A. V. Andreev, M. V. Shamolin, Mathematical modeling of a medium interaction onto rigid body and new two-parametric family of phase patterns,
Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya, 2014, Issue 10, 109–115

УДК 531.01+531.552

А.В. Андреев, М.В. Шамолин[1]

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ СРЕДЫ НА ТВЕРДОЕ ТЕЛО И НОВОЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ[2]

Рассматривается математическая модель воздействия среды на твердое тело с участком его внешней поверхности в виде конуса. Приводится полная система уравнений движения, состоящая из динамической и кинематической частей. Динамическая часть образует независимую подсистему третьего порядка. Получено новое семейство фазовых портретов на фазовом цилиндре квазискоростей. Данное семейство состоит из бесконечного множества топологически неэквивалентных фазовых портретов. При этом перестройка топологического типа при переходе от одного портрета к другому происходит вырожденным образом. Обсуждается также вопрос устойчивости ключевого режима — прямолинейного поступательного торможения.

Ключевые слова: твердое тело, сопротивляющаяся среда, динамическая система, фазовый портрет, топологическая эквивалентность.

1. Динамическая часть уравнений движения

Рассматривается плоскопараллельное движение твердого тела, имеющего конусообразную переднюю часть, воздействующую с потоком среды (рис. 1.1).

Координата точки N приложения силы воздействия среды (x_N, y_N):

$$y_N = R(\alpha), \ \ \alpha = \angle xDv. \tag{1.1}$$

Силы лобового и бокового сопротивления будем представлять в виде

$$\mathbf{S}_x = -s(\alpha)v^2\mathbf{e}_x, \ \ \mathbf{S}_y = -b(\alpha)v^2\mathbf{e}_y, \ \ |\mathbf{v}_D| = v. \tag{1.2}$$

Динамическая часть уравнений движения перепишется в виде (m — масса тела, I — центральный момент его инерции, $\sigma = CD$) при учете условий (1.1), (1.2):

Андреев Алексей Витальевич (`sci@pfur.ru`), кафедра нелинейного анализа и оптимизации, Российский университет дружбы народов, 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

Шамолин Максим Владимирович (`shamolin@imec.msu.ru`), Институт механики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-01-00020-а).

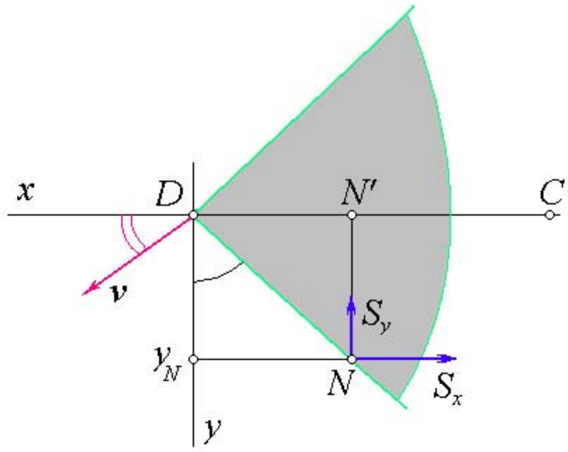

Рис. 1.1. Модель взаимодействия тела со средой

$$\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha + \Omega v\sin\alpha + \sigma\Omega^2 = -\frac{s(\alpha)}{m}v^2, \tag{1.3}$$

$$\dot{v}\sin\alpha + \dot{\alpha}v\cos\alpha - \Omega v\cos\alpha + \sigma\dot{\Omega} = -\frac{b(\alpha)}{m}v^2, \tag{1.4}$$

$$I\dot{\Omega} = -F(\alpha)s(\alpha)v^2 + \sigma b(\alpha)v^2 - h\Omega v, \tag{1.5}$$

при этом $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$, а коэффициент $h > 0$ характеризует дополнительный момент, зависящий от угловой скорости [1–3].

Поскольку кинетическая энергия тела и обобщенные силы и моменты, действующие на тело, не зависят от положения тела на плоскости, позиционные координаты в системе являются циклическими. Это позволяет рассматривать систему динамических уравнений (1.3)–(1.5) в качестве независимой. При этом система кинематических уравнений (здесь переменные φ, x_0, y_0 определяют положение тела на плоскости)

$$\dot{\varphi} = \Omega, \;\; \dot{x_0} = v\cos(\alpha-\varphi), \;\; \dot{y_0} = v\sin(\alpha-\varphi)$$

вместе с системой (1.3)–(1.5) является полной системой для исследования рассматриваемого движения в построенном поле сил.

Без ограничения общности [1; 4] в основном будем рассматривать следующее представление для функций $R(\alpha), s(\alpha), b(\alpha)$, определяющих воздействие среды:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \;\; A > 0, \tag{1.6}$$

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \;\; b(\alpha) = b_1\sin\alpha, \;\; B, b_1 > 0, \tag{1.7}$$

и именовать функции R, s, b функциями Чаплыгина [1; 2; 3; 5].

2. Дальнейшее понижение порядка

Уравнения (1.3), (1.4) могут быть приведены к виду

$$\dot{v} + \sigma\Omega^2\cos\alpha + \sigma\dot{\Omega}\sin\alpha = -\frac{s(\alpha)}{m}v^2\cos\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}v^2\sin\alpha, \tag{2.1}$$

$$\dot{\alpha}v - \Omega v + \sigma\dot{\Omega}\cos\alpha - \sigma\Omega^2\sin\alpha = -\frac{b(\alpha)}{m}v^2\cos\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}v^2\sin\alpha. \tag{2.2}$$

Вводя далее новое дифференцирование по формуле $<\cdot>= d/dt = vd/dq = v <'>$, где q — путь, пройденный точкой D, имеем: $\Omega = \omega v$, $\dot{\Omega} = v(\omega' v + \omega v')$. Тогда динамическая часть уравнений движения в нашем случае примет следующий вид:

$$v' = v\Psi_1(\alpha, \omega), \tag{2.3}$$

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}\cos\alpha, \tag{2.4}$$

$$\omega' = -\frac{1}{I}\psi(\alpha, \omega) - \omega\Psi_1(\alpha, \omega), \tag{2.5}$$

где

$$\psi(\alpha, \omega) = F(\alpha) - \sigma b(\alpha) + h\omega,$$

$$\Psi_1(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I}\psi(\alpha, \omega)\sin\alpha - \sigma\omega^2\cos\alpha - \frac{s(\alpha)}{m}\cos\alpha - \frac{b(\alpha)}{m}\sin\alpha.$$

Вводя далее безразмерные параметры и дифференцирование в виде

$$q = Q\sigma,\ \ \bar{\omega} = \omega\sigma,\ \ \beta_1 = \frac{\sigma^2 AB}{I},\ \ \beta_2 = \frac{\sigma^3 b_1}{I},\ \ \beta_3 = \frac{\sigma h}{I},\ \ \beta_4 = \frac{B\sigma}{m},\ \ \beta_5 = \frac{b_1\sigma}{m},$$

опуская при этом черту в дальнейшем над безразмерной переменной $\bar{\omega}$, а также по-прежнему обозначая штрихом производную по безразмерной величине Q, имеем систему (2.4), (2.5) в случаях (1.6), (1.7) в следующем виде:

$$\begin{gathered}\alpha' = \omega + \beta_1\sin\alpha\cos^2\alpha - \beta_2\sin\alpha\cos\alpha + \beta_3\omega\cos\alpha + \\ +\omega^2\sin\alpha + \beta_4\sin\alpha\cos\alpha - \beta_5\sin\alpha\cos\alpha,\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}\omega' = -\beta_1\sin\alpha\cos\alpha + \beta_2\sin\alpha - \beta_3\omega + \omega^3\cos\alpha - \beta_1\omega\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ +\beta_2\omega\sin\alpha - \beta_3\omega^2\sin\alpha + \beta_4\omega\cos^2\alpha + \beta_5\omega\sin^2\alpha.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Безразмерные параметры $\beta_k, k = 1, \ldots, 5$, естественно являются:
β_1 — параметром момента силы лобового сопротивления;
β_2 — параметром момента боковой силы;
β_3 — параметром дополнительного демпфирующего момента;
β_4 — параметром силы лобового сопротивления;
β_5 — параметром момента боковой силы.

Имеем, таким образом, пятипараметрическое семейство систем (2.6), (2.7) на двумерном фазовом цилиндре

$$\{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2 : \alpha \mod 2\pi\}.$$

3. Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов

Рассмотрим случай наличия двух пар сил, а именно предположим, что выполнены следующие условия:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0. \tag{3.1}$$

Таким образом, в системе присутствуют две пары сил: пара силы силы лобового сопротивления и пара боковой силы (которые, в принципе, можно сложить, см. также [6–8]).

Тогда система (2.6), (2.7) при условиях (3.1) обладает двухпараметрическим семейством фазовых портретов (рис. 3.1–3.6, замена $\Omega \leftrightarrow \omega$).

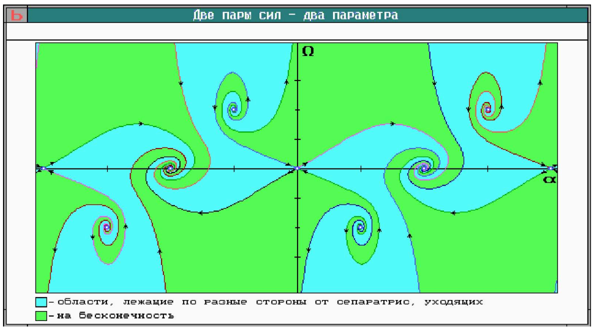

Рис. 3.1. Фазовый портрет без дополнительных седел

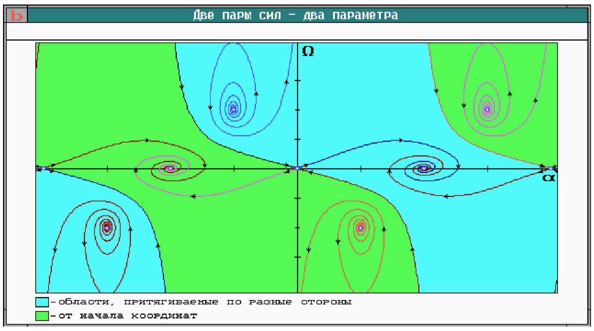

Рис. 3.2. Фазовый портрет без дополнительных седел

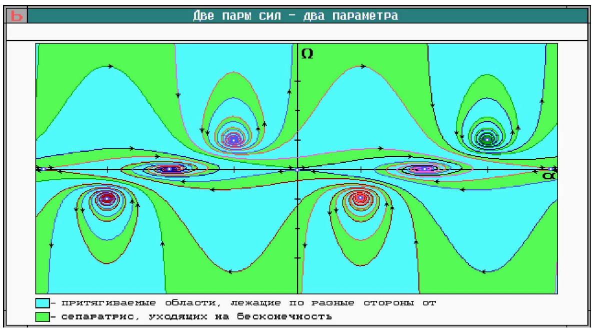

Рис. 3.3. Фазовый портрет без дополнительных седел

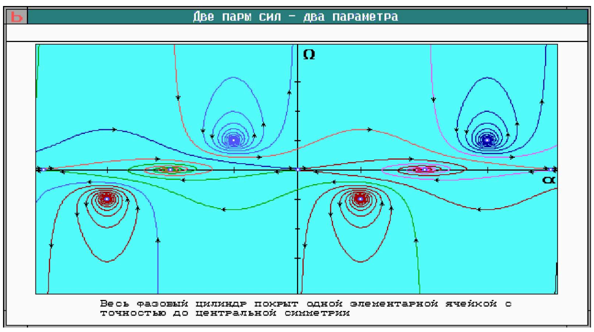

Рис. 3.4. Фазовый портрет без дополнительных седел

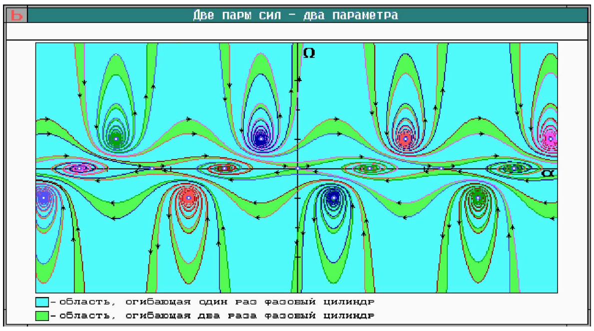

Рис. 3.5. Фазовый портрет без дополнительных седел

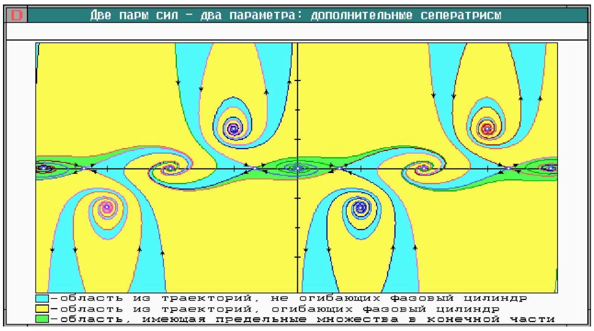

Рис. 3.6. Фазовый портрет с дополнительными седлами

Полученное в данной работе семейство отличается от ранее полученных семейств [9; 10]. При этом переход от фазового потрета с одними топологическими свойствами к фазовому портрету с другими топологическими свойствами разбиения на траектории происходит вырожденным образом.

Литература

[1] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // Journal of Mathematical Sciences. 2003. Vol. 114. № 1. P. 919–975.

[2] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. 2013. Сер.: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 125. С. 5–254.

[3] Shamolin S.V. New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium // PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.). 2009. № 9. P. 139–140.

[4] Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН, 1996. Т. 349. № 2. С. 193–197.

[5] Шамолин М.В. Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Доклады РАН. 1994. Т. 337. № 5. С. 611–614.

[6] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.

[7] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

[8] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун–та. 1984. Сер. 1. Математика. Механика. № 6. С. 31–33.

[9] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.

[10] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.

References

[1] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium, *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, Vol. 14, no. 1, pp. 919–975.

[2] Shamolin M.V. Variety of cases of integrability in dynamics of lower-, and multi-dimensional body in nonconservative field. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennaya matematika i ee prolodzeniya. Tematicheskie obzory* [*Summary of science and technology. Ser.: Contemporary Mathematics and its Applications. Subject reviews*], Vol. 125, Dynamical Systems, 2013, pp. 5–254 [in Russian].

[3] Shamolin S.V. New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium. *PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.)*, 2009, no. 9, pp. 139–140.

[4] Shamolin M.V. Variety of types of phase portraits in the dynamics of a rigid body interacting with a resisting medium. *Doklady RAN* [*Proceedings of RAS*], 1996, Vol. 349, no. 2, pp. 193–197 [in Russian].

[5] Shamolin M.V. A new two-parameter family of phase portraits in the problem of a body motion in a medium. *Doklady RAN* [*Proceedings of RAS*], 1996, Vol. 337, no. 5, pp. 611–614 [in Russian].

[6] Shamolin M.V. Dynamical systems with variable dissipation: approaches, methods, and applications. *Fund. i prikl. Mat.*[*Fundamental and Applied Mathematics*], 2008, Vol. 14, no. 3, pp. 3–237 [in Russian].

[7] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. Mathematical aspects in classical and celestial mechanics. M., VINITI, 1985, 304 p. [in Russian].

[8] Trofimov V.V. Symplectic structures on symmetruc spaces of automorphysm groups. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [*Vestnik of Moscow State University. Ser.1. Mathematics. Mechanics*], 1984, no. 6, pp. 31–33 [in Russian].

[9] Trofimov V.V., Shamolin M.V. Geometrical and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems. *Fund. i prikl. Mat.*[*Fundamental and Applied Mathematics*], 2010, Vol. 16, no. 4, pp. 3–229 [in Russian].

[10] Shamolin M.V. Methods of analysis of various dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body. M., Ekzamen, 2007, 352 p. [in Russian].

***A. V. Andreev, M. V. Shamolin*[3]**

MATHEMATICAL MODELING OF A MEDIUM INTERACTION ONTO RIGID BODY AND NEW TWO-PARAMETRIC FAMILY OF PHASE PATTERNS

Mathematical model of a medium interaction onto a rigid body with the part of its interior surface as the cone is considered. The complete system of body motion equations which consists of dynamic and kinematic parts is presented. The dynamic part is formed by the independent three-order subsystem. New family of phase patterns on phase cylinder of quasi-velocities is found. This family consists of infinite set of topologically non-equivalent phase patterns. Furthermore, under the transition from one pattern type to another one, the reconstruction of topological type occurs by the degenerate way. Also the problem of key regime stability, i.e., rectilinear translational deceleration, is discussed.

Key words: rigid body, resisting medium, dynamical system, phase pattern, topological equivalence.

Статья поступила в редакцию 20/ V/2014.

The article received 20/ V/2014.

[3] *Andreev Aleksey Vitalievich* (`sci@pfur.ru`), Department of Non-linear Analysis and Optimization, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 117198, Russian Federation.

Shamolin Maxim Vladimirovich (`shamolin@imec.msu.ru`), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation.