

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. N. Ivchenko, S. K. Loyalka, R. V. Thompson, A method of solving the problem of heat transfer between two cylinders at arbitrary Knudsen numbers, *TVT*, 1993, Volume 31, Issue 4, 636–641

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

January 18, 2025, 17:29:05



УДК 533.6.011.8

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА МЕЖДУ ДВУМЯ ЦИЛИНДРАМИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

© 1993 г. И. Н. Ивченко, С. К. Лоялка, Р. В. Томпсон

Particulate Systems Research Center and Nuclear Engineering Program University of Missouri – Columbia, Missouri, 65211 USA

Поступила в редакцию 09.02.93 г.

Разработан метод для вычисления скобочных интегралов, содержащих разрывную двухстороннюю максвелловскую функцию распределения. Этот метод позволяет получить аналитические решения для различных систем моментных уравнений при всех числах Кнудсена. В статье рассмотрена задача переноса тепла между двумя коаксиальными цилиндрами. Введены новые специальные функции, дающие решение задачи, для которых приведена таблица численных значений. Приведено также приближенное аналитическое выражение для вычисления скобочных интегралов.

Проблемы, связанные с исследованием граничных задач переноса при произвольных числах Кнудсена, приобрели особую актуальность в последнее время благодаря не только фундаментальной научной значимости, но и широкой области практической применимости во многих областях науки и технологии. Между тем, сегодня бóльший прогресс достигнут в исследовании плоских граничных задач переноса благодаря использованию как аналитических [1, 2], так и численных методов [3 - 5].

Аналитические методы решения неплоских граничных задач переноса построены на основе моментных уравнений с использованием метода Лиза [6, 7] для замыкания моментной системы. Трудности, возникающие при вычислении моментов интеграла столкновений, содержащего разрывные двухсторонние максвелловские распределения, не позволили, вплоть до настоящего времени, получить последовательно строгие аналитические решения. Ранее указанные трудности были преодолены либо использованием максвелловской модели потенциала межмолекулярных взаимодействий [6, 7], либо применением приближенного метода для вычисления моментов оператора столкновений [8, 9].

Значительно бóльший успех в решении граничных задач переноса был достигнут в последнее время с помощью использования численных методов [10, 11], которые могут быть применены при решении многих граничных проблем переноса.

В данной работе разработан метод вычисления моментов интеграла столкновений, содержащего разрывные двухсторонние максвелловские распределения, который позволяет получить строгое аналитическое решение системы моментных уравнений. Указанный метод реализован на

примере решения задачи о переносе тепла между двумя бесконечными цилиндрами для молекул, взаимодействующих как жесткие сферы. Аналитическое решение получено благодаря использованию новых специальных функций, связанных с моментами интеграла столкновений, для которых в приложении дана таблица численных значений.

Постановка задачи. Данная работа посвящена получению аналитического решения при всех числах Кнудсена в четырехмоментном приближении задачи переноса тепла между двумя бесконечными цилиндрами. Для удобства величины n_0 , T_0 и R_1 , где n_0 , R_0 и R_1 – численная плотность, температура и радиус внутреннего цилиндра соответственно, выбраны как характеристические параметры газа и длины. Внешний цилиндр (радиус R_2) имеет температуру $T_0 - \Delta T$, где $\Delta T \ll T_0$. Наличие малого параметра $\Delta t = \Delta T/T_0$ позволяет линеаризовать задачу.

Для данной радиально-симметричной задачи моментное уравнение переноса любого молекулярного признака $Q(v)$ имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \int f v_r Q(v) dv) - \int \frac{1}{r} f (v_\theta^2 \frac{\partial Q(v)}{\partial v_r} - v_\theta v_r \frac{\partial Q(v)}{\partial v_\theta}) dv = R_1 \Delta Q(v), \quad (1)$$

где r – безразмерная радиальная координата ($r = \tilde{r}/R_1$); v_r , v_θ и v_z – декартовы координаты скорости молекулы; $\Delta Q(v)$ – момент интеграла столкновений.

Выбор $Q(v) = 1$, v_r , v^2 , $v_r v^2$ приводит к моментной системе в четырехмоментном приближении. Замыкание этой системы обеспечивает специальный выбор функции распределения. Для дан-

ной проблемы переноса лучшей функцией распределения, имеющей характерные особенности как свободномолекулярного, так и континуального распределений, является четырехпараметрическая двухсторонняя максвелловская функция, предложенная Лизом [6, 7]. В полном пространстве скоростей для этой функции распределения удобно использовать представление, предложенное в [8], которое имеет вид

$$f = f^{(0)} \left\{ 1 + \frac{1}{2} v^+ + \frac{1}{2} \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \tau^+ + \left[\frac{1}{2} v^- + \frac{1}{2} \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \tau^- \right] \text{sign}(c_r - c_r^*) \right\}. \quad (2)$$

Здесь

$$f^{(0)} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp(-c^2), \quad c = \left(\frac{m}{2kT_0} \right)^{1/2} v,$$

$$v^\pm(r) = v_2(r) \pm v_1(r), \quad \tau^\pm(r) = \tau_2(r) \pm \tau_1(r),$$

где $v_i(r)$ и $\tau_i(r)$ ($i = 1, 2$) – безразмерные поправки к характеристической плотности и температуре вне и внутри так называемого конуса влияния [6], на поверхности которого функция распределения разрывна в пространстве скоростей. Для данной цилиндрической геометрии поверхность конуса влияния представлена двумя пересекающимися плоскостями, проходящими через заданную точку $M(r)$ и являющихся касательными к поверхности внутреннего цилиндра. В скоростном пространстве поверхность разрыва функции распределения выражается в виде

$$c_r = c_r^*, \quad c_r^* = c_p \left(1 - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

где c_p – цилиндрическая координата скорости молекулы.

Моменты функции распределения удобно вычислять в цилиндрических координатах в пространстве скоростей. Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами определяется формулами

$$c_r = c_p \sin(\theta), \quad c_\theta = c_p \cos(\theta), \quad c_z = c_z. \quad (4)$$

Внутри и вне конуса влияния (области (2) и (1) в пространстве скоростей) угол θ удовлетворяет соотношениям $\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$, $\pi - \alpha < \theta < 2\pi + \alpha$, где $\alpha = \arccos(1/r)$. При вычислении моментов функции распределения использованы следующие соотношения [6]:

$$\int_{(2)} dc = \int_0^\infty c_p dc_p \int_{-\infty}^\infty dc_z \int_\alpha^{\pi-\alpha} d\theta, \quad (5)$$

$$\int_{(1)} dc = \int_0^\infty c_p dc_p \int_{-\infty}^\infty dc_z \int_{\pi-\alpha}^{2\pi+\alpha} d\theta. \quad (6)$$

Посредством этих соотношений, с помощью функции распределения (2), легко вычислить все моменты, входящие в систему, которая получена из (1) указанным выше выбором $Q(v)$. Эта система может быть приведена к виду

$$\frac{d}{dr} \left(v^- + \frac{1}{2} \tau^- \right) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dr} (v^+ + \tau^+) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dr} \left(v^- + \frac{3}{2} \tau^- \right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dr} (v^+ + 2\tau^+) = \frac{4\sqrt{2}}{5n_0} \left(\frac{m}{kT_0} \right)^{1/2} R_1 \Delta c^2 c_r. \quad (10)$$

В уравнении (10) величина $\Delta c^2 c_r$ выражается в виде

$$\Delta c^2 c_r = -n_0^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(v^- - \frac{3}{2} \tau^- \right) [\text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r] + \frac{1}{2} \tau^- [c^2 \text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r] \right\}, \quad (11)$$

где квадратные скобки $[\Psi(c), \Phi(c)]$ обозначают стандартные скобочные интегралы [12]. Аналитические выражения для этих интегралов и их представление через табулированные специальные функции $I^{*(1)}(r)$ и $I^{*(2)}(r)$ даны в приложении к данной статье.

Для определения постоянных интегрирования системы использована максвелловская модель граничных условий с предположением чисто диффузного отражения молекул с поверхности цилиндров. Параметры диффузно отраженных молекул определены путем использования коэффициента аккомодации энергии α_T .

Аналитическое решение для потока тепла. Введем некоторые новые специальные функции $I^{*(1)}(r)$ и $I^{*(2)}(r)$, связанные со скобочными интегралами посредством соотношений

$$[\text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r] = -\frac{2}{3} \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{1/2} \sigma^2 I^{*(1)}(r), \quad (12)$$

$$[c^2 \text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r] = \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{1/2} \sigma^2 I^{*(2)}(r), \quad (13)$$

где σ – диаметр молекулы. Множители, стоящие перед функциями, выражают значения скобочных интегралов для плоской геометрии [8]. Численные значения этих функций даны в табл. 1. На рис. 1 изображен график зависимости этих функций от безразмерной радиальной координаты.

Считая функции $I^{*(i)}(r)$ известными, легко найти аналитическое решение системы моментных уравнений, которое для полного потока тепла на

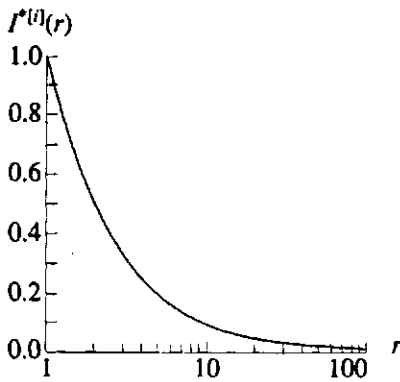


Рис. 1. График зависимости специальных функций $I^{*(i)}(r)$ от безразмерной радиальной координаты r .

единицу длины цилиндра может быть представлено в виде

$$\frac{Q}{Q^*} = \frac{1}{1 + \zeta \text{Kn}^{-1}}. \quad (14)$$

Здесь

$$Q^* = 2\pi R_1 \frac{p_0}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{1/2} \frac{\Delta T}{T_0} \frac{\alpha_T}{2 - \alpha_T z^{-1}}, \quad (15)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{\alpha_T}{2 - \alpha_T z^{-1}} [\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2], \quad (16)$$

где $\text{Kn} = \lambda/R_1$; $p_0 = n_0 k T_0$; $z = R_2/R_1$, $\alpha_1 = 8\sqrt{2}/15\pi$; $\alpha_2 = (8 + 3\pi)\sqrt{2}/30\pi$.

Величины ψ_1 и ψ_2 являются интегралами от специальных функций, которые имеют вид

$$\psi_1 = \int_1^z I^{*(1)}(r) dr, \quad \psi_2 = \int_1^z I^{*(2)}(r) dr.$$

Численные значения этих интегралов даны в табл. 2.

Обсуждение результатов. В табл. 2 приведены численные значения интегралов ψ_1 и ψ_2 от специальных функций при различных z . Как видно из табл. 2, эти функции с большой точностью (отклонение меньше 1%) ведут себя как $\ln(z)$ при всех рассмотренных значениях z , и, следовательно, $\zeta \sim \ln(R_2/R_1)$. Как видно из этой таблицы, численные значения указанных интегралов совпадают, однако доказательство тождественности интегралов ψ_1 и ψ_2 еще не выполнено. Необходимо проведение дополнительного исследования для установления аналитических свойств введенных специальных функций их асимптотического поведения, а также аналогичных свойств для интегралов от этих функций с переменным верхним пределом.

Таблица 1. Численные значения специальных функций $I^{*(i)}(r)$ при различных значениях радиальной координаты r ¹

r	$I^{*(1)}(r)$	$I^{*(2)}(r)$	r	$I^{*(1)}(r)$	$I^{*(2)}(r)$
1.00	0.9999	1.0000	8.00	0.1249	0.1250
1.10	0.9091	0.9090	9.00	0.1111	0.1110
1.20	0.8333	0.8333	10.00	0.1000	0.0999
1.30	0.7692	0.7691	12.00	0.0833	0.0833
1.40	0.7142	0.7142	15.00	0.0665	0.0667
1.50	0.6666	0.6666	17.00	0.0588	0.0588
1.75	0.5714	0.5714	20.00	0.0500	0.0499
2.00	0.4999	0.5000	25.00	0.0399	0.0400
2.50	0.3999	0.4000	30.00	0.0334	0.0332
3.00	0.3333	0.3333	50.00	0.0200	0.0199
3.50	0.2857	0.2857	60.00	0.0165	0.0167
4.00	0.2499	0.2500	70.00	0.0151	0.0132
5.00	0.2000	0.1999	80.00	0.0123	0.0123
6.00	0.1666	0.1666	90.00	0.0112	0.0110
7.00	0.1426	0.1430	100.00	0.0110	0.0090

¹ Численные значения указывают, что $I^{*(1)}(r) = I^{*(2)}(r)$, однако строгого доказательства этого соотношения еще не получено.

Таблица 2. Численные значения интегралов ψ_1 и ψ_2 для различных z ¹

z	ψ_1	ψ_2	z	ψ_1	ψ_2
1.00	0.0000	0.0000	1.75	0.5596	0.5596
1.05	0.0488	0.0488	2.00	0.6931	0.6931
1.10	0.0935	0.0935	3.00	1.0984	1.0983
1.20	0.1823	0.1823	4.00	1.3860	1.3860
1.30	0.2624	0.2624	5.00	1.6090	1.6090
1.40	0.3365	0.3365	7.00	1.9453	1.9454
1.50	0.4055	0.4055	10.0	2.3019	2.3021

¹ Численные значения указывают, что $\psi_1 = \psi_2$, однако строгого доказательства этого соотношения еще не получено.

Рассмотрим различные предельные случаи формулы (14). Свободномолекулярный режим для данной геометрии определяется не только величиной числа Кнудсена, а более сложным условием, которое выражается в виде

$$\zeta \text{Kn}^{-1} \ll 1 \quad \text{или} \quad \ln(R_2/R_1) \text{Kn}^{-1} \ll 1. \quad (17)$$

Если это условие выполнено, выражение для потока тепла точно совпадает со свободномолекулярным пределом.

Рассмотрим другой предельный случай, когда $R_1 \gg \lambda$ и $R_2 = R_1 + h$, где $h \ll R_1$. В этом случае $z = 1 + x$, $x = h/R_1$. Разложение функции $\zeta(z) = \zeta(1 + x)$

в ряд Тейлора по степеням x в первом приближении дается формулой

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{\alpha_T}{2 - \alpha_T} (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{h}{R_1} = (0.2508) \frac{h}{R_1} \frac{\alpha_T}{2 - \alpha_T} \quad (18)$$

Если это выражение использовать в формуле (14), она точно переходит в соответствующую формулу для плоской задачи [8].

В континуальном режиме, который определяется условием

$$\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \frac{R_1}{\lambda} \gg 1, \quad (19)$$

поток тепла определяется формулой

$$Q = 4\pi p_0 \left(\frac{2kT_0}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{\Delta T}{T} \frac{\lambda}{\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2} \quad (20)$$

Сравнивая это выражение с классической формулой для потока тепла между двумя цилиндрами, легко получить коэффициент теплопроводности газа, который может быть представлен в виде

$$\kappa = \frac{2}{\pi} \frac{\ln(R_2/R_1)}{\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2} \left(\frac{k^3 T_0}{\pi m} \right)^{1/2} \sigma^{-2}, \quad (21)$$

где σ — диаметр молекулы. Например, для $z = 10$

$$\kappa = (1.2696) \left(\frac{k^3 T_0}{\pi m} \right)^{1/2} \sigma^{-2}. \quad (22)$$

Численный коэффициент в этом выражении превышает соответствующий коэффициент, вычисленный по теории Чепмена-Энскога на 6%. Это различие можно объяснить отсутствием в аппроксимирующей функции распределения (2) членов, пропорциональных потоку тепла.

Приложение. С моментной системой в данном приближении связаны следующие скобочные интегралы:

$$[\text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r], \quad [c^2 \text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r]. \quad (23)$$

Например, аналитическое выражение первого из этих интегралов для молекул в виде жестких упругих сфер в случае цилиндрической геометрии имеет вид

$$\begin{aligned} [\text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r] &= \frac{\sigma^2}{2\pi^3} \left(\frac{kT_0}{m} \right)^{1/2} \times \\ &\times \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\epsilon \int_0^\pi \sin(\alpha) d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-G_r^2) dG_r \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-G_\theta^2) dG_\theta \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-G_z^2) dG_z \int_0^\infty g^3 \exp(-g^2) dg \times \\ &\times \frac{2}{\sqrt{2}} \{ G_r (g_r^2 - g_r'^2) + G_\theta (g_\theta g_\theta - g_\theta' g_\theta') + \\ &+ G_z (g_z g_z - g_z' g_z') \} \text{sign} \left(G_r - g_r - \right. \\ &\left. - \sqrt{(G_r - g_r)^2 + (G_\theta - g_\theta)^2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} (G - g), \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (G + g), \quad (25)$$

$$g_r = g \cos(\alpha), \quad g_\theta = g \sin(\alpha) \cos(\beta), \quad (26)$$

$$g_z = g \sin(\alpha) \sin(\beta).$$

Координаты относительной скорости молекул после столкновения определяются формулами [14]

$$g_r' = g [\cos(\alpha) \cos(\theta) - \sin(\alpha) \sin(\theta) \cos(\epsilon)], \quad (27)$$

$$g_\theta' = g [\sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\theta) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\theta) \cos(\epsilon) - \sin(\beta) \sin(\theta) \sin(\epsilon)], \quad (28)$$

$$g_z' = g [\sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\theta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\theta) \cos(\epsilon) + \cos(\beta) \sin(\theta) \sin(\epsilon)]. \quad (29)$$

Учитывая значения скобочных интегралов в случае плоской геометрии [8], удобно представить рассматриваемые интегралы в форме

$$[\text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r] = -\frac{2}{3} \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{1/2} \sigma^2 I^{*(1)}(r), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} [c^2 \text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r] &= \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{1/2} \sigma^2 I^{*(2)}(r). \end{aligned} \quad (31)$$

Посредством этих соотношений введены новые специальные функции $I^{*i(l)}(r)$, связанные с данной моментной системой переноса.

После интегрирования по всем значениям переменных θ, ε, g в выражении (24) и в аналогичном выражении для второго скобочного интеграла удобно ввести для других интегрирований новые переменные посредством соотношений

$$G_r = xg, G_\theta = yg, G_z = zg, \cos(\alpha) = t. \quad (32)$$

Тогда функции $I^{*i(l)}(r)$ могут быть выражены в виде

$$I^{*1(1)}(r) = -\frac{72}{\pi^2} I^{(1)}(r), \quad (33)$$

$$I^{*1(2)}(r) = \frac{1440}{\pi^2(8+3\pi)} I^{(2)}(r). \quad (34)$$

Здесь

$$I^{(1)}(r) = \int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{x_0}^{\infty} dx \int F(t, \beta, x, y, z) dz, \quad (35)$$

$$I^{(2)}(r) = \int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{x_0}^{\infty} dx \int F(t, \beta, x, y, z) \times \Phi(t, \beta, x, y, z) dz, \quad (36)$$

где

$$x_0 = t + |y - \sqrt{1-t^2} \cos(\beta)| (r^2 - 1)^{1/2}. \quad (37)$$

Функции F и Φ представляют собой соотношения

$$F(t, \beta, x, y, z) = \left\{ x \left(t^2 - \frac{1}{3} \right) + yt \sqrt{1-t^2} \cos(\beta) + zt \sqrt{1-t^2} \sin(\beta) \right\} / (1+x^2+y^2+z^2)^5, \quad (38)$$

$$\Phi(t, \beta, x, y, z) = 1 - \left\{ 2xt + 2y \sqrt{1-t^2} \cos(\beta) + 2z \sqrt{1-t^2} \sin(\beta) \right\} / (1+x^2+y^2+z^2). \quad (39)$$

После интегрирования по переменным z и x интегралы (35), (36) могут быть представлены в виде

$$I^{(i)}(r) = \int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\infty} \Psi_i(t, \beta, y) dy, \quad (40)$$

где функции Ψ_i являются довольно громоздкими алгебраическими выражениями, которые не приводятся в данной статье.

Дальнейшие интегрирования удобно выполнять численно, что позволяет получить табулированные значения специальных функций $I^{*i(l)}(r)$, которые приведены в табл. 1. На рис. 1 изображены графики этих функций.

Введенные специальные функции могут быть использованы во многих задачах переноса. В дру-

гих моментных приближениях наряду с рассмотренными функциями будут встречаться и другие функции, связанные с соответствующими скобочными интегралами, для анализа которых может быть использован предложенный метод, основанный на численном интегрировании.

Следует отметить, что для скобочных интегралов, которые возникают в моментных системах при указанном выборе молекулярных признаков $Q(c)$, можно получить очень простые приближенные аналитические выражения, используя общие свойства уравнения Больцмана, которые детально проанализированы в [13]. Получим приближенные аналитические выражения для скобочных интегралов, используя свойства решения Чепмена-Энскога. Например, интеграл (30) записывается в виде

$$\begin{aligned} & [\text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r] = \\ & = -[\text{sign}(c_r - c_r^*), c_r S_{3/2}^{(1)}(c^2)] = \\ & = -\int \text{sign}(c_r - c_r^*) I(c_r S_{3/2}^{(1)}(c^2)) dv, \end{aligned} \quad (41)$$

где $S_{3/2}^{(1)}(c^2)$ – полиномы Сонина [12].

Радиальная составляющая решения Чепмена-Энскога для теплопроводности удовлетворяет уравнению [12]

$$nI(A_r) = f^{(0)} \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) c_r, \quad (42)$$

где функция A_r может быть представлена в виде ряда по полиномам Сонина

$$A_r = \sum_{p=1}^{\infty} a_p c_r S_{3/2}^{(p)}(c^2) \approx a_1 c_r S_{3/2}^{(1)}(c^2). \quad (43)$$

Решение Чепмена-Энскога в первом приближении удовлетворяет уравнению

$$na_1 I(c_r S_{3/2}^{(1)}(c^2)) = f^{(0)} \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) c_r. \quad (44)$$

Следовательно, интеграл (41) может быть приближенно представлен в виде

$$\begin{aligned} & [\text{sign}(c_r - c_r^*), c^2 c_r] = \\ & = \frac{1}{na_1} \int c_r S_{3/2}^{(1)}(c^2) f^{(0)} \text{sign}(c_r - c_r^*) dv, \end{aligned} \quad (45)$$

где a_1 дается формулой [12]

$$a_1 = -\frac{15}{16\sqrt{2}\pi} \left(\frac{m}{2kT_0} \right)^{1/2} \sigma^{-2}. \quad (46)$$

Интеграл (45) является обычным интегралом в скоростном пространстве, который может быть легко вычислен с использованием формул (5) и (6). Аналогичное выражение может быть получено для интеграла (31). Простые вычисления дают

следующие приближенные аналитические выражения для функций $I^{*[1]}(r)$:

$$I^{*[1]}(r) = \frac{4\sqrt{2}}{5} \frac{1}{r}, \quad (47)$$

$$I^{*[2]}(r) = \frac{64\sqrt{2}}{5(8+3\pi)} \frac{1}{r}. \quad (48)$$

Эти выражения являются приближенными, однако точность этих формул может быть легко оценена путем сравнения с соответствующими численными значениями. Относительные отклонения от численных результатов, даваемые (47) и (48), порядка 13 и 4% соответственно.

Эта работа стала возможной благодаря финансовой поддержке, обеспеченной новыми исследовательскими программами агентства по охране окружающей среды, США (Exploratory Research Program, US EPA) и поддержке фулбрайтовского фонда (US Fulbright grant) для проф. И.Н. Ивченко.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gross E.P., Ziering S. // *Phys Fluids*. 1958. V. 1. P. 215.
2. Gross E.P., Ziering S. // *Phys Fluids*. 1959. V. 2. P. 701.
3. Loyalka S.K., Hickey K.A. // *J. Appl. Math. Phys.* 1990. V. 41. P. 245.
4. Loyalka S.K. // *Phys. Fluids A*. 1989. V. 1. P. 403.
5. Loyalka S.K., Hickey K.A. // *Physica*. 1989. V. A160. P. 395.
6. Lees L. // *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 1965. V. 13. P. 278.
7. Lees L., Liu C.Y. // *Phys Fluids*. 1962. V. 5. P. 1137.
8. Ivchenko I.N. // *J. Colloid Interface Sci.* 1990. V. 135. P. 16.
9. Ivchenko I.N. // *J. Colloid Interface Sci.* 1987. V. 120. P. 1.
10. Loyalka S.K. // *Phys. Fluids A*. 1992. V. 4. P. 1049.
11. Loyalka S.K. // *J. Aerosol Sci.* 1992. V. 23. P. 291.
12. Chapman S., Cowling T.G. *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. Cambridge Univ. Press, 1990.
13. Loyalka S.K. // *Phys. Fluids*. 1971. V. 14. P. 2291.
14. Jeans J. *Dynamical Theory of Gases*. Cambridge Univ. Press, 1925.