Х. М. Девадзе, Соотношения, определяющие упорядоченность в упорядоченной полугруппе всех бинарных отношений в конечном множестве,
Изв. вузов. Матем., 1968, номер 3, 28–36

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 519.40

Х. М. Девадзе

СООТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УПОРЯДОЧЕННОСТЬ В УПОРЯДОЧЕННОЙ ПОЛУГРУППЕ ВСЕХ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ В КОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ

Мы будем рассматривать полугруппу $\overline{S}_\Omega$ всех бинарных отношений [5] — [8] в конечном множестве $\Omega=\{1, 2, \ldots, n\}$. Известно, что существует изоморфизм φ ([3], гл. XIII, § 5; [8], § 4) полугруппы $\overline{S}_\Omega$ на полугруппу S_Ω всех матриц отношений порядка n, состоящих из нулей и единиц, где матрицы отношения умножаются обычным способом, и для элементов 0 и 1 следующим образом определено сложение, умножение и упорядоченность:

$$0+0=0, \qquad 0\cdot 0=0,$$
$$0+1=1+0=1, \qquad 0\cdot 1=1\cdot 0=0, \quad 0<1,$$
$$1+1=1, \qquad 1\cdot 1=1.$$

При изоморфизме φ каждому бинарному отношению $\overline{A}$ из $\overline{S}_\Omega$ соответствует матрица отношения $A=\|a_{ij}\|$ из S_Ω, в которой $a_{ij}=1$, если $(i, j)\in\overline{A}$, и $a_{ij}=0$, если $(i, j)\overline{\in}\,\overline{A}$. В полугруппе $\overline{S}_\Omega$ следующим образом определяется отношение $\leqslant$: будем говорить, что $\overline{A}\in\overline{S}_\Omega$ содержится в $\overline{B}\in\overline{S}_\Omega$, и $\overline{A}\leqslant\overline{B}$, если из $(i, j)\in\overline{A}$ всегда следует $(i, j)\in\overline{B}$. Отношение $\leqslant$ в полугруппе $\overline{S}_\Omega$ является двусторонне стабильным отношением упорядоченности (см. 1.3 и 1.4). Поэтому полугруппу $\overline{S}_\Omega$ всех бинарных отношений в конечном множестве Ω можно рассматривать как частично упорядоченную полугруппу.

В настоящей работе доказано, что существует единственным образом определенная минимальная совокупность соотношений предшествования, определяющая упорядоченность в упорядоченной полугруппе S_Ω матриц отношений порядка n. (Поэтому в дальнейшем мы будем писать „матрица“, имея в виду матрицу отношения.)

В статье используются основные понятия из [1] и [2].

§ 1. Простейшие свойства матриц отношений

1.1. Определение. Матрица $A\in S_\Omega$ называется мономиальной, если в ней каждая строка и каждый столбец содержат только одну единицу.

С помощью мономиальных матриц в произвольной матрице A можно переставить строки и столбцы, для чего матрицу A надо умножить соответственно слева или справа на некоторую мономиальную матрицу ([4], гл. II, 6,10; [9], гл. VI, § 1).

1.2. Определение. В матрице $A=\|a_{ij}\|$ порядка n j-я строка $(a_{j1}a_{j2}\cdots a_{jn})$ называется подстрокой i-й строки $(a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in})$, если $a_{ik}\geqslant a_{jk}$ для всех $k=1, 2, \dots, n$; j-я строка называется собственной подстрокой i-й строки, если $a_{ik}\geqslant a_{jk}$ для всех $k=1, 2, \dots, n$ и существует $1\leqslant t\leqslant n$, для которого $a_{it}>a_{jt}$.

1.3. Будем говорить, что матрица $A=\|a_{ij}\|$ из S_Ω содержится в матрице $B=\|b_{ij}\|$ из S_Ω, и писать $A\leqslant B$, если $a_{ij}\leqslant b_{ij}$ для всех $i, j=1, 2, \dots, n$. Легко заметить, что отношение $\leqslant$ в полугруппе S_Ω является отношением упорядоченности. Если $A\leqslant B$, но $A\neq B$, то будем писать $A<B$.

1.4 Лемма. *Если A, B, $C\in S_\Omega$ и $A\leqslant B$, то $AC\leqslant BC$, $CA\leqslant CB$; т. е. в полугруппе S_Ω отношение $\leqslant$ является стабильным отношением упорядоченности.*

Доказательство. Пусть $A=\|a_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\|$, $C=\|c_{ij}\|$, $AC=\|d_{ij}\|$, $BC=\|e_{ij}\|$. Если

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}=1,$$

то при некотором $1\leqslant t\leqslant n$ имеем $a_{it}=1$, $c_{tj}=1$. Тогда из $A\leqslant B$ следует, что $b_{it}=1$, и поэтому

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}=1.$$

Следовательно, $AC\leqslant BC$.

Аналогично доказывается $CA\leqslant CB$.

1.5. Определение. Матрица $A=\|a_{ij}\|$ порядка n называется рефлективной, если $a_{ii}=1$ для всех $i=1, 2, \dots, n$.

1.6. Матрицу $A=\|a_{ij}\|$ порядка n, в которой по главной диагонали имеется $n-1$ единиц, а все остальные элементы — нули, назовем матрицей типа p; при этом, если $a_{ii}=0$, то ее обозначим через P_{ii}. Матрица типа p обладает следующими свойствами: 1) $P_{ii}A$ есть матрица, в которой i-я строка нулевая, а все остальные строки соответственно равны строкам матрицы A; 2) AP_{ii} есть матрица, в которой i-й столбец нулевой, а все остальные столбцы соответственно равны столбцам матрицы A.

1.7. Рефлективную матрицу порядка n, содержащую $n+1$ единиц, назовем матрицей типа t; при этом, если недиагональная единица стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца, то ее обозначим через T_{ij}. Матрица типа t обладает следующими свойствами: 1) $T_{ij}A$ есть матрица, в которой i-я строка есть сумма i-й и j-й строки матрицы A, а все остальные строки соответственно равны строкам матрицы A; 2) AT_{ij} есть матрица, в которой j-й столбец есть сумма i-го и j-го столбца, а все остальные столбцы соответственно равны столбцам матрицы A.

1.8. Определение. Пусть $A=\|a_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\|$, $C=\|c_{ij}\|\in S_\Omega$ и

$$AB=C. \tag{1}$$

Элемент $a_{ij}=1$ матрицы A называется нежесткой единицей матрицы A относительно равенства (1), если найдется такая матрица $A_1=\|a'_{pq}\|$, что $A_1B=C$ и $a'_{pq}=a_{pq}$ ($p\neq i$ или $q\neq j$), $a'_{ij}=0$; в противном случае элемент $a_{ij}=1$ матрицы A называется жесткой единицей матрицы A относительно равенства (1).

Аналогично определяются жесткие и нежесткие единицы матрицы B относительно равенства (1).

Очевидно, что если относительно равенства (1) матрицы A и B обладают нежесткими единицами, то существует такое равенство $XY=C$, где $X, Y \in S_\Omega$, относительно которого матрицы X и Y не имеют нежестких единиц и $X \leqslant A$, $Y \leqslant B$.

1.9. Через $N(A)$ обозначим число единиц в матрице A.

Лемма. *Если в матрицах $A=\|a_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\| \in S_\Omega$ все единицы жесткие относительно равенства $AB=C$, то $N(A) \leqslant N(C)$ и $N(B) \leqslant N(C)$.*

Доказательство. Будем говорить, что единица $a_{ij}=1$ матрицы A образует k единиц матрицы C, если j-я строка матрицы B содержит k единиц. Пусть в i-й строке матрицы A имеется $k \leqslant n$ единиц. Так как все единицы в матрице A жесткие относительно равенства $AB=C$, то каждая единица a_{ik} из i-й строки матрицы A образует множество M единиц i-й строки матрицы C. Из множества M отбросим те единицы, которые образуются другими единицами i-й строки матрицы A, после чего в множестве M останется хотя бы одна единица (в противном случае $a_{ik}=1$ будет нежесткой единицей матрицы A относительно равенства $AB=C$). Таким образом, каждой единице из i-й строки матрицы A можно поставить в соответствие единицу из i-й строки матрицы C, которую образует только данная единица. Отсюда следует, что число единиц в i-й строке матрицы A не превосходит число единиц в i-й строке матрицы C. Следовательно, $N(A) \leqslant N(C)$.

Аналогично доказывается $N(B) \leqslant N(C)$.

1.10 Лемма. *Пусть в матрицах A, $B \in S_\Omega$ все единицы жесткие относительно равенства $AB=C$.*

Тогда: 1) *если какая-нибудь строка матрицы B содержит не менее двух единиц, то $N(A) < N(C)$;* 2) *если какой-нибудь столбец матрицы A содержит не менее двух единиц, то $N(B) < N(C)$.*

Доказательство. 1) Пусть i-я строка матрицы B содержит не менее двух единиц. По предыдущей лемме $N(A) \leqslant N(C)$. Пусть $N(A)=N(C)$. Тогда, по доказательству предыдущей леммы, число единиц в i-й строке матрицы A равно числу единиц в i-й строке матрицы C, и каждая единица i-й строки матрицы A образует только одну единицу из i-й строки матрицы C. Отсюда следует, что всякая ненулевая строка матрицы B содержит только одну единицу, что противоречит условию. Следовательно, $N(A) < N(C)$.

Аналогично доказывается 2).

1.11. Определение. Матрица $A \in S_\Omega$ называется неразложимой в S_Ω, если из $A=XY$, где X, $Y \in S_\Omega$, всегда следует, что X или Y есть мономиальная матрица.

Теорема. *Любая мономиальная матрица неразложима.*

Доказательство. Пусть P — мономиальная матрица из S_Ω и $P=XY$, где X, $Y \in S_\Omega$. Покажем, что X и Y являются мономиальными матрицами. Рассмотрим равенство $P=X_1Y_1$, относительно которого матрицы X_1 и Y_1 не имеют нежестких единиц, $X_1 \leqslant X$, $Y_1 \leqslant Y$. По лемме 1.9. $N(Y_1) \leqslant N(P)=n$. Так как матрица P не имеет нулевых столбцов, то $N(Y_1)=n$. Аналогично, $N(X_1)=n$. Отсюда по лемме 1.10 следует, что в матрице X_1 нет нулевого столбца, а в матрице Y_1 нулевой строки. Следовательно, матрицы X_1 и Y_1 являются мономиальными. Тогда, очевидно, $X_1=X$ и $Y_1=Y$.

1.12. Определение. Пусть A, B, $C \in S_\Omega$. Матрица C называется общим левым делителем матриц A и B в полугруппе S_Ω, если существуют такие матрицы X, $Y \in S_\Omega$, что $A=CX$, $B=CY$.

Аналогично определяется общий правый делитель матриц A и B в полугруппе S_Ω.

1.13. Определение. Матрицы A, $B \in S_\Omega$ называются взаимно простыми в S_Ω, если они не имеют общих ни левых, ни правых делителей, отличных от мономиальной матрицы.

1.14. Определение. Будем говорить, что матрица $B \in S_\Omega$ покрывает матрицу $A \in S_\Omega$, и писать $A \overset{p}{<} B$, если $A < B$ и $N(B) = N(A) + 1$.

Лемма. *Если A, B, $C \in S_\Omega$; $A \overset{p}{<} B$ и C — общий левый делитель матриц A и B, то найдутся такие матрицы X, $Y \in S_\Omega$, что $A = CX$, $B = CY$ и $X \overset{p}{<} Y$.*

Доказательство. Пусть $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, $C = \|c_{ij}\|$. По условию, существуют такие индексы p, q, что $b_{pq} = 1$, $a_{pq} = 0$ и для остальных индексов $a_{ij} = b_{ij}$. Пусть $B = CY_1$ и $A = CX$, где $Y_1 = \|y'_{ij}\|$, $X = \|x_{ij}\|$. Из

$$b_{pq} = \sum_{r=1}^{n} c_{pr} y'_{rq} = 1$$

следует, что при некотором $1 \leqslant k \leqslant n$ имеет место $c_{pk} = 1$, $y'_{kq} = 1$. Легко заметить, что в матрице X элемент $x_{kq} = 0$.

Пусть $Y = \|y_{ij}\|$, где $y_{kq} = 1$, а остальные элементы соответственно равны элементам матрицы X. Легко убедиться, что $X \overset{p}{<} Y$ и $B = CY$.

1.15. Лемма. *Если A, B, $C \in S_\Omega$; $A \overset{p}{<} B$ и C — общий правый делитель матриц A и B, то найдутся такие матрицы X, $Y \in S_\Omega$, что $A = XC$, $B = YC$* и $X \overset{p}{<} Y$.

Доказывается аналогично лемме 1.14.

1.16. Лемма. *Если $A, C \in S_\Omega$, A не содержит нулевых строк, матрица C является левым делителем матрицы A и $P < C$, где P — мономиальная матрица, то найдется такая матрица $X \in S_\Omega$, что $A = CX$ и $N(X) < N(A)$.*

Доказательство. Пусть $A = CX_1$. Тогда $A = CX_1 = CP^{-1}PX_1$. Легко заметить, что CP^{-1} — рефлективная матрица; поэтому $PX_1 \leqslant A$ и $N(PX_1) \leqslant N(A)$. Отсюда имеем $N(X_1) \leqslant N(A)$. Если $N(X_1) < N(A)$, то лемма доказана.

Пусть $N(X_1) = N(A)$. Тогда $PX_1 = A$. Пусть $CP^{-1} = B$. Имеем $A = CP^{-1}PX_1 = BA$, где B — рефлективная неединичная матрица. Из $A = BA$ следует, что в матрице B все недиагональные единицы являются нежесткими относительно равенства $A = BA$ (см. 1.8). Поэтому существует такая матрица $T_{ik} \leqslant B$, что $A = T_{ik}A$. Отсюда следует, что в матрице A k-я строка является подстрокой i-й строки (см. 1.2; 1.7). Имеем $A = T_{ik}P_{ii}A$ (см. 1.6). Легко заметить, что $N(P_{ii}A) < N(A)$, $A = BP_{ii}A = CP^{-1}P_{ii}A$. Пусть $P^{-1}P_{ii}A = X$. Тогда имеем $A = CX$ и $N(X) = N(P^{-1}P_{ii}A) = N(P_{ii}A) < N(A)$.

1.17. Лемма. *Если A, $C \in S_\Omega$, матрица C — правый делитель матрицы A и $P < C$, где P — мономиальная матрица, то найдется такая матрица $X \in S_\Omega$, что $A = XC$ и $N(X) < N(A)$.*

Доказывается аналогично предыдущей лемме.

1.18. Лемма. *Если матрица $A \in S_\Omega$ не имеет нулевых строк,*

$A \overset{p}{<} B$, *матрица* $C \in S_\Omega$ — *общий левый делитель* A *и* B, *причем* $P < C$, *где* P — *мономиальная матрица, то найдутся такие матрицы* X, $Y \in S_\Omega$, *что* 1) $A = CX$, $B = CY$; 2) $N(X) < N(A)$; 3) $X \overset{p}{<} Y$.

Доказательство. По лемме 1.16 существует такая матрица X, что $A = CX$ и $N(X) < N(A)$, а по лемме 1.14 существует такая матрица Y, что $X \overset{p}{<} Y$ и $B = CY$.

1.19. Лемма. *Если матрица* $A \in S_\Omega$ *не имеет нулевых столбцов,* $A \overset{p}{<} B$, *матрица* $C \in S_\Omega$ — *общий правый делитель* A *и* B, *причем* $P < C$, *где* P — *мономиальная матрица, тогда найдутся такие матрицы* X, $Y \in S_\Omega$, *что* 1) $A = XC$, $B = YC$; 2) $N(X) < N(A)$; 3) $X \overset{p}{<} Y$.

Доказывается аналогично предыдущей лемме, если применить леммы 1.17 и 1.15.

§ 2. Упорядоченная полугруппа S_Ω

2.1. Обозначим через $\Gamma(S_\Omega)$ совокупность всех соотношений предшествования в полугруппе S_Ω. В множестве $\Gamma(S_\Omega)$ следующим образом определим отношение ρ: $(A_1 < B_1) \sim (A_2 < B_2)(\rho)$, если существуют такие мономиальные матрицы P и Q, что $A_2 = PA_1Q$, $B_2 = PB_1Q$. Легко заметить, что отношение ρ в множестве $\Gamma(S_\Omega)$ является отношением эквивалентности. Множество $\Gamma(S_\Omega)$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных соотношений предшествования.

2.2. Обозначим через $\Psi(S_\Omega)$ совокупность представителей всех тех классов эквивалентных соотношений предшествования, в каждом из которых содержится хотя бы одно соотношение предшествования $A < B$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $A \overset{p}{<} B$, 2) A и B взаимно просты, 3) B не содержит нулевых строк и столбцов.

2.3. Лемма. *Любое соотношение предшествования*

$$P_{ii}P \overset{p}{<} P, \tag{2}$$

где P — *мономиальная матрица* $(i = 1, 2, \dots, n)$, *является следствием из* $\Psi(S_\Omega)$.

Доказательство. Легко заметить, что все соотношения предшествования вида (2) образуют отдельный класс L эквивалентных соотношений предшествования. Представитель этого класса содержится в $\Psi(S_\Omega)$, так как всякое соотношение предшествования вида (2) удовлетворяет условиям 1) — 3) из 2.2 (см. 1.11).

Пусть $P_{jj}P \overset{p}{<} P$ есть представитель класса L, который содержится $\Psi(S_\Omega)$. Тогда $P_{jj}PP^{-1} \overset{p}{<} PP^{-1}$, т. е. соотношение предшествования $P_{jj} \overset{p}{<} E$, где E — единичная матрица, есть следствие из $\Psi(S_\Omega)$. Теперь легко заметить, что с помощью мономиальных матриц из $P_{jj} \overset{p}{<} E$ можно получить все соотношения предшествования вида (2) (см. 1.1).

2.4. Лемма. *Любое соотношение предшествования* $P \overset{p}{<} T_{ij}$, *где* P — *мономиальная матрица, является следствием из* $\Psi(S_\Omega)$.

Доказывается аналогично предыдущей лемме.

2.5. Лемма. *Любое соотношение предшествования $A \overset{p}{<} B$ из $\Gamma(S_\Omega)$, где A содержит одну нулевую строку или один нулевой столбец, а матрица B не содержит нулевых строк и столбцов, является следствием из $\Psi(S_\Omega)$.*

Доказательство. 1) Пусть в матрице A i-я строка нулевая. Тогда, очевидно, в i-й строке матрицы B имеется только одна единица. Имеем $A = P_{ii}B \overset{p}{<} EB = B$. Отсюда и из того, что по лемме 2.3 $P_{ii} \overset{p}{<} E$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$, следует: $A \overset{p}{<} B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$. 2) Случай, когда A содержит один нулевой столбец, доказывается аналогично.

2.6. Лемма. *Любое соотношение предшествования $A \overset{p}{<} B$ из $\Gamma(S_\Omega)$, где B содержит нулевые столбцы или нулевые строки, является следствием из $\Psi(S_\Omega)$.*

Доказательство. 1) Пусть матрица B содержит k нулевых строк. Не нарушая общности, примем, что в матрице B только последние k строк являются нулевыми. Очевидно, тогда в матрице A последние k строк являются нулевыми.

Пусть $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, $a_{pq} = 0$, $b_{pq} = 1$ и для остальных индексов $a_{ij} = b_{ij}$. Имеем

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots a_{1\,q-1} & a_{1\,q} & a_{1\,q+1} & \cdots a_{1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p\,1} & \cdots a_{p\,q-1} & 0 & a_{p\,q+1} & \cdots a_{p\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-k\,1} & \cdots a_{n-k\,q-1} & a_{n-k\,q} & a_{n-k\,q+1} & \cdots a_{n-k\,n} \\ 0 & \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \end{matrix} \right\| \overset{p}{<}$$

$$\overset{p}{<} \left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots a_{1\,q-1} & a_{1\,q} & a_{1\,q+1} & \cdots a_{1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p\,1} & \cdots a_{p\,q-1} & 1 & a_{p\,q+1} & \cdots a_{p\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-k\,1} & \cdots a_{n-k\,q-1} & a_{n-k\,q} & a_{n-k\,q+1} & \cdots a_{n-k\,n} \\ 0 & \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \end{matrix} \right\| = B.$$

Пусть $A_1 = \|a^1{}_{ij}\|$, причем $a^1{}_{nq} = 1$, все остальные $a^1{}_{ij} = a_{ij}$. Тогда $A = P_{nn}A_1$ и $B = P_{nn}T_{pn}A_1$. Так как по лемме 2.4 соотношение предшествования $E \overset{p}{<} T_{pn}$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$ и $A = P_{nn}EA_1 \overset{p}{<} P_{nn}T_{pn}A_1 = B$, то $A \overset{p}{<} B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$.

2.7. Лемма. *Если $A \overset{p}{<} B$ и матрицы A и B имеют общий левый делитель C, который содержит хотя бы один нулевой столбец, то $A \overset{p}{<} B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $A = CX$ и i-й столбец матрицы C нулевой. Имеем $A = CP_{ii}X = CX_1$, где $P_{ii}X = X_1$. В матрице X_1 i-я строка нулевая. По лемме 1.14 существует такая матрица $Y_1 \in S_\Omega$, что $X_1 \overset{p}{<} Y_1$ и $B = CY_1$. Если матрица Y_1 не содержит нулевых строк и столбцов, то по лемме 2.5 $X_1 \overset{p}{<} Y_1$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$. Если матрица Y_1 содержит нулевые строки или нулевые столбцы, то по лемме 2.6 $X_1 \overset{p}{<} Y_1$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$. Тогда, очевидно, $A = CX_1 \overset{p}{<} CY_1 = B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$.

Следствие. Если $A \overset{p}{<} B$, матрицы A и B имеют общий левый делитель C, $A = CX$ и матрица X содержит хотя бы одну нулевую строку, то $A \overset{p}{<} B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$.

2.8. Лемма. *Если $A \overset{p}{<} B$ и матрицы A и B имеют общий правый делитель C, который содержит хотя бы одну нулевую строку, то $A \overset{p}{<} B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$.*

Доказывается аналогично предыдущей лемме.

Следствие. Если $A \overset{p}{<} B$, матрицы A и B имеют общий правый делитель C, $A = XC$ и матрица X содержит хотя бы один нулевой столбец, то $A \overset{p}{<} B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$.

2.9. Теорема. *Любая совокупность соотношений предшествования вида $\Psi(S_\Omega)$ является минимальной совокупностью, определяющей упорядоченность в упорядоченной полугруппе S_Ω, и никаких других минимальных совокупностей, определяющих упорядоченность, в полугруппе S_Ω не имеется.*

Доказательство. 1) Сначала докажем, что всякое соотношение предшествования $A \overset{p}{<} B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$. Из лемм 2.5 и 2.6 следует, что всякое соотношение предшествования $A \overset{p}{<} B$, где матрица A содержит хотя бы одну нулевую строку или один нулевой столбец, является следствием из $\Psi(S_\Omega)$. Пусть матрицы A и B не имеют нулевых строк и столбцов. Применим индукцию по $N(B)$. Если $N(B) = n + 1$, то по лемме 2.4 $A \overset{p}{<} B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$. Допустим, что всякое соотношение предшествования $A \overset{p}{<} B$, где $N(B) \leqslant n + k$, является следствием из $\Psi(S_\Omega)$, и докажем, что всякое соотношение предшествования $A \overset{p}{<} B$, где $N(B) = n + k + 1$, является следствием из $\Psi(S_\Omega)$. Пусть немономиальная матрица C является общим левым делителем матриц A и B. Имеем $A = CX$, $B = CY$. Матрица C не содержит нулевых строк, а матрица X нулевых столбцов, так как матрица A не содержит нулевых строк и столбцов. Если матрица C содержит нулевые столбцы или матрица X содержит нулевые строки, то по лемме и следствию из 2.7 следует: $A \overset{p}{<} B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$. Пусть матрицы C и X не содержат нулевых строк и столбцов. Рассмотрим равенство $A = C_1X_1$, относительно которого матрицы C_1 и X_1 не имеют нежестких единиц, и $C_1 \leqslant C$, $X_1 \leqslant X$.

Если в матрице C_1 какой-нибудь столбец содержит не менее двух единиц, то по лемме 1.10 $N(X_1) < N(A)$. Очевидно, что $A = CX_1$. По лемме 1.14 существует такая матрица Y_1, что $X_1 \overset{p}{<} Y_1$ и $B = CY_1$. Легко заметить, что $N(Y_1) < N(B) = n + k + 1$. По предположению,

$X_1 \overset{p}{<} Y_1$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$. Следовательно, $A \overset{p}{<} B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$.

Если в матрице C_1 никакой столбец не содержит более одной единицы и нет нулевых столбцов и строк, то C_1 является мономиальной матрицей. Имеем $C_1 < C$. Тогда по лемме 1.18 существуют такие матрицы X_2 и Y_2, что 1) $A = CX_2$, $B = CY_2$; 2) $N(X_2) < N(A)$; 3) $X_2 \overset{p}{<} Y_2$. Легко заметить, что $N(Y_2) < N(B) = n + k + 1$. Поэтому $X_2 \overset{p}{<} Y_2$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$. Тогда, очевидно, $A \overset{p}{<} B$ тоже является следствием из $\Psi(S_\Omega)$.

Если матрицы A и B не имеют общего левого делителя, отличного от мономиальной матрицы, но имеют общий правый делитель, отличный от мономиальной матрицы, то аналогично доказывается, что $A \overset{p}{<} B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$.

Если матрицы A и B являются взаимно простыми, то или в $A \overset{p}{<} B$ содержится $\Psi(S_\Omega)$, или в $\Psi(S_\Omega)$ содержится такое соотношение предшествования $A_1 \overset{p}{<} B_1$, что имеет место $A = PA_1Q$, $B = PB_1 Q$, где P и Q — некоторые мономиальные матрицы. Следовательно, $A \overset{p}{<} B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$. Таким образом, все соотношения вида $A \overset{p}{<} B$ из $\Gamma(S_\Omega)$ являются следствием из $\Psi(S_\Omega)$.

2) Пусть $A < B$ — произвольное соотношение предшествования из $\Gamma(S_\Omega)$. Легко заметить, что существует конечная последовательность матриц $A_1, A_2, \ldots, A_m$, таких, что $A = A_1 \overset{p}{<} A_2 \overset{p}{<} \cdots \overset{p}{<} A_{m-1} \overset{p}{<} A_m = B$. Так как всякое соотношение предшествования $A_i \overset{p}{<} A_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$, по вышедоказанному, является следствием из $\Psi(S_\Omega)$, то $A < B$ является следствием из $\Psi(S_\Omega)$. Таким образом, всякая совокупность соотношений предшествования вида $\Psi(S_\Omega)$ является совокупностью, определяющей упорядоченность в упорядоченной полугруппе S_Ω.

Из определения совокупности $\Psi(S_\Omega)$ легко заметить, что всякая совокупность соотношений предшествования вида $\Psi(S_\Omega)$, и только она, является минимальной совокупностью, определяющей упорядоченность в упорядоченной полугруппе S_Ω.

Отметим тот факт, что любая совокупность соотношений предшествования вида $\Psi(S_\Omega)$ содержит представителей тех классов эквивалентных соотношений предшествования, в каждом из которых содержится хотя бы одно соотношение предшествования $A \overset{p}{<} B$, где или B — неразложимая матрица, или A — неразложимая матрица и A, B взаимно просты.

2.10. Из теоремы 2.9 и из изоморфизма φ полугруппы $\overline{S}_\Omega$ на полугруппу S_Ω следует

Теорема. *Любая совокупность соотношений предшествования вида* $\varphi^{-1}[\Psi(S_\Omega)]$ *является минимальной совокупностью, определяющей упорядоченность в упорядоченной полугруппе* $\overline{S}_\Omega$ *всех бинарных отношений в конечном множестве* Ω, *и никаких других минимальных совокупностей, определяющих упорядоченность, в полугруппе* $\overline{S}_\Omega$ *не имеется.*

г. Ленинград

Поступило
15 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпин Е. С. Полугруппы. М., Физматгиз, 1960.

2. Ляпин Е. С. Соотношения, определяющие упорядоченность в упорядоченных полугруппах. ИАН СССР. Сер. матем., т. 25, № 5, 1961, с. 671—684.

3. Биркгоф Г. Теория структур. М., ИИЛ, 1952.

4. Бурбаки Н. Элементы математики. (Кн. 2.) Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М., Физматгиз, 1962.

5. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных преобразований. В сб.: Теория полугрупп и ее приложение. Изд. Саратовск. ун-та, 1965, с. 3—178.

6. Шайн Б. М. Алгебра отношений. Межвузовск. научн. симпозиум по общей алгебре. Изд. Тартуск. ун-та, 1966, с. 130—191.

7. Зарецкий К. А. Абстрактная характеристика полугруппы всех бинарных отношений. Учен. зап. Ленинградск. педин-та, т. 183, 1958, с. 251—265.

8. Riguet J. Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois. Bull. Soc. math. France, v. 76, 1948, p. 114—155.

9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., „Наука", 1966.

О. В. ШИМЕЛЬФЕНИГ. НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ РАСШИРЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ГРУД И ОБОБЩЕННЫХ ГРУПП

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Расширением обобщенной груды **Г** пар частичных взаимно однозначных отображений между множествами A и B называется такая обобщенная груда К пар частичных отображений между множествами A и B, что ее образ при преобразовании $Q((\varphi, \psi)) = (\varphi \sqcap \overset{-1}{\psi}), \psi \sqcap \overset{-1}{\varphi}$, где $(\varphi, \psi) \in$ К, совпадает с **Г** (Изв. вузов, Матем., 1966, № 5, с. 129—141). Расширение называется несобственным, если оно совпадает с исходной обобщенной грудой, и собственным в противном случае. Доказана

Теорема 1. *Для того чтобы обобщенная груда* **Г** *пар частичных взаимно однозначных отображений имела собственное расширение, необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$\alpha_\Gamma \sqcap \overline{\alpha_\Gamma} \neq \varnothing \vee \beta_\Gamma \sqcap \overline{\beta}_\Gamma \neq \varnothing, \tag{1}$$

где α_Γ, $\overline{\alpha}_\Gamma$, β_Γ, $\overline{\beta}_\Gamma$ — *бинарные отношения, построенные с помощью теоретико-множественных операций над частичными отображениями из обобщенной груды* **Г**.

Говорят, что множество состоит из частичных взаимно однозначных совместных отображений, если их объединение является также частичным взаимно однозначным отображением. В теореме 2 доказано, что для обобщенных груд, состоящих из пар частичных взаимно однозначных совместных отображений, условие (1) является также и достаточным. Как следует из работы, упомянутой выше, подобные результаты имеют место и для обобщенных групп частичных преобразований. (Работа поступила в журнал „Математика" 3.X.1967.)