $f_\alpha(\zeta;\rho,r)=$ $=f(e^{i\alpha}\zeta;\rho,r)/f(e^{i\alpha};\rho,r)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Пусть E – измеримое множество на окружности $C_r=\{\zeta:|\zeta|=r\}$, $r>0$, $\operatorname{mes} E$ – угловая мера Лебега E; $E_\ell=\{\zeta:|\arg\zeta|\leqslant\ell\}$, $0\leqslant\ell\leqslant\pi$. Следующая теорема, доказательство которой дается в п.4 данной работы, характеризует искажение множеств на единичной окружности при отображении функциями из класса $\mathcal{F}(\rho,r)$.

ТЕОРЕМА I. Пусть $E\subset C_1$, $\operatorname{mes}E=2\ell$, $0<\ell<\pi$, и $f(\zeta)\in\mathcal{F}(\rho,r)$. Тогда

$$2\pi-\operatorname{mes} f(E_\ell;\rho,r)\leqslant \operatorname{mes} f(E)\leqslant \operatorname{mes} f(E_\ell;\rho,r). \tag{I}$$

Равенство в (I) достигается только в том случае, когда E с точностью до множества меры нуль совпадает с некоторой дугой $e^{-i\alpha}E_\ell$, и при этом только для функций $f_{\alpha+\pi}(\zeta;\rho,r)$ и $f_\alpha(\zeta;\rho,r)$ соответственно в левом и правом неравенстве в (I).

Пусть $u(re^{i\theta})$, $r>0$,– интегрируемая по Лебегу функция от θ, и пусть

$$u^*(re^{i\theta})=\sup_{E:\operatorname{mes}E=2\theta}\int_E u(re^{i\varphi})\,d\varphi \quad -$$

$*$ – функция Бернстайна (см.[I]). Так как $\operatorname{mes} f(E)=\int_E|f'(e^{i\theta})|d\theta$, то при $0<\theta<\pi$ и $f(\zeta)\neq f_\alpha(\zeta;\rho,r)$ (I) эквивалентно неравенствам

$$(\pm|f'(e^{i\theta})|)^*<(\pm|f'(e^{i\theta};\rho,r)|)^*. \tag{2}$$

Из соответствующего уточнения предложения 3 в [I] и неравенств (2) вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Phi(t)$ – строго выпуклая возрастающая или убывающая функция при $0<t<\infty$. Если $f(\zeta)\in\mathcal{F}(\rho,r)$ и $f(\zeta)\neq f_\alpha(\zeta;\rho,r), \alpha\in\mathbb{R}$, то

© А. Ю. Солынин, 1992

$$\int_0^{2\pi}\Phi(|f'(e^{i\theta})|)d\theta<\int_0^{2\pi}\Phi(|f'(e^{i\theta};\rho,\tau)|)d\theta. \qquad (3)$$

В частности, при $\rho<0$ и $\rho>1$

$$\int_0^{2\pi}|f'(e^{i\theta})|^\rho d\theta<\int_0^{2\pi}|f'(e^{i\theta};\rho,\tau)|^\rho d\theta. \qquad (4)$$

Очевидно, соответствующие неравенства имеют место и на окружностях C_τ при τ, достаточно близких к I.

2. Пусть E -континуум в круге $U_R=\{z:|z|<R\}, 0<R<\infty$, и $D_1(R,E)$ - двусвязная компонента $U_R\setminus E$. Через $\operatorname{cap} E$ и $M_1(R,E)$ обозначаем соответственно емкость E и конформный модуль $D_1(R,E)$. Для континуумов E, лежащих в полуплоскости $H_R=\{z:\operatorname{Re} z>-R\}$, используем аналогичные обозначения $D_2(R,E)$ и $M_2(R,E)$.

ЗАДАЧА I. Пусть τ, R_0, R и m - фиксированные числа, $0\leqslant\tau<m<R_0<R<\infty$, $\mathcal{E}_1(m)=\{E:E$ - континуум, $\overline{U}_\tau\subset E\subset U_{R_0}$, $M_1(R_0,E)=R_0/m\}$. В семействе $\mathcal{E}_1(m)$ найти континуумы, реализующие соответственно максимум модуля $M_1(R,E)$ и минимум емкости $\operatorname{cap} E$.

ЗАДАЧА 2 - аналог задачи I в семействе $\mathcal{E}_2(m)$ континуумов E, для которых $\overline{U}_\tau\subset E\subset H_{R_0}$, $M_2(R_0,E)=M_2(R_0,\overline{U}_m)$.

Задача I была поставлена В.В.Кожевниковым в 1980 г. в докладе на семинаре по геометрической теории функций при Кубанском университете (руководитель семинара проф. И.П.Митюк), однако она не была опубликована. В статье Р.Кюнау [2] получены частичные результаты в задачах I и 2 и отмечается, что в случае функции $\operatorname{cap} E$ и $\tau=0$ эти задачи были поставлены Д.Гайером.

Пусть $E_K(R,E)=\overline{U}_\tau\cup[-s_K,-\tau]$, где величина s_K определяется из условия $M_K(R,E_K(R,E))=M_K(R,E)$, $K=1,2$. Решение задач I и 2 дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0\leqslant\tau<m<R_0<R<\infty$, $E\in\mathcal{E}_K(m)$, $K=1,2$. Тогда

$$M_K(R,E)\leqslant M_K(R,E_K(R_0,E)), \qquad (5)$$

$$\operatorname{cap} E\geqslant\operatorname{cap} E_K(R_0,E). \qquad (6)$$

При $K=1$ равенство в неравенствах (5) и (6) достигается только в случае $E=e^{i\alpha}E_1(R_0,E)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, а при $K=2$ - только в случае $E=E_2(R_0,E)$.

3. Для доказательства теоремы 3 необходима

ЛЕММА I. Пусть E – континуум, $E \subset U_R$ или $E \subset H_R$, $z = g_{R,K}(\zeta)$, $K = 1,2$, – конформный гомеоморфизм кольца $K(\rho, 1)$ на область $D_K(1, R^{-1}E)$, $g_{R,1}(1) = 1$, $g_{R,2}(1) = \infty$. Тогда

$$\frac{d}{dR} \log M_K(R,E) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|g'_{R,K}(e^{i\theta})|}, \quad K = 1,2. \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, (9) достаточно доказать при $R = 1$. Пусть $K = 1$, и пусть $C(R) = (E_0, E_1)$ – конденсатор с пластинами $E_0 = E$, $E_1 = C_R$, $P_E(R)$ – емкость $C(R)$. Применяя вариационную формулу для $P_E(R)$ из работы [3], с.278, получаем

$$P_E(1+\varepsilon) = P_E(1) - \varepsilon \int_{C_1} \left[\frac{\partial \omega(re^{i\theta}, E)}{\partial r}\right]^2 ds + O(\varepsilon^2), \tag{8}$$

где $\omega(z,E) = 1 - \log|g^{-1}_{1,1}(z)| / \log \rho$ – гармоническая мера C_1 относительно области $D_1(1,E)$. При $z \in C_1$ выполняется равенство

$$\arg\left\{ z\,(g^{-1}_{1,1}(z))' / g^{-1}_{1,1}(z) \right\} = 0. \tag{9}$$

Используя условия Коши-Римана, из (8) и (9) находим

$$P_E(1+\varepsilon) = P_E(1) - \varepsilon \log^{-2}\rho \int_{C_1} |(g^{-1}_{1,1}(z))'|^2 ds + O(\varepsilon^2). \tag{10}$$

Полагая $\zeta = g^{-1}_{1,1}(z)$ и используя хорошо известное равенство $M_1(R,E) = \exp\{2\pi P_E^{-1}(R)\}$, из (10) получаем (7).

Отметим, что вариационная формула (8) получена в [3] в предположении, что рассматриваемая область ограничена дважды непрерывно дифференцируемыми кривыми. Возможность применения (8) в рассматриваемом случае обусловлена тем, что здесь изменяется только одна граничная компонента области $D_1(1,E)$ – окружность C_1. Формулу (8) легко распространить и на случай области $D_2(R,E)$, после чего доказательство (7) для случая $K = 2$ проводится также, как и для $K = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. При $K = 1$ неравенство (5) вместе с утверждением о случае равенства вытекает из неравенства (4) при $p = -1$ и равенства (7). Для доказательства неравенства (5) при $K = 2$ заметим, что существуют не зависящие от E число $r_1 > 0$ и отображение $\varphi(z) = a/(1-z) + b$, $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, такие, что $g_{1,2}(\zeta) = \varphi(f(\zeta))$, где $f(\zeta) \in \mathfrak{F}(\rho, r)$. Так как величина $|\varphi'(e^{i\theta})| = a/2\sin(\theta/2)$ убывает при $0 < \theta < \pi$, то при условии $E \neq E_2(R_0, E)$ из неравенства (2) получаем

$$(-|g'_{1,2}(e^{i\theta})|)^* < (-|\varphi' \cdot f'(e^{i\theta}; \rho, r_1)|)^*.$$

Отсюда следует, что для функций $g_{1,2}(\zeta)$ и $\varphi(f(\zeta; \rho, r_1))$ и для любой строго выпуклой убывающей функции $\Phi(t)$ справедливо неравенство (3) и, в частности, неравенство (4) при $p=-1$. Отсюда и из леммы I вытекает (5) с утверждением о случае равенства.

Для доказательства неравенств (6) воспользуемся соотношением

$$\operatorname{cap} E = K \lim_{R\to\infty} R M_K^{-1}(R, E), \; K = 1, 2, \qquad (II)$$

которое следует из равенства емкости континуума E и конформного радиуса области, дополнительной к E и содержащей точку ∞.

Неравенства (6) вытекают непосредственно из (5) и (II). Пусть $R_0 < R_1 < \infty$ и $E \neq e^{i\alpha} E_1(R_0, E), \alpha \in \mathbb{R}$, или $E \neq E_2(R_0, E)$. Тогда $M_K(R_1, E) < M_K(R_1, E_K(R_0, E))$ и $\operatorname{cap} E > \operatorname{cap} E_K(R_1, E)$. Из последних неравенств следует утверждение теоремы относительно равенства в (6).

4. Доказательство теоремы I. Пусть $f(\zeta) \in \mathfrak{F}(\rho, r)$ и пусть $f(\zeta)$ отображает $K(\rho, 1)$ на кольцо $K(r, 1)$ с разрезом по жордановой кривой l с концевыми точками z_1 и z_2, где $z_1 \in C_r$, $z_2 \in K(r, 1)$. Укорачивая разрез l, начиная с точки z_2, образуем левнеровское семейство областей $D(t)$, причем параметр t выбираем таким образом, чтобы конформный модуль области $D(t)$ был равен $\rho^{-1} e^{-t}$, $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Пусть $f_t(\zeta, t)$ – конформный гомеоморфизм кольца $K(q_t, 1)$, $q_t = \rho e^{-t}$, на $D(t)$, $f(1, t) = 1$. Функция $f(\zeta, t)$ является решением уравнения Голузина-Комацу (см.[4]), которое для функций из класса $\mathfrak{F}(\rho, r)$ имеет вид

$$\frac{d \log f(\zeta, t)}{dt} = \mathcal{K}_{q_t}(x(t) q_t / f(\zeta, t)) - \mathcal{K}_{q_t}(x(t) q_t), \qquad (I2)$$

где $x(t)$ – непрерывная унимодулярная функция,

$$\mathcal{K}_q(z) = \frac{1+z}{1-z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} (z^n - z^{-n}) = \pi + i \frac{\vartheta'_4(v)}{\vartheta_4(v)}, \qquad (I3)$$

$v = (2\pi i)^{-1} \log(z/q)$, $\vartheta_4(v) = \vartheta_4(v, q)$ – эллиптическая тета-функция.

Дифференцируя (I2) по ζ и используя равенство

$\arg\{e^{i\theta} f'(e^{i\theta},t)/f(e^{i\theta},t)\} = 0$, получим

$$\frac{d}{dt}|f'(e^{i\theta},t)| = -|f'(e^{i\theta},t)|\,\xi\,\mathcal{K}'_q(\xi), \tag{14}$$

где $q = q_t$, $\xi = x(t) q_t / f(e^{i\theta},t)$.

Пусть $E \subset C_1$ и $\operatorname{mes} E = 2l$, $0 < l < \pi$. Интегрируя равенство (I4) по множеству E и полагая $x(t) f(e^{i\theta},t) = e^{-i\varphi}$, приходим к равенству

$$\frac{d}{dt}\int_E |f'(e^{i\theta},t)|\,d\theta = \int_{E_1} q_t e^{i\varphi} \mathcal{K}_{q_t}(q_t e^{i\varphi})\,d\varphi, \tag{15}$$

где $E_1 = \{e^{i\varphi} : \varphi = -\arg(x(t) f(e^{i\theta},t)), \theta \in E\}$.
Используя известные равенства (см.[5]),

$$\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)} = 2\mathbf{K}(\kappa)\left\{E(u) - \frac{\mathbf{E}(\kappa)}{\mathbf{K}(\kappa)}u\right\} = 2\mathbf{K}(\kappa)\left\{\int_0^u dn^2(x,\kappa)\,dx - \frac{\mathbf{E}(\kappa)}{\mathbf{K}(\kappa)}u\right\},$$

где κ определяется из уравнения $\pi \mathbf{K}'(\kappa) = -\mathbf{K}(\kappa)\log q$, $u = 2\mathbf{K}(\kappa)v$, из (I3) получаем, что функция $F(\theta) = q e^{i\theta} \mathcal{K}'_q(q e^{i\theta})$ убывает при $0 < \theta < \pi$.

Пусть $u(t) = (1/2)\operatorname{mes} f(E,t)$, $v(t) = (1/2)\operatorname{mes} f(E_l; \rho, r)$
и

$$F(u,t) = \int_{-u}^{u} q_t e^{i\varphi} \mathcal{K}'_{q_t}(q_t e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Пусть $\operatorname{mes}(E \cap (e^{i\alpha} E_l)) < 2l$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Из (I5), используя монотонность функции $F(\theta)$ и известное неравенство (см., например, [6]): $|f'(e^{i\theta})| \geq |f'(-1;\rho,0)| > 0$, получаем, что при $0 < t < t^*$

$$\frac{du(t)}{dt} \leq F(u(t),t) - \delta, \quad \frac{dv(t)}{dt} = F(v(t),t), \tag{16}$$

$$u(0) = v(0). \tag{17}$$

Здесь $\delta > 0$ зависит только от E и ρ .

Из (I6), (I7) легко вытекает существование постоянной $\delta_1 > 0$ такой, что

$$u(t) \leq v(t) - \delta_1 t, \quad 0 < t \leq t' < t^*. \tag{18}$$

Так как множество функций $f(\xi)$, отображающих кольцо $K(\rho,1)$ на кольцо $K(r,1)$ с разрезом по жордановой кривой, плотно в классе $\mathcal{F}(\rho,r)$, то из (I8) вытекает утверждение теоремы в рассматриваемом случае.

Для множеств E, совпадающих с точностью до множества меры нуль с некоторой дугой $e^{i\alpha}E_\ell$, утверждение теоремы известно (см., например, [7]). Теорема доказана.

ДОБАВЛЕНИЕ. О полученном доказательстве теоремы 3 мною было написано письмо проф. Д.Гайеру. После этого я получил письмо от Р.Лаугезена в котором сообщается, что им также получено доказательство теоремы 3 и приведены краткие тезисы этого доказательства. Доказательство Р.Лаугезена отличается от нашего и использует теорию потенциала.

Литература

1. Baernstein A.II. Integral means, univalent functions and circular symmetrization. - Acta Math., 1974, vol.133, N 3-4, p.139-169.
2. Kühnau R. Über ein Modul-Kapazitätsproblem von D.Gaier. - Mitteilungen Math.Semin.Giessen, 1990, Hf.198, S.85-119.
3. Шиффер М. Некоторые новые результаты в теории конформных отображений. - Приложение к кн.: Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М., 1953, с.234-301.
4. Голузин Г.М. О параметрическом представлении функций, однолистных в кольце. - Матем.сб., 1951, т.29, № 2, с.469-476.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.3. М., 1967.
6. Duren P.L., Schiffer M. A variational method for functions schlicht in an annulus. - Arch.Rat.Mech., 1962, vol.9, № 3, p.260-272.
7. Jenkins J.A. Some theorems on boundary distortion. - Trans.Amer.Math.Soc., 1956, vol.81, N 2, p.477-500.

Solynin A.Yu. Boundary distortions and change of module under extension of a doubly connected domain.

Summary

Let $\mathcal{F}(\rho,\tau)$ denote the class of univalent analytic functions $f(z)$ in the domain $\mathcal{K}(\rho)=\{z:\rho<|z|<1\}$, satisfying $|f(z)|=1$ for $|z|=1$ and $\tau<|f(z)|<1$ for $z\in\mathcal{K}(\rho)$. Let $f(z;\rho,\tau)$ map $\mathcal{K}(\rho)$ onto the domain $\mathcal{K}(\tau)\setminus[\tau,s]$ and let $f(z;\rho,\tau)\in\mathcal{F}(\rho,\tau)$.

THEOREM 2. Let $f(z)\in\mathcal{F}(\rho,\tau)$, $f(z)\neq e^{i\alpha}f(z;\rho,\tau)$, $\alpha\in\mathbb{R}$,

and $\varphi(t)$ be a strictly convex monotone function of $t>0$. Then

$$\int_0^{2\pi}\varphi(|f'(e^{i\theta})|)d\theta<\int_0^{2\pi}\varphi(|f'(e^{i\theta};\rho,r)|)d\theta.$$

The proof of this theorem is based on the Golusin-Komatu equation.

If E is a continuum in the disk $U_R=\{z:|z|<R\}$, then $M(R,E)$ denotes the conformal module of the doubly connected component of $U_R\setminus E$; let $\mathcal{E}(m)=\{E:\overline{U}_r\subset E\subset U_1,\ M(1,E)=m^{-1}\}$.

PROBLEM. Find the maximum of $M(R,E)$, $R>1$, and the minimum of cap E over all E in $\mathcal{E}(m)$. This problem was posed by V.V.Koževnikov in a lecture to the seminare on geometric function theory at the Kuban university in 1980, and by D.Gaier (see [2]). The solution of this problem is given by the following theorem.

THEOREM 3. Let $E^*=\overline{U}_m\cup[m,s]$. If $R>1$; $E,E^*\in\mathcal{E}(m)$ and $E\neq e^{i\alpha}E^*$, $\alpha\in\mathbb{R}$, then

$$M(R,E)<M(R,E^*),\ \operatorname{cap}E^*<\operatorname{cap}E.$$

A similar statement is also proved for continua lying in the half-plane.

ADDENDUM. When the paper was ready for publication, the author obtained a letter from R.Laugesen with the information that he had also proved Theorem 3 by a different method based on results of A.Baernstein.II on potential theory.