

Кратномасштабный анализ в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$ на основе дискретных сплайнов*

А.Б. Певный

УДК 519.65

Певный А.Б. Кратномасштабный анализ в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$ на основе дискретных сплайнов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2004. — Т. 7, № 3. — С. 261–275.

Построен нестационарный кратномасштабный анализ (КМА) $\{V_k\}_{k \geq 0}$ в $\ell^2(\mathbb{Z})$, в котором подпространства V_k состоят из дискретных сплайнов. Нестационарность заключается в том, что в каждом V_k найдется своя функция φ_k такая, что система $\{\varphi_k(\cdot - l2^k) : l \in \mathbb{Z}\}$ образует базис Рисса в V_k . Соответственно, система вейвлетов $\psi_{kl}(j) = \psi_k(j - l2^k)$, $l \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots$, не порождается растяжениями и сдвигами одной функции. Подпространства $W_k = \text{span}\{\psi_{kl} : l \in \mathbb{Z}\}$ образуют ортогональное разложение всего пространства: $\ell^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} W_k$.

Основная идея – в качестве V_k брать пространства дискретных сплайнов $S_{p,2^k}$ порядка p с расстоянием между узлами 2^k . При каждом натуральном p получается свой КМА (при $p = 1$ – хааровский КМА).

Ключевые слова: дискретные сплайны, дискретные вейвлеты, кратномасштабный анализ.

Pevnyi A.B. Multiresolution analysis in the space $\ell^2(\mathbb{Z})$ using discrete splines // Siberian J. of Numer. Mathematics / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2004. — Vol. 7, № 3. — P. 261–275.

A non-stationary multiresolution analysis $\{V_k\}_{k \geq 0}$ in the space $\ell^2(F)$ is performed, the subspaces V_k consisting of discrete splines. In each V_k , there is a function φ_k such that the system $\{\varphi_k(\cdot - l2^k) : l \in \mathbb{Z}\}$ forms the Riesz base of V_k . A system of wavelets $\psi_{kl}(j) = \psi_k(j - l2^k)$, $l \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots$, is not generated by shifts and dilations of the unique function. The subspaces $W_k = \text{span}\{\psi_{kl} : l \in \mathbb{Z}\}$ form an orthogonal expansion of the space: $\ell^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} W_k$.

The space V_k is the same as the space of discrete splines $S_{p,2^k}$ of order p with a distance between the knots 2^k . For every p , a multiresolution analysis is obtained (for $p = 1$ – the Haar multiresolution analysis).

Key words: discrete splines, discrete wavelets, multiresolution analysis.

1. Введение. Понятие кратномасштабного анализа (КМА) в $L^2(\mathbb{R})$ ввел и исследовал С. Малла в 1989 г. В настоящее время теория КМА в $L^2(\mathbb{R})$ приводится во многих статьях и книгах (см., напр., [1–3]). Напомним определение КМА [3]: кратномасштабный анализ – это последовательность $\{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ замкнутых подпространств $L^2(\mathbb{R})$ таких, что $V_k \subset V_{k+1}$; замыкание объединения всех V_k есть $L^2(\mathbb{R})$; пересечение всех V_k содержит только 0;

$$f(x) \in V_k \iff f(2^{-k}x) \in V_0; \quad (1)$$

существует функция $\varphi \in V_0$ такая, что $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в V_0 .

Ввиду (1), задание V_0 определяет все пространства V_k .

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №02-01-00084).

Нашей целью является построение КМА в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$ всех последовательностей $\{x(j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$, для которых $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |x(j)|^2 < \infty$. Здесь возникает сложность со свойством (1), ибо $2^{-k}j$ может быть не целым числом. Будет построен нестационарный КМА $\{V_k\}_{k \geq 0}$ в $\ell^2(\mathbb{Z})$, в котором подпространства V_k состоят из дискретных сплайнов. Нестационарность заключается в том, что в каждом V_k найдется своя функция φ_k такая, что система $\{\varphi_k(\cdot - l2^k) : l \in \mathbb{Z}\}$ образует базис Рисса в V_k . Соответственно, система вейвлетов $\psi_{kl}(j) = \psi_k(j - l2^k)$, $l \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots$, не порождается растяжениями и сдвигами одной функции. Для пространства $L^2(\mathbb{R})$ нестационарный КМА построен в [4], но наша основная идея другая – в качестве V_k брать пространства дискретных сплайнов $S_{p,2^k}$ (определение пространств $S_{p,n}$ см. в п. 5).

Дискретные вейвлеты рассматривались в [8, 9], но подход в этих статьях заметно отличается от нашего.

В классическом КМА тот факт, что целые сдвиги $\varphi(x)$ образуют базис Рисса в V_0 , входит в определение КМА (см. [2, 3]), а вопрос, образуют ли целые сдвиги $\psi(x)$ базис Рисса в W_0 , требует специального рассмотрения [2, разделы 5.3 и 6.1]. В нашей конструкции также удастся доказать, что система $\psi_{kl}(j) = \psi_k(j - l2^k)$, $l \in \mathbb{Z}$, образует базис Рисса в W_k (см. конец п. 12 и п. 14).

2. Дискретные В-сплайны определяются [5–7] на множестве целых чисел \mathbb{Z} . Зафиксируем натуральные p, n . Определим дискретные В-сплайны $B_{1,n}(j), \dots, B_{p,n}(j)$ ($j \in \mathbb{Z}$) следующим образом. Положим

$$B_{1,n}(j) = \begin{cases} 1, & j \in 0 : n - 1, \\ 0, & \text{при остальных } j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Здесь $0 : n - 1$ – множество целых чисел $\{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Далее используем рекуррентное определение $B_{r,n} = B_{1,n} * B_{r-1,n}$, $r \in 2 : p$, где $*$ – оператор свертки, или $B_{r,n}(j) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{r-1,n}(j - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $r = 2, \dots, p$. Впервые такое определение появилось в работах [14, 15].

В-сплайн $B_{p,n}$ обладает свойствами: $B_{p,n}(p(n-1) - j) = B_{p,n}(j)$ для любого целого j ; $B_{p,n}(j) > 0$ при $j \in 0 : p(n-1)$, $B_{p,n}(j) = 0$ при остальных j . В частном случае $n = 1$, получаем

$$B_{p,1}(j) = \delta(j) = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & \text{при остальных } j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

В дальнейшем понадобится также свойство

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} B_{p,n}(j - kn) B_{p,n}(j - ln) = B_{2p,n}(p(n-1) - (k-l)n). \quad (2)$$

3. Полиномы Эйлера–Фробениуса. Определим тригонометрический полином, который будет играть важную роль в дальнейшем.

Предположим, что число $\nu = p(n-1)/2$ является целым (точка ν – это середина носителя В-сплайна $B_{p,n}$). Положим $b_p(k) = B_{p,n}(\nu + kn)$. Заметим, что $b_p(-k) = b_p(k)$ и $b_p(k)$ отлично от нуля, если $|k| \leq \mu = [\nu/n] = [p(n-1)/(2n)]$, где $[\alpha]$ означает целую часть α .

Четный тригонометрический полином

$$T_{p,n}(x) = \sum_{k=-\mu}^{\mu} b_p(k) e^{ikx} = b_p(0) + 2 \sum_{k=1}^{\mu} b_p(k) \cos kx$$

называется полиномом Эйлера–Фробениуса (см. аналогичное определение в [16]). Основное свойство этих полиномов – положительность для всех x .

Лемма 1. Полином $T_{p,n}(x)$ строго положителен для всех x . Полином $T_{2p,n}$ четного порядка $2p$ допускает оценку

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2p} n^{2p-1} \leq T_{2p,n}(x) \leq T_{2p,n}(0) = n^{2p-1}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (3)$$

Первое утверждение установлено в [6, 7], второе – в [5].

Нерешенная задача. Алгебраический полином $E_{p,n}(z) = b_p(-\mu) + b_p(-\mu + 1)z + \dots + b_p(\mu)z^{2\mu}$ также называется полиномом Эйлера–Фробениуса. Доказать, что $E_{p,n}(z)$ имеет μ простых корней x_1, \dots, x_μ в интервале $(-1, 0)$ (и, соответственно, μ корней $1/x_i$ в интервале $(-\infty, -1)$).

Для полинома Эйлера–Фробениуса, связанного с непрерывным В-сплайном $N_p(x)$, соответствующее утверждение доказал Ю.Н. Субботин [11], а позднее – Шенберг [12] (см. также [2, теорема 6.13]).

4. Экспоненциальные сплайны. По-прежнему предполагаем число $\nu = p(n - 1)/2$ целым. Рассмотрим экспоненциальные сплайны

$$E_{p,n}(x, j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-ilx} B_{p,n}(j - ln). \quad (4)$$

При каждом $j \in \mathbb{Z}$ в сумме (4) не более p ненулевых слагаемых, поэтому при фиксированном j функция $E_{p,n}(x, j)$ является тригонометрическим полиномом от x . При этом $|E_{p,n}(x, j)| \leq C_{p,n} = pB_{p,n}(\nu)$. Аналогичные сплайны непрерывного аргумента рассматривались Шенбергом в [16, с. 17]. Отметим сдвиговое свойство

$$E_{p,n}(x, j - kn) = e^{ikx} E_{p,n}(x, j). \quad (5)$$

В точке $j = \nu$ равенство (4) принимает вид

$$E_{p,n}(x, \nu) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_p(-l) e^{-ilx} = T_{p,n}(x) > 0. \quad (6)$$

В силу (4), $B_{p,n}(j + ln)$ является коэффициентом Фурье функции $E_{p,n}(\cdot, j)$. В частности, при $l = 0$

$$B_{p,n}(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{p,n}(x, j) dx, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

5. Дискретные сплайны. Дискретным сплайном порядка p назовем функцию

$$S(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c(l) B_{p,n}(j - ln), \quad (8)$$

где последовательность $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Множество таких сплайнов обозначим $S_{p,n}$. Очевидно, $S_{p,1} = \ell^2(\mathbb{Z})$.

Вопрос о сходимости ряда (8) не возникает, так как при каждом j в (8) не более p ненулевых слагаемых. Если $j \in kn : (k + 1)n - 1$, то $S(j) = \sum_{l=k-p+1}^k c(l) B_{p,n}(j - ln)$. Последнее выражение на $kn : (k + 1)n - 1$ совпадает с некоторым полиномом $P_k(j)$ степени $\leq p - 1$.

Определим функцию $C(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c(l)e^{ilx}$ из $L^2(0, 2\pi)$. Тогда

$$S(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(x)E_{p,n}(x, j) dx. \quad (9)$$

Такое интегральное представление сплайна будет систематически использоваться в дальнейшем. Функцию $C(x)$ будем называть *плотностью*, соответствующей сплайну $S(j)$.

6. Равенство Парсеваля. Справедлива

Теорема 1. *Всякий сплайн $S \in S_{p,n}$ принадлежит пространству $\ell^2(\mathbb{Z})$. Если есть два сплайна $S, R \in S_{p,n}$ с плотностями $C(x), D(x)$ соответственно, то справедливо равенство Парсеваля*

$$\langle S, R \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} S(j)\overline{R(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(x)\overline{D(x)}T_{2p}(x) dx, \quad (10)$$

в частности

$$\|S\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |S(j)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(x)|^2 T_{2p}(x) dx. \quad (11)$$

Здесь T_{2p} – полином Эйлера–Фробениуса порядка $2p$.

Доказательство. Имеем

$$S(j)\overline{R(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{D(x)}[\overline{E_{p,n}(x, j)}S(j)] dx.$$

Для произвольного натурального N рассмотрим суммы

$$\sigma_N(x) = \sum_{j=-N}^N \overline{E_{p,n}(x, j)}S(j) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c(l) \sum_{j=-N}^N \overline{E_{p,n}(x, j)}B_{p,n}(j - ln), \quad (12)$$

где последовательность $\{c(l)\}$ коэффициентов сплайна $S(j)$ принадлежит $\ell^2(\mathbb{Z})$. Имеем

$$\overline{E_{p,n}(x, j)}B_{p,n}(j - ln) = \sum_{k=l-p}^{l+p} e^{ikx} B_{p,n}(j - kn)B_{p,n}(j - ln). \quad (13)$$

Отметим, что $B_{p,n}(j - kn)B_{p,n}(j - ln) = 0$ при $|kn - ln| > p(n - 1)$. Это выполняется при $|k - l| > p$. Поэтому в (13) суммируем только по $k \in l - p : l + p$.

Просуммируем (13) по $j \in -N : N$. Получаем

$$\sum_{j=-N}^N \overline{E_{p,n}(x, j)}B_{p,n}(j - ln) = \sum_{k=l-p}^{l+p} e^{ikx} A_N(k, l) = e^{ilx} \sum_{\lambda=-p}^p e^{i\lambda x} A_N(l + \lambda, l),$$

где

$$A_N(k, l) = \sum_{j=-N}^N B_{p,n}(j - kn)B_{p,n}(j - ln).$$

По свойству (2) $A_N(k, l) = b_{2p}(k - l)$, если $-N : N$ содержит носители В-сплайнов $B_{p,n}(j - kn)$ и $B_{p,n}(j - ln)$. Это будет выполнено при $N > \max\{(|l| + p)n, (|k| + p)n\}$.

В итоге получаем

$$\sigma_N(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c(l)e^{ilx} \sum_{\lambda=-p}^p e^{i\lambda x} A_N(l + \lambda, l).$$

Покажем, что

$$\begin{aligned} \|\sigma_N - CT_{2p}\|_{L^2(0,2\pi)} &= \left\| \sum_{l \in \mathbb{Z}} c(l)e^{ilx} \sum_{\lambda=-p}^p e^{i\lambda x} A_N(l + \lambda, l) - C(x) \sum_{\lambda=-p}^p e^{i\lambda x} b_{2p}(\lambda) \right\|_{L^2(0,2\pi)} \\ &= \left\| \sum_{\lambda=-p}^p e^{i\lambda x} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c(l)e^{ilx} [A_N(l + \lambda, l) - b_{2p}(\lambda)] \right\|_{L^2(0,2\pi)} \\ &\leq \sum_{\lambda=-p}^p \left\{ \int_0^{2\pi} \left| e^{i\lambda x} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c(l)e^{ilx} [A_N(l + \lambda, l) - b_{2p}(\lambda)] \right|^2 dx \right\}^{1/2} \\ &= \sum_{\lambda=-p}^p \left\{ 2\pi \sum_{l \in \mathbb{Z}} |c(l)|^2 [A_N(l + \lambda, l) - b_{2p}(\lambda)]^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Имеем $b_{2p}(\lambda) - A_N(l + \lambda, l) = 0$ при $N > (|\lambda| + 2p)n$, т. е. при $|\lambda| < N/n - 2p$. Кроме того,

$$0 \leq b_{2p}(\lambda) - A_N(l + \lambda, l) \leq b_{2p}(\lambda) \leq B_{2p}(p(n - 1)) \quad \forall \lambda \in -p : p.$$

Поэтому найдется константа K такая, что

$$\|\sigma_N - CT_{2p}\|^2 \leq K \sum_{|\lambda| \geq N/n - 2p} |c(l)|^2 \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Обратимся к равенству

$$\sum_{j=-N}^N S(j)\overline{R(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{D(x)}\sigma_N(x) dx.$$

Правая часть имеет предел при $N \rightarrow \infty$. Поэтому левая часть равенства также имеет предел:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} S(j)\overline{R(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(x)\overline{D(x)}T_{2p}(x) dx.$$

Таким образом, равенство (10) доказано. Из (10) при $R = S$ получаем (11), а следовательно, $S \in \ell^2(\mathbb{Z})$. □

Замечание 1. Доказанное равенство Парсеваля для сплайнов в непрерывном случае установлено В.А. Желудевым [10] (в другой форме и с другим доказательством).

Следствие 1. Подпространство $S_{p,n}$ замкнуто по норме пространства $\ell^2(\mathbb{Z})$.

7. ТВ-сплайны и двойственные к ним сплайны. Рассмотрим сплайн вида

$$\varphi(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(x)E_{p,n}(x, j) dx, \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{14}$$

где функция ξ предполагается бесконечно дифференцируемой и 2π -периодической, т. е. $\xi \in C_{2\pi}^\infty$. Как отмечалось выше, функция φ представляется в виде

$$\varphi(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \xi(l) B_{p,n}(j - ln), \quad (15)$$

где $\xi(l)$ – коэффициенты Фурье функции $\xi(x)$. Поскольку $\xi \in C_{2\pi}^{\infty}$, то коэффициенты $\xi(l)$ убывают при $l \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $1/l$, а тогда и $\varphi(j)$ убывает при $j \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $1/j$.

Сплайн φ называется ТВ-сплайном, если сдвиги $\{\varphi(\cdot - kn) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ образуют базис в пространстве сплайнов $S_{p,n}$, т. е. всякий сплайн $S \in S_{p,n}$ разлагается в ряд

$$S(j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \varphi(j - kn),$$

сходящийся для каждого $j \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2 [5]. Если $\xi(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, то сплайн φ является ТВ-сплайном.

Справедливо и более сильное утверждение.

Теорема 3. Пусть $\xi(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Тогда система $\{\varphi(\cdot - kn)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в $S_{p,n}$, т. е. выполнены следующие свойства:

1) любой сплайн $S \in S_{p,n}$ разлагается в ряд

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \varphi(\cdot - kn), \quad (16)$$

сходящийся в $\ell^2(\mathbb{Z})$. При этом последовательность $c = \{c(k)\}$ принадлежит $\ell^2(\mathbb{Z})$;

2) существуют числа $A, B > 0$ такие, что для любой последовательности $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ выполнены неравенства

$$A \|c\|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \varphi(\cdot - kn) \right\|^2 \leq B \|c\|^2, \quad (17)$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Доказательство. Докажем сначала 2). Возьмем произвольную последовательность $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Ряд

$$C_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx}$$

сходится в $L^2(0, 2\pi)$. Элемент C_0 принадлежит $L^2(0, 2\pi)$, т. е. является классом эквивалентных функций. Будем рассматривать какую-нибудь конкретную функцию $C_0(x)$ из этого класса.

Для дальнейшего потребуется равенство Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C_0(x)|^2 dx = \|c\|^2. \quad (18)$$

Положим $C(x) = \xi(x) C_0(x)$. Тогда для сплайна $S(j) = \frac{1}{2\pi} \langle C, E_{p,n}(\cdot, j) \rangle$ по теореме 2 справедливо разложение в ряд

$$S(j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \varphi(j - kn),$$

сходящийся для каждого $j \in \mathbb{Z}$. По равенству Парсеваля для сплайнов (11) имеем

$$\|S\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(x)|^2 T_{2p}(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\xi(x)|^2 T_{2p}(x) |C_0(x)|^2 dx.$$

Положим

$$A = \min_{x \in [0, 2\pi]} |\xi(x)|^2 T_{2p}(x), \quad B = \max_{x \in [0, 2\pi]} |\xi(x)|^2 T_{2p}(x). \quad (19)$$

Очевидно, $B \geq A > 0$ и

$$\frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C_0(x)|^2 dx \leq \|S\|^2 \leq \frac{B}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C_0(x)|^2 dx.$$

Отсюда, учитывая равенство Парсеваля (18), получаем $A\|c\|^2 \leq \|S\|^2 \leq B\|c\|^2$, что равносильно (17).

Докажем теперь сходимость ряда (16) в $\ell^2(\mathbb{Z})$. Имеем

$$\varphi(j - kn) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \xi(x) E_{p,n}(x, j) dx.$$

Рассмотрим частичные суммы ряда (16)

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_N(x) E_{p,n}(x, j) dx,$$

где

$$C_N(x) = \xi(x) \sum_{k=-N}^N c(k) e^{ikx}.$$

По равенству Парсеваля для сплайнов (11)

$$\begin{aligned} \|S - S_N\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(x) - C_N(x)|^2 T_{2p} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{|k|>N} c(k) e^{ikx} \right|^2 |\xi(x)|^2 T_{2p}(x) dx \\ &\leq \frac{B}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{|k|>N} c(k) e^{ikx} \right|^2 dx = B \sum_{|k|>N} |c(k)|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

8. Двойственные ТВ-сплайны. ТВ-сплайны φ и ψ называются *двойственными*, если

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j - kn) \overline{\psi(j - qn)} = \delta(k - q), \quad k, q \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Теорема 4 [5]. Сплайны φ и ψ с плотностями $\xi(x)$ и $\eta(x)$ являются двойственными ТВ-сплайнами тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\xi(x) \overline{\eta(x)} T_{2p}(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Доказательство этой теоремы основано на равенстве Парсеваля (10).

Данная теорема позволяет легко строить пары двойственных ТВ-сплайнов. Рассмотрим два важнейших случая.

1. Самодвойственный ТВ-сплайн. Он получается при $\xi(x) = \eta(x) = 1/\sqrt{T_{2p}(x)}$. ТВ-сплайн $\varphi(j)$ получается вещественным и четным. Сдвиги $\{\varphi(\cdot - kn)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ образуют ортонормированный базис в $S_{p,n}$.
2. ТВ-сплайн, двойственный В-сплайну. Согласно формуле (7), при $\xi(x) \equiv 1$ получаем $\varphi(j) = B_{p,n}(j)$. Двойственный ТВ-сплайн $\chi_{p,n}$ определяется формулой

$$\chi_{p,n}(j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{E_{p,n}(x, j)}{T_{2p}(x)} dx. \quad (22)$$

Здесь также $\chi_{p,n}$ веществен и четен относительно точки $\nu = p(n-1)/2$.

Для любого сплайна $S \in S_{p,n}$ справедливо разложение

$$S(j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle S, \chi_{p,n}(\cdot - kn) \rangle B_{p,n}(j - kn), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Для оценки коэффициентов этого ряда полезно оценить $\|\chi_{p,n}\|$. Используя равенство Парсеваля (11), имеем

$$\|\chi_{p,n}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{T_{2p}(x)}.$$

Отсюда, в силу оценки (3), находим

$$\|\chi_{p,n}\| \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^p n^{-p+1/2}. \quad (23)$$

9. Масштабирующее уравнение. Основой каждой вейвлетной конструкции является масштабирующее уравнение, связывающее сплайны с параметрами n и $2n$, а точнее, связывающее $E_{p,2n}$ и $E_{p,n}$.

Теорема 5. *Справедливо тождество*

$$E_{p,2n}(x, j) = c\left(\frac{x}{2}\right) E_{p,n}\left(\frac{x}{2}, j\right) + c\left(\frac{x}{2} + \pi\right) E_{p,n}\left(\frac{x}{2} + \pi, j\right), \quad (24)$$

где $c(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{ix})^p$.

Доказательство приведено в [13]. Оно основано на следующей лемме, имеющей самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$B_{p,2n}(j) = \sum_{r=0}^p c_p^r B_{p,n}(j - rn), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (25)$$

Доказательство также приведено в [13]. Там же в качестве следствия из теоремы 5 выведено тождество

$$T_{2p,2n}(x) = 2 \left| c\left(\frac{x}{2}\right) \right|^2 T_{2p,n}\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \left| c\left(\frac{x}{2} + \pi\right) \right|^2 T_{2p,n}\left(\frac{x}{2} + \pi\right) \quad (26)$$

(в обозначении полинома Эйлера–Фробениуса $T_{p,n}$ пишем теперь оба параметра p и n).

Наряду с $S_{p,n}$ рассмотрим пространство $S_{p,2n}$, которое, ввиду леммы 1, содержится в $S_{p,n}$. По следствию 1 $S_{p,2n}$ – замкнутое подпространство. Обозначим через $W_{p,2n}$ ортогональное дополнение к $S_{p,2n}$ в пространстве $S_{p,n}$. Тогда имеет место разложение $S_{p,n} = S_{p,2n} \oplus W_{p,2n}$.

Наша ближайшая цель – получить представление элементов вейвлетного пространства $W_{p,2n}$, а также указать конструктивный способ разложения сплайна $S_n \in S_{p,n}$ на два ортогональных слагаемых.

10. Экспоненциальный вейвлет. Определим экспоненциальный вейвлет $W_{p,2n}$ по формуле

$$W_{p,2n}(x, j) = a\left(\frac{x}{2}\right)E_{p,n}\left(\frac{x}{2}, j\right) + a\left(\frac{x}{2} + \pi\right)E_{p,n}\left(\frac{x + 2\pi}{2}, j\right), \quad (27)$$

где $a(x)$ выберем так, чтобы $W_{p,2n}(x, \cdot)$ принадлежал пространству $W_{p,2n}$ для всех x , то есть чтобы для всех x выполнялись равенства

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} W_{p,2n}(x, j) B_{p,2n}(j - 2kn) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

Вычисляя скалярные произведения по равенству Парсеваля (10), получим эквивалентное условие

$$a(x/2)I_0(x) + a(x/2 + \pi)I_0(x + 2\pi) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

где $I_0(x) = 2c\overline{(x/2)}T_{2p,n}(x/2)$. Положим $a(x) = e^{ix}I_0(2x+2\pi)$. Тогда (29) будет выполнено. Итак,

$$a(x) = e^{ix}(1 - e^{-ix})^p T_{2p,n}(x + \pi). \quad (30)$$

Экспоненциальный вейвлет (27) построен. Он обладает свойствами:

1. Для любого x сплайн $W_{p,2n}(x, \cdot)$ принадлежит $W_{p,2n}$.
2. Для любого j функция $W_{p,2n}(\cdot, j)$ является бесконечно дифференцируемой 2π -периодической функцией.
3. $W_{p,2n}(x, j - 2kn) = e^{ikx}W_{p,2n}(x, j) \quad \forall x, j, k$.
4. Всякая функция вида

$$R(j) = \int_0^{2\pi} D(x)W_{p,2n}(x, j) dx, \quad (31)$$

где $D \in L^2(0, 2\pi)$, принадлежит пространству $W_{p,2n}$.

Тот факт, что всякий элемент $R \in W_{p,2n}$ представляется в виде (31), мы сможем доказать после того, как установим основную теорему о разложении $S_n \in S_{p,n}$ на два ортогональных слагаемых.

11. Разложение пространства сплайнов. Имеет место

Теорема 6. Пусть сплайн $S_n \in S_{p,n}$ имеет вид

$$S_n(j) = \langle C_n(x), E_{p,n}(x, j) \rangle = \int_0^{2\pi} C_n(x)E_{p,n}(x, j) dx,$$

где $C_n \in L^2(0, 2\pi)$. Тогда справедливо разложение

$$S_n(j) = S_{2n}(j) + R_{2n}(j), \quad (32)$$

где $S_{2n} \in \mathbf{S}_{p,2n}$, $R_{2n} \in \mathbf{W}_{p,2n}$,

$$S_{2n}(j) = \langle C_{2n}(x), E_{p,2n}(x, j) \rangle, \quad R_{2n}(j) = \langle D_{2n}(x), W_{p,2n}(x, j) \rangle,$$

а плотности C_{2n} , D_{2n} определяются по формулам:

$$C_{2n}(x) = \frac{C_n(x/2)a(x/2 + \pi) - C_n(x/2 + \pi)a(x/2)}{2\Delta(x/2)}, \quad (33)$$

$$D_{2n}(x) = \frac{-C_n(x/2)c(x/2 + \pi) + C_n(x/2 + \pi)c(x/2)}{2\Delta(x/2)}, \quad (34)$$

где $\Delta(x) = -e^{ix}T_{2p,2n}(2x)$, $a(x)$ определено формулой (30), а $c(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{ix})^p$. При этом C_{2n} , $D_{2n} \in L^2(0, 2\pi)$. По данным C_{2n} , D_{2n} плотность $C_n(x)$ определяется по формуле

$$C_n(x) = 2[c(x)C_{2n}(2x) + a(x)D_{2n}(2x)]. \quad (35)$$

Доказательство. Из (24) и (27) вытекает система уравнений:

$$\begin{aligned} E_{p,2n}(2x, j) &= c(x)E_{p,n}(x, j) + c(x + \pi)E_{p,n}(x + \pi, j), \\ W_{p,2n}(2x, j) &= a(x)E_{p,n}(x, j) + a(x + \pi)E_{p,n}(x + \pi, j). \end{aligned}$$

Найдем из нее $E_{p,n}(x, j)$. Определитель системы с учетом (30) и (26) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= c(x)a(x + \pi) - a(x)c(x + \pi) \\ &= -e^{ix}[2|c(x)|^2T_{2p,n}(x) + 2|c(x + \pi)|^2T_{2p,n}(x + \pi)] = -e^{ix}T_{2p,2n}(2x). \end{aligned}$$

Очевидно, он отличен от нуля для всех x . Поэтому

$$E_{p,n}(x, j) = \frac{a(x + \pi)}{\Delta(x)}E_{p,2n}(2x, j) - \frac{c(x + \pi)}{\Delta(x)}W_{p,2n}(2x, j). \quad (36)$$

Рассмотрим сплайны

$$S_{2n}(j) = \langle C_{2n}(x), E_{p,2n}(x, j) \rangle, \quad R_{2n}(j) = \langle D_{2n}(x), W_{p,2n}(x, j) \rangle,$$

где C_{2n} , D_{2n} определены по формулам (33), (34) (очевидно, что C_{2n} , $D_{2n} \in L^2(0, 2\pi)$). При этом $S_{2n} \in \mathbf{S}_{p,2n}$, $R_{2n} \in \mathbf{W}_{p,2n}$.

Осталось показать, что $S_{2n}(j) + R_{2n}(j) = S_n(j)$ для всех j . С помощью замены $x = 2t$ и свойства $\Delta(t + \pi) = -\Delta(t)$ получаем

$$\begin{aligned} S_{2n}(j) &= \int_0^{2\pi} \frac{C_n(\frac{x}{2})a(\frac{x}{2} + \pi) - C_n(\frac{x}{2} + \pi)a(\frac{x}{2})}{2\Delta(x/2)} E_{p,n}(x, j) dx = \langle C_n(t), \frac{a(t + \pi)}{\Delta(t)} E_{p,2n}(2t, j) \rangle, \\ R_{2n}(j) &= \langle C_n(t), -\frac{c(t + \pi)}{\Delta(t)} W_{p,2n}(2t, j) \rangle. \end{aligned}$$

Сложив эти равенства, с учетом (36) получаем

$$S_{2n}(j) + R_{2n}(j) = \langle C_n(x), E_{p,n}(x, j) \rangle = S_n(j).$$

Если даны C_{2n} и D_{2n} , то из равенств (33), (34) можно выразить $C_n(x)$ по формуле (35). \square

Следствие 2. Сплайн $R \in \mathbf{S}_{p,n}$ принадлежит $\mathbf{W}_{p,2n}$ тогда и только тогда, когда R представляется в виде

$$R(j) = \int_0^{2\pi} D(x)W_{p,2n}(x, j) dx, \quad (37)$$

где $D \in L^2(0, 2\pi)$.

Доказательство. Как уже отмечено выше, если R представлен в виде (37), то $R \in W_{p,2n}$. Обратно, если $R \in W_{p,2n}$, то по теореме 6 справедливо разложение вида $R = S_{2n} + R_{2n}$, где $S_{2n} \in S_{p,2n}$, $R_{2n} \in W_{p,2n}$ и R_{2n} имеет вид (37). Поскольку $S_{p,2n} \perp W_{p,2n}$, то $S_{2n} = 0$, $R = R_{2n}$. \square

12. ТВ-вейвлеты. Будем рассматривать ТВ-вейвлеты вида

$$\psi(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x) W_{p,2n}(x, j) dx, \quad (38)$$

где $\tau(x)$ – бесконечно дифференцируемая 2π -периодическая функция и $\tau(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Как отмечено выше, $\psi \in W_{p,2n}$.

Теорема 7. *Всякий вейвлет (31) из $W_{p,2n}$ разлагается в ряд*

$$R(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \psi(j - 2kn),$$

сходящийся по норме $\ell^2(\mathbb{Z})$. Коэффициенты $d(k)$ являются коэффициентами Фурье функции $D(x)/\tau(x)$.

Доказательство. Имеем

$$\psi(j - 2kn) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \tau(x) W_{p,2n}(x, j) dx, \quad (39)$$

то есть $\psi(j + 2kn)$ является коэффициентом Фурье функции $\tau(x) W_{p,2n}(x, j)$. Следовательно,

$$\tau(x) W_{p,2n}(x, j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(j - 2kn) e^{-ikx}.$$

Так как функция $\tau(x) W_{p,2n}(x, j)$ – гладкая и 2π -периодическая, то ее ряд Фурье сходится равномерно.

Запишем вейвлет (31) в виде

$$\begin{aligned} R(j) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{D(x)}{\tau(x)} \tau(x) W_{p,2n}(x, j) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{D(x)}{\tau(x)} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(j - 2kn) e^{-ikx} \right] dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(j - 2kn) d(k), \quad \text{где } d(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{D(x)}{\tau(x)} e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

Полученное разложение справедливо для всех $j \in \mathbb{Z}$. Установим его сходимость в $\ell^2(\mathbb{Z})$. Имеем

$$D(x) = \tau(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k) e^{ikx},$$

причем этот ряд сходится в $L^2(0, 2\pi)$. Рассмотрим частичные суммы

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \tau(x) \sum_{k=-N}^N d(k) e^{ikx}, \\ R_N(j) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_N(x) W_{p,2n}(x, j) dx = \sum_{k=-N}^N d(k) \psi(j - 2kn). \end{aligned}$$

С учетом определения $W_{p,2n}(x, j)$ имеем

$$\begin{aligned} R(j) - R_N(j) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D(x) - D_N(x)] W_{p,2n}(x, j) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D(x) - D_N(x)] \left[a\left(\frac{x}{2}\right) E_{p,n}\left(\frac{x}{2}, j\right) + a\left(\frac{x}{2} + \pi\right) E_{p,n}\left(\frac{x+2\pi}{2}, j\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2[D(2t) - D_N(2t)] a(t) E_{p,n}(t, j) dt. \end{aligned}$$

По равенству Парсеваля для сплайнов

$$\|R - R_N\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 4|D(2t) - D_N(2t)|^2 |a(t)|^2 T_{2p,n}(t) dt.$$

Поскольку $|a(t)|^2 T_{2p,n}(t) \leq B = \text{const}$ для всех t , то последнее выражение стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. \square

Замечание 2. Система $\{\psi(\cdot - 2kn) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ образует базис Рисса в $W_{p,2n}$. Действительно, для $R \in W_{p,2n}$ с плотностью $D(x)$ с помощью равенства Парсеваля можно получить

$$\|R\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{D(x)}{\tau(x)} \right|^2 |\tau(x)|^2 \Omega(x) dx,$$

где $\Omega(x) = 4T_{2p,n}(x/2)T_{2p,n}(x/2 + \pi)T_{2p,2n}(x)$. Поскольку найдутся константы A, B такие, что $0 < A \leq |\tau(x)|^2 \Omega(x) \leq B$, то $A\|d\|^2 \leq \|R\|^2 \leq B\|d\|^2$, что и требовалось.

Если выбрать $\tau(x) = 1/\sqrt{\Omega(x)}$, то можно взять в качестве границ Рисса $A = B = 1$. Тогда по терминологии [3] систему $\{\psi(\cdot - 2kn) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ можно назвать жестким фреймом в $W_{p,2n}$.

13. Сходимость вейвлетного разложения сигнала. Сигнал $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ можно рассматривать как сплайн из пространства $S_{p,1}$ (с шагом $n = 1$). Действительно, при $n = 1$ В-сплайн $B_{p,1}(j)$ совпадает с единичным импульсом $\delta(j)$. Запишем равенство

$$f(j) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(l) \delta(j - l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(l) B_{p,1}(j - l),$$

так что роль коэффициентов В-сплайнового представления играют значения $f(l)$. Сигнал f можно записать в интегральной форме

$$f(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_1(x) E_{p,1}(x, j) dx,$$

где $E_{p,1}(x, j) = e^{-ijx}$, а $C_1(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(l) e^{ilx}$ (ряд сходится в $L^2(0, 2\pi)$).

Начиная с пространства $S_{p,1} = \ell^2(\mathbb{Z})$, через N шагов придем к разложению

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = S_{p,2} \oplus W_{p,2} = \dots = S_{p,2^N} \oplus W_{p,2^N} \oplus W_{p,2^{N-1}} \oplus \dots \oplus W_{p,2}.$$

Тем самым после N шагов декомпозиции любой сигнал $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ представляется в виде

$$f = S_{2^N} + \sum_{k=1}^N R_{2^k},$$

где $S_{2^N} \in S_{p,2^N}$, $R_{2^k} \in W_{p,2^k}$, причем слагаемые попарно ортогональны (в смысле скалярного произведения в $\ell^2(\mathbb{Z})$). Параметр p – произвольное натуральное число. Он может быть выбран из разных соображений. Конструктивный алгоритм нахождения проекций S_{2^N} и R_{2^k} получен в [13] (это аналог каскадного алгоритма по терминологии [1, с. 29–31] или алгоритма разложения [2, с. 247]).

Возникает вопрос, сходится ли S_{2^N} к нулю при $N \rightarrow \infty$? Ответ на него дает

Теорема 8. Для любого сигнала $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ справедливы соотношения

$$\|S_{2^N}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} R_{2^k}, \quad (40)$$

где ряд сходится по норме $\ell^2(\mathbb{Z})$. Если f имеет конечный носитель, содержащийся в $-m+1 : m-1$, то

$$\|S_{2^N}\| \leq p \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \sum_{j=-m+1}^{m-1} |f(j)| 2^{-N/2} \text{ при всех } N \geq \log_2 m. \quad (41)$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем m , удовлетворяющее условиям

$$m \geq p, \quad \left(\sum_{|j| \geq m} |f(j)|^2\right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим

$$\begin{aligned} f_0(j) &= f(j) \text{ при } j \in 0 : m-1 \text{ и } f_0(j) = 0 \text{ вне } 0 : m-1; \\ f_1(j) &= f(j) \text{ при } j \in -m+1 : -1 \text{ и } f_1(j) = 0 \text{ вне } -m+1 : -1; \\ f_2(j) &= f(j) \text{ при } |j| \geq m \text{ и } f_2(j) = 0 \text{ на } -m+1 : m-1. \end{aligned}$$

Тогда $f = f_0 + f_1 + f_2$ и $\|f_2\| < \varepsilon/2$.

Далее, для краткости будем использовать обозначение $n = 2^N$. Сплайн S_n можно рассматривать как ортогональную проекцию сигнала f на $S_{p,n}$. Оператор проектирования обозначим P_n . Тогда

$$S_n = P_n f = P_n f_0 + P_n f_1 + P_n f_2. \quad (42)$$

Очевидно, что $\|P_n f_2\| \leq \|f_2\| < \varepsilon/2$.

Оценим $\|P_n f_0\|$. Проекцию $P_n f_0$ можно представить в виде ряда

$$(P_n f_0)(j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f_0, B_{p,n}(\cdot - kn)) \chi_{p,n}(j - kn), \quad (43)$$

где $\chi_{p,n}$ – ТВ-сплайн, двойственный В-сплайну $B_{p,n}$ (определен интегральной формулой (22)).

Допустим, что $n \geq m$. Тогда в сумме (43) остается только p слагаемых

$$(P_n f_0)(j) = \sum_{k=0}^{p-1} (f_0, B_{p,n}(\cdot + kn)) \chi_{p,n}(j + kn). \quad (44)$$

Из определения В-сплайнов сразу следует, что $B_{p,n}(j) \leq n^{p-1}$ для всех j . Поэтому

$$|(f_0, B_{p,n}(\cdot + kn))| \leq \sum_{j=0}^{m-1} |f_0(j)| n^{p-1} = C_0 n^{p-1}.$$

Норма $\|\chi_{p,n}\|^2$ оценивается неравенством (23). В результате

$$\|P_n f_0\| \leq p C_0 \left(\frac{\pi}{2}\right)^p n^{-1/2}$$

для всех $n \geq m$. Аналогичная оценка (с константой C_1) справедлива для $P_n f_1$. Из (42) получаем

$$\|S_{2^N}\| \leq p(C_0 + C_1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^p 2^{-N/2} + \varepsilon/2$$

для всех N таких, что $2^N \geq m$. Отсюда следует (40). По ходу доказательства выведена оценка (41). \square

14. Фактически при каждом p построен своеобразный кратномасштабный анализ в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$. Чтобы выявить сходство с классической конструкцией КМА (см. [3, определение 11.1]) введем обозначения $V_k = S_{p,2^k}$, $W_k = W_{p,2^k}$. Тогда выполнены соотношения $\ell^2(\mathbb{Z}) = V_0 \supset V_1 \supset \dots$,

$$V_{k-1} = V_k \oplus W_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \ell^2(\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} W_k.$$

При $p = 1$ подпространства W_k являются “хааровскими”, т.е. W_k состоит из функций $R(j)$, для которых $R(j) = -c(l)$ при $l2^k \leq j \leq l2^k + 2^{k-1} - 1$ и $R(j) = c(l)$ при $l2^k + 2^{k-1} \leq j \leq (l+1)2^k - 1$.

В каждом подпространстве V_k можно построить функцию φ_k такую, что система $\{\varphi_k(\cdot - l2^k)\}$ образует базис Рисса в V_k . В качестве φ_k можно взять любую функцию вида

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_k(x) E_{p,2^k}(x, j) dx,$$

где $\xi_k(x)$ – бесконечно дифференцируемая 2π -периодическая функция, не обращающаяся в нуль.

В каждом W_k можно построить функцию ψ_k такую, что система $\{\psi_k(\cdot - l2^k)\}$ образует базис Рисса в W_k . В качестве ψ_k можно взять любую функцию вида

$$\psi_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_k(x) W_{p,2^k}(x, j) dx,$$

где $\tau_k(x) \in C_{2\pi}^{\infty}$, $\tau_k(x) \neq 0$. В частности, если взять

$$\tau_k(x) = (4T_{2p,n}(x/2)T_{2p,n}(x/2 + \pi)T_{2p,2n}(x))^{-1}, \quad n = 2^{k-1},$$

то система $\{\psi_k(\cdot - l2^k) | l \in \mathbb{Z}\}$ образует жесткий фрейм в W_k (с константами $A_k = B_k = 1$), а система $\{\psi_k(\cdot - l2^k) | l \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \dots\}$ является жестким фреймом в $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Литература

- [1] Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. — СПб: Изд-во СПбГТУ, 1999.
- [2] Чуи К. Введение в вэйвлеты. — М.: Мир, 2001.
- [3] Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основы теории всплесков // Успехи матем. наук. — 1998. — Т. 53, № 6 (324). — С. 53–128.

- [4] Берколайко М.З., Новиков И.Я. О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56, № 3. — С. 3–12.
- [5] Желудев В.А., Певный А.Б. Кардинальная интерполяция дискретными сплайнами // Вестник Сыктывкарского ун-та. Сер. 1. — 1999. — Вып. 3. — С. 159–172.
- [6] Pevnyi A.B., Zheludev V.A. On wavelet analysis in the discrete splines space // Proceedings Second Int. Conf. "Tools for Math. Modeling'99". — St. Petersburg: SPTU, 1999. — Vol. 4. — P. 181–195.
- [7] Pevnyi A.B., Zheludev V.A. On interpolation by discrete splines with equidistant nodes // J. Approx. Theory. — 2000. — Vol. 102. — P. 286–301.
- [8] Aldroubi A., Eden M., Unser M. Discrete spline filters for multiresolutions and wavelets of l_2 // SIAM J. Math. Anal. — 1994. — Vol. 25, № 5. — P. 1412–1432.
- [9] Rioul O. A discrete-time multiresolution theory // IEEE Trans. Signal Processing. — 1993. — Vol. 41. — P. 2591–2606.
- [10] Zheludev V.A. Integral representation of slowly growing equidistant splines // Approximation Theory and Applications. — 1998. — Vol. 14, № 4. — P. 66–88.
- [11] Субботин Ю.Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Труды МИАН. — 1965. — Т. 78. — С. 24–44.
- [12] Schoenberg I.J. Cardinal interpolation and spline functions. II. // J. Approx. Theory. — 1969. — Vol. 2, № 2. — P. 167–206.
- [13] Pevnyi A.B., Zheludev V.A. Construction of wavelet analysis in the space of discrete splines using Zak transform // J. Fourier Analysis and Application. — 2002. — Vol. 8, № 1. — P. 55–77.
- [14] Зюзин М.В. О применении фильтров с постоянными коэффициентами // Численные методы и математическое моделирование / Сб. научных трудов под ред. В.П. Ильина. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1990. — С. 73–84.
- [15] Ichige K., Kamada M. An approximation for discrete B-splines in time domain // IEEE Signal Processing Letters. — 1997. — Vol. 4, № 3. — P. 82–84.
- [16] Schoenberg I.J. Cardinal spline interpolation. — Philadelphia: SIAM, 1973.

Госуниверситет, кафедра прикладной математики,
Сыктывкар, 167001
E-mail: pevnyi@syktsu.ru

Статья поступила
31 января 2003 г.