

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гончаров, В. В. Стрижов, Выравнивание декартовых произведений упорядоченных множеств, *Информ. и её примен.*, 2020, том 14, выпуск 1, 31–39

DOI: 10.14357/19922264200105

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

25 января 2025 г., 14:42:31



ВЫРАВНИВАНИЕ ДЕКАРТОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ*

А. В. Гончаров¹, В. В. Стрижов²

Аннотация: Работа посвящена исследованию метрических методов анализа объектов сложной структуры. Предлагается обобщить метод динамического выравнивания двух временных рядов на случай объектов, определенных на двух и более осях времени. В дискретном представлении такие объекты являются матрицами. Метод динамического выравнивания временных рядов обобщается как метод динамического выравнивания матриц. Предложена функция расстояния, устойчивая к монотонным нелинейным деформациям декартова произведения двух и более временных шкал. Определен выравнивающий путь между объектами. В дальнейшем объектом называется матрица, в которой строки и столбцы соответствуют осям времени. Исследованы свойства предложенной функции расстояния. Для иллюстрации метода решаются задачи метрической классификации объектов на модельных данных и данных из набора MNIST.

Ключевые слова: функция расстояния; динамическое выравнивание; расстояние между матрицами; нелинейные деформации времени; пространственно-временные ряды

DOI: 10.14357/19922264200105

1 Введение

Временные ряды представляют собой набор измерений, упорядоченных по оси времени. Анализ временных рядов производится при решении задач, связанных с классификацией активности человека по измерениям акселерометра телефона, поиском паттернов в EEG-сигналах (электроэнцефалограмма), кластеризации набора ECoG (электрокортикограмма) данных и во многих других задачах [1]. Рассматриваются объекты, для которых время между измерениями фиксированно. В данной работе для построения адекватной функции расстояния между объектами требуется учесть нелинейные деформации относительно оси времени: глобальные и локальные сдвиги, растяжения и сжатия [2].

В [3] приводятся различные методы решения задач анализа временных рядов: классификации, детектирования паттернов, кластеризации и др. В [4] описание временных рядов строится с помощью анализа параметров моделей, в [5] используется их признаковое описание, в [6] анализируется их форма. Комбинации этих подходов описаны в [3].

Метрические методы находят схожие объекты в наборе. Используются функции расстояния над временными рядами: расстояние Хаус-

дорфа [7], MODH [8], расстояние, основанное на НММ (hidden Markov model) [9], евклидово расстояние в исходном пространстве или в пространстве сниженной размерности [6], LCSS (longest common subsequence) [10]. Показано [11], что в случае локальных или глобальных деформаций времени при решении задач, требующих анализа исходной формы временного ряда, метод динамического выравнивания оси времени DTW (Dynamic Time Warping) превосходит другие функции расстояния [12] по качеству итогового решения задачи, так как при наличии смещений двух объектов относительно друг друга требуется выравнивать их оптимальным образом для вычисления расстояния между ними.

В данной работе предлагается перейти от рассмотрения объекта $s(t)$, временного ряда, к более общему случаю $s(\mathbf{t})$, в котором компоненты вектора \mathbf{t} — оси времени. Из-за существенного роста вычислительной сложности при увеличении числа осей времени предлагается рассмотреть объекты $s(t_1, t_2)$, определенные на двух осях времени. Оси времени считаются независимыми. В случае единственной дискретной и ограниченной сверху шкалы времени объект представим вектором фиксированной размерности. Аналогично объект настоящего исследования представим матрицей.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 19-07-1155 и 19-07-00885). Настоящая статья содержит результаты проекта «Статистические методы машинного обучения», выполняемого в рамках реализации Программы Центра компетенций Национальной технологической инициативы «Центр хранения и анализа больших данных», поддерживаемого Министерством науки и высшего образования Российской Федерации по договору МГУ им. М. В. Ломоносова с Фондом поддержки проектов Национальной технологической инициативы от 11.12.2018 № 13/1251/2018.

¹Московский физико-технический институт, alex.goncharov@phystech.edu

²Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский физико-технический институт, strijov@ccas.ru

Вводятся ограничения на зависимости осей времени в декартовом произведении для таких объектов. Определена гипотеза порождения данных: объекты одного класса эквивалентности получены при помощи допустимых преобразований, а именно: локальных деформаций (растяжений и сжатий) каждой из осей времени по отдельности. В дискретном случае преобразование представимо дублированием строк и столбцов матриц. В число допустимых преобразований попадают и глобальные деформации: сдвиги по осям времени, представимые добавлением и удалением крайних строк и столбцов исходных матриц. Для каждой из осей времени выполняются свойства времени: монотонность и непрерывность. Похожими на описанные свойствами обладает, например, частотный спектр сигнала, где одна ось определяет время, а другая — частоту, величину, обратную времени.

Между двумя объектами, матрицами, в случае допустимых преобразований требуется определить инвариантную к преобразованиям осей времени функцию расстояния, которая сможет выделить классы эквивалентности множества преобразованных объектов. Работа посвящена определению такой функции расстояния, как обобщения метода динамического выравнивания временных рядов DTW для матриц.

Цель данной работы — построение метода, основанного на динамическом выравнивании осей времени для матриц. Метод динамического выравнивания временных рядов [13] определен только для объектов с одной осью времени, что делает его неприменимым для описанного случая. Однако концепции, используемые на каждой стадии вычисления оптимального выравнивания, обобщены на рассматриваемый случай. Работа исследует свойства предложенного метода и сравнивает результаты применения метода к задачам классификации изображений [14] с результатами функции расстояния L_2 .

Для иллюстрации и анализа результатов решается задача метрической классификации объектов (матриц низкой размерности). Используются наборы данных: модельные данные, которые согласуются с выдвинутой гипотезой порождения данных для временных рядов, подмножество набора MNIST сниженной размерности и частотный спектр сигнала.

2 Постановка задачи построения функции расстояния

Рассмотрим задачу построения функции расстояния между объектами. Функция расстояния

инвариантна к допустимым преобразованиям осей времени: глобальным и локальным линейным и нелинейным деформациям временной шкалы. Ниже приведены две постановки задачи, с помощью которых определены свойства предложенной функции расстояния, оценено ее качество и проведено сравнение нескольких функций расстояния: предложенной и L_2 .

Первая постановка задачи использует общее свойство функций расстояния: объединение схожих объектов и разделение непохожих объектов. Вводится определение свойства инвариантности функции расстояния к допустимым преобразованиям осей времени. Вторая постановка задачи уточняет первую и заключается в проведении метрической классификации методом ближайшего соседа.

Постановка задачи выбора функции расстояния между двумя объектами. На двух временных осях заданы объекты вида $\mathbf{A}(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Функция $G_w(\mathbf{A}) : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$ задает допустимые преобразования исходного объекта \mathbf{A} : глобальные сдвиги, локальные линейные и нелинейные деформации, а именно: растяжения и сжатия оси времени, сдвиги значений по оси времени. Скалярный параметр $w \in \mathbb{R}^+$ функции G фиксирует набор этих преобразований.

Допустимым элементарным преобразованием матрицы \mathbf{A} назовем дублирование случайных строк и столбцов исходной матрицы, добавление или удаление крайних строк и столбцов. Допустимым преобразованием примем некоторую последовательность допустимых элементарных преобразований матрицы \mathbf{A} и обозначим как $G_w(\mathbf{A})$.

Будем называть объект $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}}$ полученным из объекта \mathbf{A} при помощи допустимых преобразований $G_{\hat{w}}$, если существует $\hat{w} \in \mathbb{R}^+ : \mathbf{B} = G_{\hat{w}}(\mathbf{A})$.

Функцию расстояния между двумя объектами $\rho : \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{\hat{n} \times \hat{n}} \rightarrow \mathbb{R}^+$ оценим на выборке $\mathcal{D} = \{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^m$ объектов вида $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Для каждого объекта выборки \mathbf{A}_i и объекта \mathbf{B}_j его класса эквивалентности $\{\mathbf{B}_j\}_i = \{\mathbf{B} \in \mathcal{D} | \exists w_i, w_j : G_{w_i}(\mathbf{A}_i) = G_{w_j}(\mathbf{B}_j)\}$ заданы допустимые трансформации с параметрами w_i и w_j , такие что $G_{w_i}(\mathbf{A}_i) = G_{w_j}(\mathbf{B}_j)$. Для каждого объекта выборки \mathbf{A}_i и объекта \mathbf{C}_k из других классов эквивалентности $\{\mathbf{C}_k\}_i = \{\mathbf{C} \in \mathcal{D} | \nexists w_i, w_k : G_{w_i}(\mathbf{A}_i) = G_{w_k}(\mathbf{C}_k)\}$ не существует таких $w_i, w_k : G_{w_i}(\mathbf{A}_i) = G_{w_k}(\mathbf{C}_k)$.

Решается задача поиска функции расстояния ρ , значение которой на паре объектов одного класса эквивалентности меньше, чем на любой паре объектов из разных: для любых $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ $\rho(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_j) < \rho(\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_k)$. Функцию расстояния, обладающую таким свойством, назовем инвариантной на классах эквивалентности.

Критерием качества для функции расстояния ρ на выборке \mathfrak{D} примем долю объектов, для которых указанное неравенство выполняется:

$$S_\rho(\mathfrak{D}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \prod_{\{\mathbf{B}_j\}_i} \prod_{\{\mathbf{C}_k\}_i} [\rho(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_j) < \rho(\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_k)].$$

Постановка задачи выбора функции расстояния ρ сведится к задаче максимизации критерия качества.

Прикладное использование функции расстояния. Задана выборка $\mathfrak{D} = \{(\mathbf{A}_i, y_i)\}_{i=1}^m$, состоящая из пар объект–ответ. Объектами служат объекты сложной структуры: $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а ответами выступают метки класса — $y_i \in Y = \{1, \dots, E\}$, где $E \ll m$. Выборка разделена на обучение $\mathfrak{D}_l = \{(\mathbf{A}_i, y_i)\}_{i=1}^{m_1}$ и контроль $\mathfrak{D}_t = \{(\mathbf{A}_i, y_i)\}_{i=1}^{m_1+m_2}$.

Модель классификации f принадлежит множеству моделей метрической классификации 1NN, которые классифицируемому объекту ставят в соответствие метку класса ближайшего объекта из обучающей выборки по заданной функции расстояния ρ :

$$\hat{y} = f(\mathbf{B}|\rho) = y \arg \min_{i=1, \dots, m_1} \rho(\mathbf{B}, \mathbf{A}_i).$$

Критерий качества S модели f для задачи классификации — доля правильно поставленного класса на контрольной выборке:

$$S(f|\rho) = \frac{1}{m_2} \sum_{i=m_1}^{m_1+m_2} [f(\mathbf{A}_i|\rho) = y_i].$$

Требуется выбрать функцию расстояния ρ для модели классификации $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow Y$, максимизирующую критерий качества S на контрольной выборке:

$$f = \arg \max_{\rho \in \{\text{mDTW}, L_2\}} (S(f|\rho)).$$

3 Вычисление матричного расстояния mDTW

Предлагается использовать функцию расстояния DTW, модифицированную для случая выравнивания двойной шкалы времени.

Определение 1. Даны два объекта $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тензор невязок $\Omega^{n \times n \times n \times n}$ — такой тензор, что его элемент $\Omega(i, j, k, l)$ равен квадрату разности между элементами $\mathbf{A}(i, j)$ и $\mathbf{B}(k, l)$:

$$\Omega(i, j, k, l) = (\mathbf{A}(i, j) - \mathbf{B}(k, l))^2.$$

Определение 2. Путем π между двумя объектами $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ назовем множество индексов тензора Ω :

$$\pi = \{(i, j, k, l)\}, \quad i, j, k, l \in \{1, \dots, n\},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

Частичный порядок. Для элементов пути π с фиксированными значениями i, k задан порядок: выравнивающий путь для фиксированных строк двух матриц упорядочен — $\{(i, j_r, k, l_r)\}_{r=1}^R \subset \pi$ мощностью R . Аналогично для фиксированных столбцов с индексами j, l .

Граничные условия. Пусть $(i, j, k, l) \in \pi$, тогда $(1, j, 1, l) \in \pi$ и $(i, 1, k, 1) \in \pi$. Путь π содержит элементы тензора Ω : $(1, 1, 1, 1) \in \pi$ и $(n, n, n, n) \in \pi$.

Непрерывность по направлению. Для упорядоченного подмножества пути $\{(i, j_r, k, l_r)\}_{r=1}^R \subset \pi$ выполняется условие непрерывности:

$$j_r - j_{r-1} \leq 1, \quad l_r - l_{r-1} \leq 1, \quad r = 2, \dots, R.$$

На шаге пути π по фиксированному направлению времени i, k встречаются только соседние элементы матрицы (включая соседние по диагонали). Аналогично для фиксированных j, l .

Монотонность по направлению. Для упорядоченного подмножества пути $\{(i, j_r, k, l_r)\}_{r=1}^R \subset \pi$ выполняется хотя бы одно из условий монотонности функции выравнивания времени:

$$j_r - j_{r-1} \geq 1, \quad l_r - l_{r-1} \geq 1, \quad r = 2, \dots, R.$$

Свойства пути между матрицами обобщают свойства пути между двумя временными рядами.

Определение 3. Стоимость $\text{Cost}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \pi)$ пути π между объектами \mathbf{A}, \mathbf{B} :

$$\text{Cost}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \pi) = \sum_{(i, j, k, l) \in \pi} \Omega(i, j, k, l).$$

Определение 4. Выравнивающий путь $\hat{\pi}$ между объектами \mathbf{A}, \mathbf{B} — путь наименьшей стоимости среди всех возможных путей между объектами:

$$\hat{\pi} = \arg \min_{\pi} \text{Cost}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \pi).$$

Функция расстояния $\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{mDTW}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ между объектами \mathbf{A} и \mathbf{B} рассчитывается как стоимость выравнивающего пути $\hat{\pi}$:

$$\text{mDTW}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{Cost}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \hat{\pi}). \quad (1)$$

Алгоритм вычисления значения расстояния (4). Построение алгоритма вычисления значения функции расстояния между матрицами основан на алгоритме расчета функции расстояния между временными рядами. В случае выравнивания одной

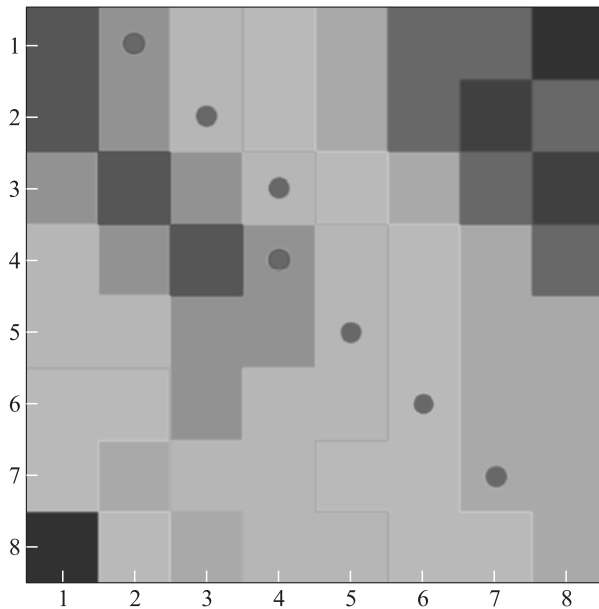


Рис. 1 Матрица стоимости оптимального выравнивания, по обеим осям отложены временные отсчеты

временной шкалы итоговая матрица расстояний D (рис. 1) в каждом элементе $D(i, j)$ содержит расстояние между подрядом первого временного ряда и подрядом второго временного ряда. Рассмотрим алгоритм динамического выравнивания двух временных рядов $\mathbf{s} \in R^n$ и $\mathbf{c} \in R^m$ на рис. 2.

Элемент $D(i, j)$ матрицы D соответствует стоимости выравнивающего пути между подпоследовательностями исходных временных рядов: $\mathbf{s}(1 : i) =$

$= \mathbf{s}(t), t = 1, \dots, i$, и $\mathbf{c}(1 : j) = \mathbf{c}(t), t = 1, \dots, j$. Алгоритм построения наилучшего выравнивания времени подразумевает, что выравнивающий путь между этими подпоследовательностями получен одним из трех способов — если стоимость выравнивающего пути между подпоследовательностями $\mathbf{s}(1 : \bar{i})$ и $\mathbf{c}(1 : \bar{j})$ минимальна для \bar{i}, \bar{j} из множества

$$\overline{i, j} \in \{\{i - 1, j\}, \{i, j - 1\}, \{i - 1, j - 1\}\},$$

тогда выравнивающий путь между $\mathbf{s}(1 : i)$ и $\mathbf{c}(1 : j)$ получен добавлением пары (i, j) к выбранному выравнивающему пути с минимальной стоимостью из трех.

Предложенный алгоритм переносит эти рассуждения на случай выравнивания двух матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} . Элемент $D(i, j, k, l)$ четырехиндексного тензора расстояний D соответствует стоимости выравнивающего пути между $\mathbf{A}(1 : i, 1 : j) = \mathbf{A}(t_1, t_2)$, $t_1 = 1, \dots, i, t_2 = 1, \dots, j$, и $\mathbf{B}(1 : k, 1 : l) = \mathbf{B}(t_1, t_2)$, $t_1 = 1, \dots, k, t_2 = 1, \dots, l$. Выравнивающий путь между этими подматрицами получен одним из семи способов — если стоимость выравнивающего пути между подматрицами $\mathbf{A}(1 : \bar{i}, 1 : \bar{j})$ и $\mathbf{B}(1 : \bar{k}, 1 : \bar{l})$ минимальна для $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{l}$ из множества

$$\begin{aligned} \overline{i, j, k, l} \in & \{\{i - 1, j, k, l\}, \{i, j - 1, k, l\}, \\ & \{i, j, k - 1, l\}, \{i, j, k, l - 1\}, \{i - 1, j, k - 1, l\}, \\ & \{i, j - 1, k, l - 1\}, \{i - 1, j - 1, k - 1, l - 1\}\}, \end{aligned}$$

то к выравнивающему пути между этими подматрицами добавляется элемент пути (i, j, k, l) и по-

```

DTW(s,c):
  D(1:n+1, 1:m+1) = inf;
  D(1,1) = 0;
  for i = 2: n + 1
    for j = 2: m + 1
      d = (s(i - 1) - c(j - 1))^2;
      D(i, j) = d + min([D(i - 1, j), D(i, j - 1), D(i - 1, j - 1)]);
  return sqrt(D(n + 1, m + 1))
  
```

Рис. 2 Алгоритм вычисления DTW для временных рядов

```

Correction( $\overline{i, j, k, l}, \pi(\overline{i, j, k, l})$ ):
  if  $\overline{i, j, k, l} \in \{(i - 1, j, k, l); (i, j, k - 1, l); (i - 1, j, k - 1, l)\}$ :
     $\hat{\pi} = \{(\bar{i}, r, \bar{k}, f) \in \pi(\overline{i, j, k, l}) | r, f \in \mathbb{N}\}$ 
  elif  $\overline{i, j, k, l} \in \{(i, j - 1, k, l); (i, j, k, l - 1); (i, j - 1, k, l - 1)\}$ :
     $\hat{\pi} = \{(r, \bar{j}, f, \bar{l}) \in \pi(\overline{i, j, k, l}) | r, f \in \mathbb{N}\}$ 
  elif  $\overline{i, j, k, l} = i - 1, j - 1, k - 1, l - 1$ :
     $\hat{\pi} = \{(\bar{i}, r, \bar{k}, f) \in \pi(\overline{i, j, k, l}) | r, f \in \mathbb{N}\} \cup$ 
     $\cup \{(r, \bar{j}, f, \bar{l}) \in \pi(\overline{i, j, k, l}) | r, f \in \mathbb{N}\}$ 
   $d\pi = \{\text{element} \in \hat{\pi} : \text{произведены замены индексов } \bar{i} = i, \bar{j} = j, \bar{k} = k, \bar{l} = l\}$ 
  return  $d\pi$ 
  
```

Рис. 3 Алгоритм вычисления поправки $d\pi$ пути π

```

mDTW(A, B) :
  D(1 : n + 1, 1 : n + 1, 1 : n + 1, 1 : n + 1) = inf;
  D(1, 1, 1, 1) = 0;
  π(1, 1, 1, 1) = ((1, 1), (1, 1))
  for i, j, k, l ∈ ℕ2:n+1 × ℕ2:n+1 × ℕ2:n+1 × ℕ2:n+1 :
    i, j, k, l = arg min( [ D(i-1, j, k, l), D(i, j-1, k, l), D(i, j, k-1, l), D(i, j, k, l-1),
      D(i-1, j, k-1, l), D(i, j-1, k, l-1), D(i-1, j-1, k-1, l-1)] );
  dπ = Correction(i, j, k, l, π(i, j, k, l))
  π(i, j, k, l) = dπ ∪ {(i, j, k, l)}
  cost = (A(i, j) - B(k, l))2 + ∑(r,f,t,g) ∈ dπ (A(r, f) - B(t, g))2;
  D(i, j, k, l) = cost + D(i, j, k, l)
return sqrt(D(n + 1, n + 1, n + 1, n + 1))
    
```

Рис. 4 Алгоритм вычисления расстояния между матрицами

правка $d\pi$ пути π , алгоритм вычисления которой приведен ниже.

Обозначим выравнивающий путь между $\mathbf{A}(1 : i, 1 : j)$ и $\mathbf{B}(1 : k, 1 : l)$ как $\pi(i, j, k, l)$, тогда поправка $d\pi$ пути $\pi(i, j, k, l)$ при фиксированных i, j, k, l вычисляется приведенным на рис. 3 образом.

Алгоритм динамического выравнивания двух матриц и вычисления расстояния mDTW между ними с учетом приведенного выше алгоритма примет вид, представленный на рис. 4.

Следует отметить, что алгоритм [15] имеет высокую сложность вычисления — $O(n^4)$. Предполагается ускорение метода с использованием ограничения Sakoe-Chiba band, что сократит вычислительную сложность алгоритма до $O(n^2k^2)$, где k — параметр ограничения.

4 Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проведен на модельных данных с допустимыми преобразованиями и на реальных данных: объектах коллекции MNIST с допустимыми преобразованиями и на спектрограммах зашумленных сигналов.

Решается задача метрической классификации методом ближайшего соседа. В таблице приведены значения критерия качества функции расстояния

$S_\rho(\mathcal{D})$ и критерия качества метрической классификации $S(f|p)$ при использовании двух функций расстояния: предложенной в работе mDTW и L_2 .

Модельные данные — это нулевые матрицы со случайными ненулевыми строками, столбцами, подпрямоугольниками с наложенным шумом. К ним применены допустимые преобразования, согласованные с гипотезой наличия локальных и глобальных искажений. На рис. 5 показан пример оптимального выравнивания двух объектов. Линиями показаны элементы пути π .

Подготовлена подвыборка набора данных MNIST. Она состоит из 100 объектов классов 0 и 1 сниженной размерности с допустимыми преобразованиями. На рис. 6 показан пример оптимального выравнивания объектов.

Аналогичный эксперимент проведен для решения задачи метрической классификации спектров различных сигналов, пример которых приведен на рис. 7. На рисунке показаны примеры Фурье-спектров этих сигналов. Спектр получен путем применения быстрого преобразования Фурье к исходному сигналу для различных окон с фиксированным размером и сдвигом. Исходные временные ряды обладали свойством периодичности, период выбирался случайным образом.

Тестирование проведено на разного рода данных: исходных модельных данных без наложения

Снижение расстояний при выполнении преобразований для различных наборов данных

Данные	Метод			
	L_2		MatrixDTW	
	$S(f p)$	$S_\rho(\mathcal{D})$	$S(f p)$	$S_\rho(\mathcal{D})$
Модельные данные без преобразований	92%	78%	100%	85%
Модельные данные с преобразованиями	86%	65%	100%	82%
Модельные данные с преобразованиями и шумом	69%	61%	92%	78%
MNIST без преобразований	95%	—	95%	—
MNIST с преобразованиями	53%	—	92%	—
Спектр сигнала	83%	—	96%	—

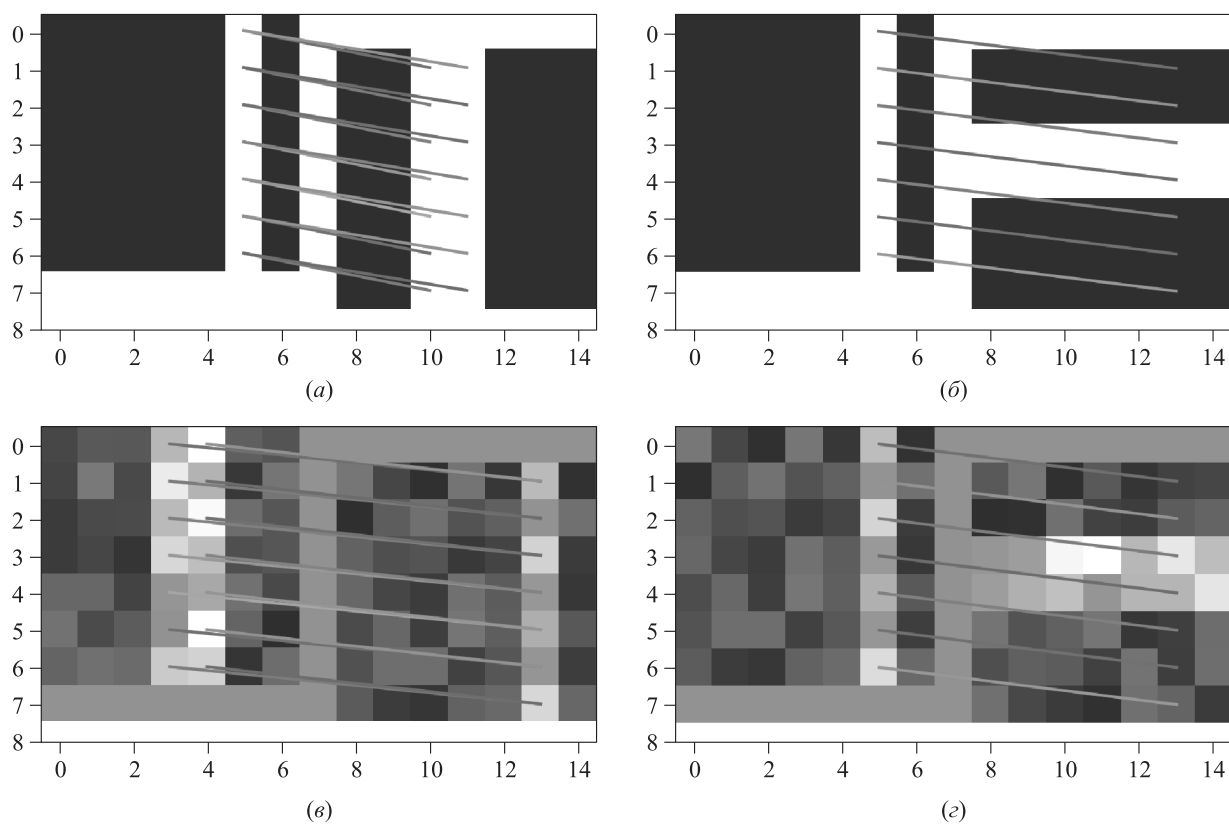


Рис. 5 Выравнивание модельных данных: (а) один класс без шума; (б) разные классы без шума; (в) один класс с шумом; (г) разные классы с шумом

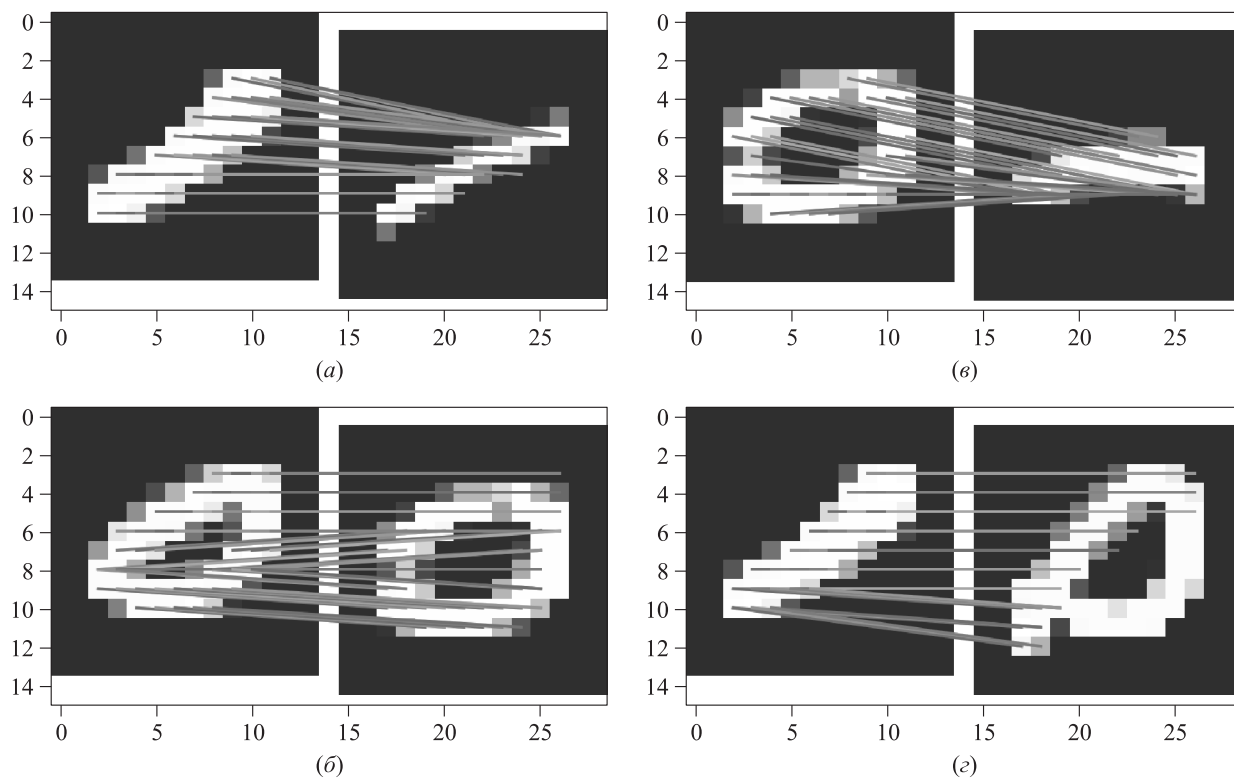


Рис. 6 Выравнивание данных MNIST: левый столбец — один класс; правый столбец — разные классы; (а) $mDTW = 720,1$; (б) $948,6$; (в) $2017,0$; (г) $mDTW = 2071,4$

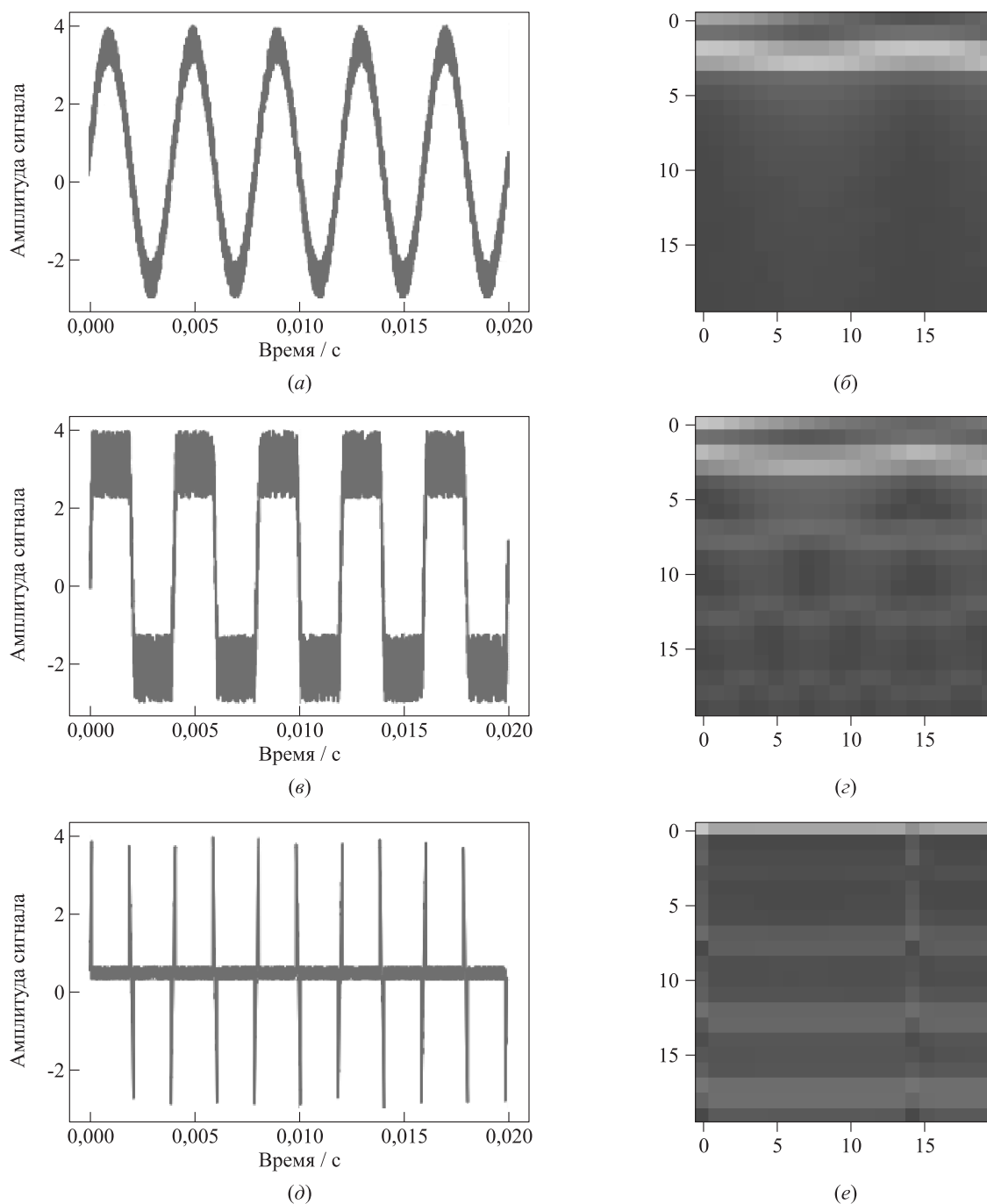


Рис. 7 Данные спектров сигнала: (а) класс 1; (б) спектр класса 1; (в) класс 2; (г) спектр класса 2; (д) класс 3; (е) спектр класса 3

допустимых преобразований, с ними, а также на модельных данных с наложенным поверх объектов случайным шумом.

В каждом из проведенных экспериментов была продемонстрирована устойчивость предложенного подхода к допустимым преобразованиям. Наилучшее значение критерия качества задачи классифи-

кации было достигнуто при использовании предложенной функции расстояния.

5 Заключение

В работе предложено обобщение метода динамического выравнивания временных рядов для

случая объектов, определенных на двух осях времени. Существует теоретическое обобщение предлагаемых методов на случай конечного множества осей времени. Вычислительный эксперимент позволил проанализировать свойства подхода: устойчивость к допустимым преобразованиям и разделяющая способность функции расстояния как на реальных, так и на модельных данных. Качество решения задачи метрической классификации выше решения, основанного на евклидовом расстоянии. Вычислительная сложность метода высокая, что ограничивает его применимость на объектах высокой размерности.

Литература

1. Hill N. J., Lal T. N., Schroder M., Hinterberger T., Wilhelm B., Nijboer F., Mochty U., Widman G., Elger C., Scholkopf B., Kubler A., Birbaumer N. Classifying EEG and ECoG signals without subject training for fast BCI implementation: Comparison of nonparalyzed and completely paralyzed subjects // *IEEE T. Neur. Sys. Reh.*, 2006. Vol. 14. Iss. 2. P. 183–186.
2. Sakoe H., Chiba S. A dynamic programming approach to continuous speech recognition // *7th Congress (International) on Acoustics Proceedings*, 1971. Vol. 3. P. 65–69.
3. Aghabozorgi S., Ali S. S., Wah T. Y. Time-series clustering — a decade review // *Inform. Syst.*, 2015. Vol. 53. P. 16–38.
4. Warrenliao T. Clustering of time series data — a survey // *Pattern Recogn.*, 2005. Vol. 38. Iss. 11. P. 1857–1874.
5. Hautamaki V., Nykanen P., Franti P. Time-series clustering by approximate prototypes // *19th Conference (International) on Pattern Recognition Proceedings*, 2008. No. D. P. 1–4.
6. Faloutsos C., Ranganathan M., Manolopoulos Y. Fast subsequence matching in time-series databases // *SIGMOD Rec.*, 1994. Vol. 23. Iss. 2. P. 419–429.
7. Basalto N., Bellotti R., Carlo F. D., Facchi P., Pascazio S. Hausdorff clustering of financial time series // *Physica A*, 2007. Vol. 379. Iss. 2. P. 635–644.
8. Gorelick L., Blank M., Shechtman E., Irani M., Basri R. Actions as space-time shapes // *IEEE T. Pattern Anal.*, 2007. Vol. 29. Iss. 12. P. 2247–2253.
9. Smyth P. Clustering sequences with hidden Markov models // *Adv. Neural In.*, 1997. Vol. 9. P. 648–654.
10. Banerjee A., Ghosh J. Clickstream clustering using weighted longest common subsequences // *Workshop on Web Mining, SIAM Conference on Data Mining Proceedings*, 2001. P. 33–40.
11. Aach J., Church G. M. Aligning gene expression time series with time warping algorithms // *Bioinformatics*, 2001. Vol. 17. Iss. 6. P. 495–508.
12. Yi B. K., Faloutsos C. Fast time sequence indexing for arbitrary \mathcal{L}_p norms // *26th Conference (International) on Very Large Data Bases Proceedings*, 2000. P. 385–394.
13. Goncharov A. V., Strijov V. V. Analysis of dissimilarity set between time series // *Computational Mathematics Modeling*, 2018. Vol. 29. Iss. 3. P. 359–366.
14. Alon J., Athitsos V., Sclaroff S. Online and offline character recognition using alignment to prototypes // *8th Conference (International) on Document Analysis and Recognition*, 2005. Vol. 2. P. 839–843.
15. Гончаров А. В. Выравнивания декартовых произведений упорядоченных множеств mDTW. Программная реализация алгоритма, 2019. <https://github.com/Intelligent-Systems-Phystech/PhDThesis/tree/master/Goncharov2019/MatrixDTW/code>.

Поступила в редакцию 24.04.19

ALIGNMENT OF ORDERED SET CARTESIAN PRODUCT

A. V. Goncharov¹ and V. V. Strijov^{1,2}

¹ Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141700, Russian Federation

² A. A. Dorodnitsyn Computing Center, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The work is devoted to the study of metric methods for analyzing objects with complex structure. It proposes to generalize the dynamic time warping method of two time series for the case of objects defined on two or more time axes. Such objects are matrices in the discrete representation. The DTW (Dynamic Time Warping) method of time series is generalized as a method of matrices dynamic alignment. The paper proposes a distance function resistant to monotonic nonlinear deformations of the Cartesian product of two time scales. The alignment path between objects is defined. An object is called a matrix in which the rows and columns correspond to the axes of time. The properties of the proposed distance function are investigated. To illustrate the method, the problems of metric classification of objects are solved on model data and data from the MNIST dataset.

Keywords: distance function; dynamic alignment; distance between matrices; nonlinear time warping; space–time series

DOI: 10.14357/19922264200105

Acknowledgments

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 19-07-1155 and 19-07-00885). The paper contains results of the project Statistical methods of machine learning, which is carried out within the framework of the Program “Center of Big Data Storage and Analysis” of the National Technology Initiative Competence Center. It is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation according to the agreement between the M. V. Lomonosov Moscow State University and the Foundation of project support of the National Technology Initiative from 11.12.2018, No. 13/1251/2018.

References

- Hill, N. J., T. N. Lal, M. Schroder, T. Hinterberger, B. Wilhelm, F. Nijboer, U. Mochty, G. Widman, C. Elger, B. Scholkopf, A. Kubler, and N. Birbaumer. 2006. Classifying EEG and ECoG signals without subject training for fast BCI implementation: Comparison of nonparalyzed and completely paralyzed subjects. *IEEE T. Neur. Sys. Reh.* 14(2):183–186.
- Sakoe, H., and S. Chiba. 1971. A dynamic programming approach to continuous speech recognition. *7th Congress (International) on Acoustics Proceedings.* 3:65–69.
- Aghabozorgi, S., S. S. Ali, and T. Y. Wah. 2015. Time-series clustering — a decade review. *Inform. Syst.* 53:16–38.
- Warrenliao, T. 2005. Clustering of time series data — a survey. *Pattern Recogn.* 38(11):1857–1874.
- Hautamaki, V., P. Nykanen, and P. Franti. 2008. Time-series clustering by approximate prototypes. *19th Conference (International) on Pattern Recognition Proceedings.* D:1–4.
- Faloutsos, C., M. Ranganathan, and Y. Manolopoulos. 1994. Fast subsequence matching in time-series databases. *SIGMOD Rec.* 23(2):419–429.
- Basalto, N., R. Bellotti, F. D. Carlo, P. Facchi, and S. Pascazio. 2007. Hausdorff clustering of financial time series. *Physica A* 379(2):635–644.
- Gorelick, L., M. Blank, E. Shechtman, M. Irani, and R. Basri. 2007. Actions as space-time shapes. *IEEE T. Pattern Anal.* 29(12):2247–2253.
- Smyth, P. 1997. Clustering sequences with hidden Markov models. *Adv. Neural In.* 9:648–654.
- Banerjee, A., and J. Ghosh. 2001. Clickstream clustering using weighted longest common subsequences. *Workshop on Web Mining, SIAM Conference on Data Mining Proceedings.* 33–40.
- Aach, J., and G. M. Church. 2001. Aligning gene expression time series with time warping algorithms. *Bioinformatics* 17(6):495–508.
- Yi, B. K., and C. Faloutsos. 2000. Fast time sequence indexing for arbitrary L_p norms. *26th Conference (International) on Very Large Data Bases Proceedings.* 385–394.
- Goncharov, A. V., and V. V. Strijov. 2018. Analysis of dissimilarity set between time series. *Computational Mathematics Modeling* 29(3):359–366.
- Alon, J., V. Athitsos, and S. Sclaroff. 2005. Online and offline character recognition using alignment to prototypes. *8th Conference (International) on Document Analysis and Recognition.* 2:839–843.
- Goncharov, A. V. Alignment of Ordered Set Cartesian Product mDTW. Software implementation of the algorithm. Available at: <https://github.com/Intelligent-Systems-Phystech/PhDThesis/tree/master/Goncharov2019/MatrixDTW/code> (accessed December 27, 2019).

Received April 24, 2019

Contributors

Goncharov Alexey V. (b. 1995) — PhD student, Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141701, Russian Federation; alex.goncharov@phystech.edu

Strijov Vadim V. (b. 1967) — Doctor of Science in physics and mathematics, leading scientist, A. A. Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; professor, Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141701, Russian Federation; strijov@ccas.ru