Н. Зиновьев, Примеры финслеровых метрик без сопряженных точек: метрики вращения, *Алгебра и анализ*, 2008, том 20, выпуск 3, 47–73

Алгебра и анализ
Том 20 (2008), №3

ПРИМЕРЫ ФИНСЛЕРОВЫХ МЕТРИК БЕЗ СОПРЯЖЁННЫХ ТОЧЕК: МЕТРИКИ ВРАЩЕНИЯ

© Н. ЗИНОВЬЕВ

Введение

Согласно гипотезе Хопфа, доказанной в [BuI], все римановы метрики без сопряжённых точек на n-мерном торе плоские. Имеются примеры финслеровых метрик на торах без сопряжённых точек, не являющихся плоскими. Здесь под *плоской финслеровой метрикой* мы понимаем метрику, инвариантную относительно параллельных переносов, т.е. соответствующую некоторой норме Минковского на универсальном накрывающем пространстве тора.

Тем не менее есть гипотеза, что в финслеровом случае при отсутствии сопряжённых точек геодезический поток (на единичном касательном расслоении) сопряжён потоку плоской финслеровой метрики. Об этой гипотезе известно немногое, скорее всего, ввиду недостатка примеров.

По-видимому, первые примеры неплоских метрик без сопряжённых точек на двумерном торе даны в работе [Bu1] (см. также [Bu2, §33]). Там же дан простой критерий для системы кривых на двумерном торе, которые реализуются как геодезические некоторой внутренней метрики без сопряжённых точек. Однако не вполне ясно, при каких условиях получаемая метрика будет финслеровой. Специалистам известны (но, видимо, не опубликованы) примеры финслеровых метрик без сопряжённых точек на торе, получающиеся возмущением плоских метрик.

В настоящей работе строится большой класс примеров финслеровых метрик без сопряжённых точек, которые далеки от плоских. При этом (см. теорему $1'$) метрика задаётся по существу произвольным однопараметрическим семейством норм в $\mathbb{R}^n$ с фиксированными значениями на гиперплоскости $\{y_n = 0\}$. В отличие от риманова случая норма на гиперплоскости допускает существенно различные (не аффинно эквивалентные) продолжения на всё пространство.

Необходимые сведения из финслеровой геометрии можно найти, например, в [Sh]. Под *финслеровой метрикой* мы понимаем симметричную, гладкую и строго выпуклую финслерову структуру на гладком многообразии M, т.е. непрерывную функцию $\Phi\colon TM \to \mathbb{R}$, такую что

(1) для каждого $x \in M$ сужение $\Phi_x := \Phi|_{T_xM}$ является банаховой нормой, в частности $\Phi(v) = \Phi(-v)$ для всех $v \in TM$;
(2) Φ — гладкая на $TM \setminus 0$ (вне нулевого сечения);
(3) для каждого $x \in M$ матрица вторых производных функции Φ_x^2 положительно определена всюду на $T_xM \setminus \{0\}$.

Эти требования обеспечивают существование гладких геодезических и экспоненциального отображения.

Длина гладкой кривой γ относительно Φ определяется формулой

$$\mathrm{Length}(\gamma) = \int \Phi(\dot\gamma(t))\,dt.$$

Длины кривых определяют функцию расстояния d_Φ, а именно расстояние между двумя точками — это инфимум длин соединяющих их кусочно-гладких кривых.

Аналогично риманову случаю вводится понятие сопряжённых точек. Также верно, что отсутствие сопряжённых точек равносильно тому, что в универсальном накрывающем пространстве любая геодезическая является минимальной (т.е. кратчайшей кривой между любыми двумя своими точками).

Далее мы рассматриваем метрики на n-мерном торе $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, вместе с каждой из них рассматриваем ее поднятие в $\mathbb{R}^n$ — универсальное накрывающее пространство тора. Это поднятие инвариантно относительно действия группы $\mathbb{Z}^n$ параллельными переносами (которое переставляет листы накрытия). Мы будем обозначать метрику на торе и её поднятие в $\mathbb{R}^n$ одной и той же буквой Φ.

Представим n-мерный тор в виде $T^n = T^{n-1} \times S^1$, под *стандартным действием* группы T^{n-1} на T^n мы понимаем её действие сдвигами на первом сомножителе. В универсальном накрывающем этому соответствует действие группы $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ параллельными переносами.

Определение. Будем называть финслерову метрику на T^n (или на $\mathbb{R}^n$) *обобщенной метрикой вращения*, если она инвариантна относительно стандартного действия группы T^{n-1} (соотв. $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$).

Первая часть этой работы посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 1. *Обобщенная метрика вращения Φ на T^n не имеет сопряжённых точек тогда и только тогда, когда для всякой однопараметрической подгруппы $\{\psi^t\}$ группы T^{n-1} векторное поле X на T^n, заданное формулой $X(p) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}\psi^t p$, удовлетворяет условию $\Phi(X) \equiv \mathrm{const}$.*

Сформулируем координатный аналог этой теоремы для метрик в $\mathbb{R}^n$ — универсальном накрывающем пространстве тора. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$, $(y_1, \dots, y_n)$ — координаты в касательных пространствах $T_x\mathbb{R}^n$, соответствующие базису координатных векторных полей $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Таким образом, касательные пространства в различных точках $\mathbb{R}^n$ отождествлены между собой, и мы можем рассматривать финслерову метрику Φ как семейство $\{\Phi_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ норм на пространстве $\mathbb{R}^n = \{(y_1, \dots, y_n)\}$.

Так как Φ — обобщённая метрика вращения, норма Φ_x зависит лишь от координаты x_n точки x, причем эта зависимость 1-периодична. Таким образом, метрика Φ задаётся однопараметрическим семейством норм $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1]}$, где $\Phi_t = \Phi_{(0,\dots,0,t)}$.

Положим $H = \{(y_1, \dots, y_n) | y_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$. Векторы из H будем называть *горизонтальными*, а само H — горизонтальным подпространством. Векторные поля X из теоремы 1 соответствуют постоянным горизонтальным векторным полям на $\mathbb{R}^n$. Теперь теорема 1 принимает следующий вид.

Теорема $(1')$. *Обобщённая метрика вращения Φ не имеет сопряжённых точек тогда и только тогда, когда её горизонтальные сечения постоянны, т.е. во введённых выше обозначениях $\Phi_x|_H$ не зависит от x.*

Эта теорема доказывается в §2. В остальной части статьи мы доказываем, что обобщённые метрики вращения без сопряжённых точек удовлетворяют сформулированной выше гипотезе о сопряжённости геодезических потоков.

Для этого в §3 мы покажем, что геодезический поток обобщённой метрики вращения без сопряжённых точек обладает полным набором независимых C^∞-гладких интегралов. Ввиду богатой группы изометрий, наличие интегралов (многомерных аналогов интеграла Клеро) следует из теоремы Нётер. Однако эти интегралы имеют вырождения в горизонтальных направлениях — это основная техническая трудность, с которой приходится бороться.

В §4 мы вычислим стабильную норму метрики (определение см. в §4) и докажем теорему 2.

Теорема 2. *Если обобщённая метрика вращения не имеет сопряжённых точек, то ее стабильная норма C^∞-гладкая и квадратично строго выпуклая.*

Для финслеровой метрики Φ на T^n обозначим через $S_\Phi T^n$ её единичное касательное расслоение, а через $g^t_\Phi : S_\Phi T^n \to S_\Phi T^n$ — геодезический поток на нём. Как обычно, мы говорим, что геодезические потоки финслеровых метрик Φ и Ψ гладко сопряжены, если существует диффеоморфизм $h : S_\Phi T^n \to S_\Psi T^n$, такой что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено $g^t_\Phi = h^{-1} \circ g^t_\Psi \circ h$.

В п. 4.1 с помощью стандартной техники из гамильтоновой механики мы выведем из результатов §3 и 4 теорему 3.

Теорема 3. *Геодезический поток обобщённой метрики вращения на торе T^n без сопряжённых точек гладко сопряжён геодезическому потоку плоской финслеровой метрики на T^n, соответствующей стабильной норме.*

Замечание 1. В работе [CK] без доказательства упомянуто более общее утверждение: если расслоение Хебера (см. [H]) финслеровой метрики без сопряжённых точек на T^n является гладким и регулярным, то её геодезический поток гладко сопряжён геодезическому потоку плоского финслерова тора. Для метрик вращения регулярность расслоения Хебера несложно вывести из предложения 3.1, см. также замечание 10.

Автор искренне признателен С. В. Иванову и Д. Ю. Бураго за постановку проблемы, рассматриваемой в этой статье, а также за многочисленные полезные обсуждения.

§1. Предварительные сведения

Здесь мы введем некоторые обозначения и приведем стандартные факты, которые в дальнейшем используются без явного упоминания.

1.1. Преобразование Лежандра. Для конечномерного векторного пространства V через V^* обозначается двойственное пространство, т.е. пространство линейных функций $V \to \mathbb{R}$. Для нормы Ψ на V обозначим через Ψ^* двойственную норму на V^*, т.е.

$$\Psi^*(u) = \sup\{u(v) : v \in V, \Psi(v) = 1\} \quad \text{для } u \in V^*.$$

Хорошо известно, что для гладкой и квадратично строго выпуклой нормы Ψ норма Ψ^* тоже гладкая и квадратично строго выпуклая.

Второе двойственное пространство V^{**} канонически отождествляется с V, при этом $\Psi^{**} = \Psi$.

Для финслеровой метрики Φ на многообразии M определим функцию $\Phi^* : T^*M \to \mathbb{R}$ равенством $\Phi^*|_{T_xM} = (\Phi|_{T_xM})^*$, $x \in M$, и введем множества

$$S_\Phi M = \{v \in TM : \Phi(v) = 1\},$$
$$S^*_\Phi M = \{u \in T^*M : \Phi^*(u) = 1\},$$

называемые соответственно единичным касательным и единичным кокасательным расслоением метрики Φ. Легко проверить, что Φ^* — гладкая функция на $T^*M \setminus 0$, а $S_\Phi M$ и $S^*_\Phi M$ — гладкие подмногообразия в TM и T^*M.

Определение 1.1. Пусть Ψ — гладкая квадратично строго выпуклая норма на конечномерном векторном пространстве V. Отображение

$$\mathcal{L}_\Psi : V \to V^*,$$

определенное равенством

$$\mathcal{L}_\Psi(v) = d_v\left(\frac{1}{2}\Psi^2\right), \quad v \in V,$$

называется *преобразованием Лежандра нормы* Ψ. (Здесь d_v обозначает дифференциал функции в точке v. Отметим, что функция Ψ^2 в отличие от Ψ C^1-гладкая всюду на V, в том числе и в нуле.)

Отображение $\mathcal{L}_\Psi$, очевидно, гладкое на $V \setminus \{0\}$ и положительно однородное. Оно сопоставляет точке v единичной сферы нормы Ψ опорную линейную функцию в этой точке, т.е. $\Psi^*(\mathcal{L}_\Psi(v)) = 1$ и $\mathcal{L}_\Psi(v)(v) = 1$. Действительно, для каждого вектора w, такого что $\Psi(w) = 1$, функция $g(t) = \Psi(v + wt)$ 1-липшицева по t, откуда $|\mathcal{L}_\Psi(v)(w)| = \Psi(v) \cdot |g'(0)| \le 1$, причем в случае $w = v$ достигается равенство. Аналогично, преобразование Лежандра $\mathcal{L}_{\Psi^*}$ двойственной нормы переводит полученную опорную функцию в точку v. Таким образом, отображения $\mathcal{L}_\Psi$ и $\mathcal{L}_{\Psi^*}$ взаимнообратны, причем они переводят единичные сферы норм Ψ и Ψ^* друг в друга.

Определение 1.2. Пусть M — гладкое многообразие с финслеровой метрикой Φ. Отображение $\mathcal{L}_\Phi : TM \to T^*M$, которое на каждом слое T_xM совпадает с преобразованием Лежандра соответствующей нормы $\Phi|_{T_xM}$, называется *преобразованием Лежандра метрики* Φ.

Ясно, что отображение $\mathcal{L}_\Phi$ гладкое и является диффеоморфизмом между $TM \setminus 0$ и $T^*M \setminus 0$, причем $\mathcal{L}_\Phi^{-1} = \mathcal{L}_{\Phi^*}$, где $\mathcal{L}_{\Phi^*}$ — аналогичное послойное преобразование Лежандра на кокасательном расслоении. Так как $\mathcal{L}_\Phi$ переводит единичные касательные векторы в единичные ковекторы, его можно рассматривать как диффеоморфизм между $S_\Phi M$ и $S^*_\Phi M$.

Если метрика Φ зафиксирована, мы опускаем индекс Φ в обозначениях $\mathcal{L}_\Phi$, $S_\Phi M$ и $S^*_\Phi M$ (в частности, $S\mathbb{R}^n$ и ST^n — единичные касательные расслоения рассматриваемых обобщённых метрик вращения). Через S_xM и S^*_xM, где $x \in M$, обозначаются слои расслоений SM и S^*M над точкой x.

1.2. Формы и калибраторы. Нам понадобятся некоторые обозначения, связанные с дифференциальными 1-формами. Мы рассматриваем 1-форму ω на многообразии M как ковекторное поле на M, $\omega : M \to T^*M$, или как послойно линейное отображение $\omega : TM \to \mathbb{R}$. Таким образом, при $x \in M$ запись $\omega(x)$ обозначает ковектор из T_x^*M, а при $v \in T_xM \subset TM$ запись $\omega(v)$ обозначает число $\omega(x)(v) \in \mathbb{R}$.

Преобразование Лежандра $\mathcal{L}$ финслеровой метрики устанавливает взаимно-однозначное соответствие между гладкими векторными полями и дифференциальными 1-формами. Для векторного поля X на M мы обозначаем через $\mathcal{L}(X)$ дифференциальную форму ω, заданную равенством $\omega(x) = \mathcal{L}(X(x))$, $x \in M$. Аналогично векторное поле X может записываться как $\mathcal{L}^{-1}(\omega)$.

Определение 1.3. Пусть M — гладкое многообразие с финслеровой метрикой Φ, γ — натурально параметризованная геодезическая этой метрики. Дифференциальная 1-форма ω на M называется *калибрующей формой* (или *калибратором*) для γ, если она замкнута, $\Phi^*(\omega(x)) \le 1$ для всех $x \in M$ и $\omega(\dot\gamma(t)) = 1$ для всех t.

Условие $\Phi^*(\omega(x)) \le 1$ эквивалентно тому, что $|\omega(v)| \le \Phi(v)$ для всех $v \in T_xM$. Если ω — калибратор для γ и $\omega(v) = 1$ для некоторого $v \in S_xM$, то $\omega(x) = \mathcal{L}(v)$, так как $\mathcal{L}(v)$ — единственная опорная линейная функция нормы $\Phi_x = \Phi|_{T_xM}$ в точке v. Подставляя $v = \dot\gamma(t)$, получаем, что $\omega(\gamma(t)) = \mathcal{L}(\dot\gamma(t))$ при всех t.

Если у геодезической финслеровой метрики в $\mathbb{R}^n$ (более общо, в любом односвязном многообразии) есть калибратор, то эта геодезическая минимальна. Действительно, пусть ω калибрует геодезический отрезок $\gamma : [a,b] \to M$, тогда для любой гладкой кривой γ_1, соединяющей те же точки, имеем $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega$ в силу замкнутости формы. С другой стороны, $\int_{\gamma_1} \omega \le \mathrm{Length}(\gamma_1)$ с равенством при $\gamma_1 = \gamma$, поскольку $\omega(\dot\gamma_1) \le \Phi(\dot\gamma_1)$ и $\omega(\dot\gamma) \equiv \Phi(\dot\gamma)$. Значит, $\mathrm{Length}(\gamma) \le \mathrm{Length}(\gamma_1)$.

§2. Доказательство теоремы 1

Мы докажем теорему $1'$ — координатную формулировку теоремы 1. Необходимость содержится в лемме 2.2, остальная часть параграфа посвящена доказательству достаточности.

Мы отождествляем касательное пространство $T\mathbb{R}^n$ с $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и фиксируем обозначения $x_1, \dots, x_n$ для координат точек в $\mathbb{R}^n$, $y_1, \dots, y_n$ — для координат касательных векторов. Пусть Φ — обобщённая метрика вращения в $\mathbb{R}^n$. Запись Φ_x обозначает норму на $\mathbb{R}^n = \{(y_1, \dots, y_n)\}$, соответствующую сужению Φ на $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.

Напомним, что через H мы обозначаем подпространство горизонтальных векторов, $H = \{(y_1, \dots, y_n) \mid y_n = 0\}$. Касательный вектор $(x, y) \in T_x\mathbb{R}^n$ будем называть горизонтальным, если $y \in H$. Определим отображение $P_{H^*} : T^*\mathbb{R}^n \to H^*$ формулой

$$P_{H^*}(u) = u|_H, \quad u \in T^*_x\mathbb{R}^n \subset T^*\mathbb{R}^n,$$

где H отождествлено с соответствующим подпространством горизонтальных векторов в $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. В координатах это отображение имеет вид

$$P_{H^*}(u) = (w_1, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \cong H^*,$$

где $(w_1, \dots, w_{n-1}, w_n)$ — координаты ковектора u в стандартном базисе пространства $T^*_x\mathbb{R}^n$.

Для кривой $\gamma = \gamma(t)$ в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через $\gamma(t)_n$ ее n-ю координату. Вектор скорости $\dot\gamma(t)$ рассматривается в зависимости от контекста как вектор в $\mathbb{R}^n$ или в $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n \subset T\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим лагранжиан $\phi = \frac{1}{2}\Phi^2 : T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Отрезки геодезических, параметризованные пропорционально длине дуги, являются экстремалями функционала энергии

$$E(\gamma) = \int_a^b \phi(\gamma(t), \dot\gamma(t))dt, \quad \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, они удовлетворяют системе уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial y_i}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\gamma(t), \dot\gamma(t)), \quad i = 1 \dots n,$$

которая в нашем случае в силу равенства $\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = 0$ при $i \neq n$ принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial y_i}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \equiv \mathrm{const} = c_i, & i = 1 \dots n-1, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial y_n}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = \frac{\partial\phi}{\partial x_n}(\gamma(t), \dot\gamma(t)). \end{cases}$$

Будем называть *горизонтальной прямой* в направлении $h \in H$ кривую вида $\gamma(t) = x^0 + th$, где $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 2.1. *Горизонтальная прямая $\gamma(t) = x^0 + th$ является геодезической тогда и только тогда, когда $\frac{\partial\phi}{\partial x_n}(x^0, h) = 0$.*

Доказательство. Для такой кривой имеем $\gamma(t)_n = \mathrm{const}$ и $\dot\gamma(t) = h$. Поэтому первые $n-1$ уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_i}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \equiv \mathrm{const}, \quad i = 1 \dots n-1,$$

выполняются автоматически, а последнее в силу инвариантности метрики относительно горизонтальных сдвигов принимает вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x^0,h) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \phi}{\partial y_n}(x^0,h) = 0,$$

что и требовалось. □

Лемма 2.2. *Если метрика не имеет сопряжённых точек, то $\Phi_x|_H$ не зависит от x.*

Доказательство. Зафиксируем вектор $h \in H$. Рассмотрим $\Phi(x,h)$ как функцию от координаты x_n точки $x \in \mathbb{R}^n$. Так как эта функция периодична, у нее достигается максимум $a_{\max}$ и минимум $a_{\min}$. Достаточно доказать, что они равны. Пусть x^0 и x^1 — соответствующие точки экстремума, $\Phi(x^0,h) = a_{\min}$, $\Phi(x^1,h) = a_{\max}$. Тогда $\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x^0,h) = \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x^1,h) = 0$, откуда по лемме 2.1 горизонтальные прямые $t \mapsto x^0 + th$ и $t \mapsto x^1 + th$ являются геодезическими, а значит, кратчайшими, так как по предположению сопряжённых точек нет. Длины отрезков между соответствующими точками x^1 и $x^1 + th$, x^0 и $x^0 + th$ равны $a_{\max}t$ и $a_{\min}t$, откуда по неравенству треугольника

$$|a_{\max}t - a_{\min}t| \le d_\Phi(x^0,x^1) + d_\Phi(x^0+th, x^1+th),$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Правая часть этого неравенства не зависит от t (и равна $2d_\Phi(x^0,x^1)$), так как параллельный перенос на вектор th является изометрией. Следовательно, $a_{\max} = a_{\min}$. □

Соглашение. Далее в этом параграфе всюду предполагается, что сужение $\Phi_x|_H$ не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$. Мы обозначаем это сужение через Φ_H.

Лемма 2.3. *Все горизонтальные прямые являются геодезическими. Для любой геодезической γ, не являющейся горизонтальной прямой, $\operatorname{sign}\dot\gamma(t)_n = \mathrm{const} \ne 0$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 2.1. Второе следует из первого: если $\dot\gamma(t_0)_n = 0$ для некоторого t_0, то из единственности геодезической с фиксированными начальными данными следует, что γ совпадает с горизонтальной прямой в направлении $\dot\gamma(t_0)$, проходящей через точку $\gamma(t_0)$. □

Замечание 2. Из леммы 2.3 следует, что кратчайшая между двумя точками из одного горизонтального слоя не может его покинуть. Следовательно, горизонтальные прямые являются кратчайшими (в частности, не имеют сопряжённых точек).

Определение 2.4. Назовём *интегралом Клеро* метрики Φ отображение $K : T\mathbb{R}^n \setminus 0 \to H^* \cong \mathbb{R}^{n-1}$, определяемое равенством

$$K(v) = P_{H^*}(\mathcal{L}(v)), \quad v \in T\mathbb{R}^n.$$

Отображение K является многомерным аналогом интеграла Клеро двумерных поверхностей вращения. Заметим, что K инвариантно относительно параллельных переносов на векторы из $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$.

Покажем, что для любой геодезической γ значение $K(\dot\gamma)$ постоянно. Действительно, в координатах $K(\dot\gamma)$ имеет вид

$$K(\dot\gamma(t)) = (\mathcal{L}(\dot\gamma(t))(e_1), \dots, \mathcal{L}(\dot\gamma(t))(e_{n-1})),$$

где $e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ — стандартные базисные векторы в $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n$, и

$$\mathcal{L}(\dot\gamma(t))(e_i) = \frac{\partial\phi}{\partial y_i}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \equiv c_i$$

при $i < n$ в силу уравнений Эйлера–Лагранжа.

Замечание 3. Нетрудно убедиться, что K — это стандартный нётеровский интеграл, соответствующий действию группы $\mathbb{R}^{n-1}$.

Лемма 2.5. *Если γ — негоризонтальная натурально параметризованная геодезическая, то $\gamma(t)_n$ — монотонная, не ограниченная в обе стороны функция.*

Доказательство. Монотонность следует из леммы 2.3. Для доказательства неограниченности покажем, что для любого интервала $[a, b]$ производная $\dot\gamma(t)_n$ отделена от нуля при $\gamma(t)_n \in [a, b]$.

Заметим, что вектор $v \in S\mathbb{R}^n$ горизонтален тогда и только тогда, когда $(\Phi_H)^*(K(v)) = 1$. Следовательно, единичные касательные векторы с одинаковым значением K горизонтальны или нет одновременно. Пусть $K(\dot\gamma) \equiv w$, тогда множество

$$\{v = (x, y) \in S\mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_{n-1} = 0, x_n \in [a, b], K(v) = w\}$$

компактно и не содержит горизонтальных векторов. Следовательно, координаты y_n элементов этого множества отделены от 0, а значит, и $\dot\gamma(t)_n$ отделено от 0 при $\gamma(t)_n \in [a, b]$. □

Лемма 2.6. *У любой натурально параметризованной геодезической γ есть калибрующая 1-форма.*

Доказательство. Сначала построим инвариантное относительно горизонтальных сдвигов гладкое векторное поле X на $\mathbb{R}^n$ такое, что $\Phi(X) \equiv 1$, $K(X) = \text{const}$ и $X(\gamma(t)) = \dot\gamma(t)$ при всех t. Если γ — горизонтальная прямая в направлении $h \in H$, возьмём в качестве X постоянное векторное поле, равное h в каждой точке. Требуемые свойства следуют из постоянства сужения $\Phi_x|_H = \Phi_H$. Действительно, для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $\Phi(x, h) = \Phi_H(h) = 1$, а $K(x, h) = P_{H^*}(\mathcal{L}(x, h))$ — (единственная) опорная линейная функция нормы Φ_H в точке h.

Если γ не горизонтальна, то из леммы 2.5 следует, что всё пространство расслаивается на геодезические, получающиеся из γ горизонтальными сдвигами. Возьмём в качестве X поле скоростей кривых этого расслоения. Гладкость поля следует из того, что $\dot\gamma(t)_n$ не обращается в нуль. Из постоянства интеграла Клеро $K(\dot\gamma)$ следует, что $K(X) \equiv K(\dot\gamma) = \mathrm{const}$.

Теперь положим $\omega = \mathcal{L}(X)$. Докажем, что ω — искомый калибратор. Из свойств поля X следует, что полученная 1-форма ω инвариантна относительно горизонтальных сдвигов, $\Phi^*(\omega) \equiv 1$, $\omega(\dot\gamma) \equiv 1$, и $P_{H^*}(\omega(x)) = K(X(x))$ не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$. Осталось проверить замкнутость формы. Она следует из инвариантности относительно горизонтальных сдвигов и постоянства $P_{H^*}(\omega(x))$. Действительно, из этих свойств следует, что в координатах форма имеет вид

$$\omega(x) = c_1 dx_1 + \dots + c_{n-1} dx_{n-1} + f(x) dx_n,$$

где $c_1, \dots, c_{n-1}$ — константы, $f(x)$ зависит только от координаты x_n. Тогда

$$d\omega = \sum_{i \neq n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_n = 0.$$

Таким образом, ω — калибрующая форма для γ. □

Доказательство теоремы. Необходимость условия $\Phi_x|_H \equiv \mathrm{const}$ содержится в лемме 2.2. Обратно, если $\Phi_x|_H \equiv \mathrm{const}$, то по лемме 2.6 у каждой геодезической есть калибратор, следовательно, любая геодезическая является минимальной, а это эквивалентно отсутствию сопряжённых точек. □

Замечание 4. Периодичность метрики по x_n использовалась лишь при выводе необходимости условия $\Phi_x|_H \equiv \mathrm{const}$ (см. лемму 2.2).

§3. Построение полной системы интегралов геодезического потока

Интеграл Клеро K, построенный в §2, является гладким интегралом геодезического потока обобщённой метрики вращения, однако этот интеграл вырождается на горизонтальных направлениях.

Мы хотим построить гладкий невырожденный интеграл $\mathbb{K}$ для всех направлений, а именно доказать следующее предложение 3.1, на котором основана теорема 3.

Предложение 3.1. *Если обобщённая метрика вращения на n-мерном торе T^n не имеет сопряжённых точек, то существует гладкое отображение $\mathbb{K} : ST^n \to S^{n-1}$, которое является интегралом геодезического потока и обладает следующими свойствами:*

(1) *для всех $p \in T^n$ сужение $\mathbb{K}|_{S_pT^n} : S_pT^n \to S^{n-1}$ является диффеоморфизмом;*

(2) *для всех $w \in S^{n-1}$ ковекторное поле $\mathcal{L}(\mathbb{K}^{-1}(w))$ на T^n является графиком замкнутой 1-формы на T^n.*

Здесь ST^n обозначает единичное касательное расслоение, $\mathcal{L}$ — преобразование Лежандра данной метрики.

Мы выведем предложение 3.1 из предложения 3.7 (см. конец п. 3.2), которое используется и в §4. Мы строим искомое отображение $\mathbb{K}$ не для метрики на торе, а для ее поднятия в $\mathbb{R}^n$.

3.1. Обозначения. Пусть Φ — обобщённая метрика вращения в $\mathbb{R}^n$ без сопряжённых точек. Мы продолжаем использовать обозначения, введённые в начале §2, а также обозначение Φ_H для сужения $\Phi_x|_H$ (которое не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$ по теореме $1'$) и K для интеграла Клеро ($K : S\mathbb{R}^n \to H^*$, $K(v) = P_{H^*}\mathcal{L}(v)$, см. определение 2.4). Напомним, что $S\mathbb{R}^n$ и $S^*\mathbb{R}^n$ обозначают расслоения единичных относительно Φ касательных и кокасательных векторов соответственно, $\mathcal{L}$ — преобразование Лежандра метрики Φ.

Мы фиксируем обозначения $(w_1, \dots, w_n)$ для стандартных координат в слоях кокасательного расслоения $T^*\mathbb{R}^n$ и отождествляем $T^*\mathbb{R}^n$ с $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \{(x, w)\}$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$. Для удобства введём сокращённое обозначение $\bar{w} = (w_1, \dots, w_{n-1})$. Напомним, что отображение $P_{H^*} : T^*\mathbb{R}^n \to H^* \cong \mathbb{R}^{n-1}$ в координатах имеет вид

$$P_{H^*}(x, \bar{w}, w_n) = \bar{w}.$$

Для вектора $v \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ обозначим через T^v параллельный перенос на этот вектор, $T^v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Напомним, что Φ и K инвариантны относительно T^v.

3.2. Доказательство предложения 3.1. Следующая лемма показывает, что вектор $v \in S_p\mathbb{R}^n$ однозначно определяется значением $K(v)$ интеграла Клеро и нестрогим знаком своей y_n-координаты.

Лемма 3.2. *Пусть $p \in \mathbb{R}^n$ и $v_1, v_2 \in S_p\mathbb{R}^n$ таковы, что $K(v_1) = K(v_2)$ и y_n-координаты векторов v_1 и v_2 обе неположительны или обе неотрицательны. Тогда $v_1 = v_2$.*

Доказательство. Предположим, что $v_1 \neq v_2$. Для $i = 1, 2$ положим $F_i = \mathcal{L}(v_i) \in T_p^*\mathbb{R}^n$. Отождествляя $T_p\mathbb{R}^n$ с $\mathbb{R}^n$, можно рассматривать F_i как линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Напомним, что $K(v_i) = P_{H^*}\mathcal{L}(v_i) = F_i|_H$, поэтому $F_1|_H = F_2|_H$. Рассмотрим линейную функцию $F = F_1 - F_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Она обращается в нуль на гиперплоскости H, следовательно, значения $F(v_1)$ и $F(v_2)$ лежат (нестрого) по одну сторону от 0, так как векторы v_1 и v_2 лежат по одну сторону от H. Но $F_1(v_1) = F_2(v_2) = 1$, $F_1(v_2) < 1$ и $F_2(v_1) < 1$, так как F_i — опорная линейная функция нормы Φ_p в точке v_i. Отсюда $F(v_1) > 0$ и $F(v_2) < 0$, противоречие. $\square$

Следствие 3.3. *Пусть $p \in \mathbb{R}^n$ и $u_1, u_2 \in S^*_p\mathbb{R}^n$ таковы, что $P_{H^*}(u_1) = P_{H^*}(u_2)$ и y_n-координаты векторов $\mathcal{L}^{-1}(u_1)$ и $\mathcal{L}^{-1}(u_2)$ обе неположительны или обе неотрицательны. Тогда $u_1 = u_2$.*

Определение 3.4. *Стандартным калибратором* будем называть любую замкнутую 1-форму ω на $\mathbb{R}^n$ такую, что

(1) $\omega(x) \in S^*_x\mathbb{R}^n$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$;
(2) $P_{H^*}(\omega(x))$ не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$;
(3) знак y_n-координаты вектора $\mathcal{L}^{-1}(\omega(x))$ не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$.

Нам понадобится следующее уточнение леммы 2.6.

Лемма 3.5. *Для любых $p \in \mathbb{R}^n$ и $u \in S^*_p\mathbb{R}^n$ существует единственный стандартный калибратор ω с $\omega(p) = u$. При этом*

(1) ω инвариантен относительно параллельных переносов на векторы из $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$;
(2) ω калибрует геодезическую γ, заданную условием $\dot\gamma(0) = \mathcal{L}^{-1}(u)$.

Доказательство. Единственность очевидна из определения 3.4 и следствия 3.3. Докажем существование и свойства.

Пусть γ — геодезическая с $\dot\gamma(0) = v$. Построим калибратор ω для γ как в доказательстве леммы 2.6, а именно $\omega = \mathcal{L}(X)$, где X — векторное поле на $\mathbb{R}^n$, $\Phi(X) \equiv 1$, $X(p) = \dot\gamma(0)$ и $K(X) = \mathrm{const}$. Из этих равенств следует, что $\Phi^*(\omega) \equiv 1$, $\omega(p) = u$ и $P_{H^*}(\omega) = K(X) = \mathrm{const}$. По построению поля X (см. доказательство леммы 2.6, а также лемму 2.3) знак его y_n-координаты постоянен, значит, выполняется и последнее требование из определения 3.4.

Инвариантность относительно $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ следует из леммы 3.2: если $x = T^v(x')$, где $x, x' \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, то векторы $X(x)$ и $dT^v(X(x'))$ лежат в $S_x\mathbb{R}^n$ и имеют одинаковые значения интеграла Клеро и знаки последней координаты, следовательно, они равны. Значит, поле X, а с ним и 1-форма ω, инвариантна относительно T^v. $\square$

Определение 3.6. Из леммы 3.5 следует, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и любого ненулевого ковектора $u \in T^*_x\mathbb{R}^n$ существует единственная 1-форма ω на

$\mathbb{R}^n$, пропорциональная стандартному калибратору и такая, что $\omega(x) = u$. Мы будем обозначать эту форму через ω^u.

Для $x, p \in \mathbb{R}^n$ определим отображение

$$r_{p,x} : T_x^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to T_p^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

формулой $r_{p,x}(u) = \omega^u(p)$. Определим отображение

$$r : \mathbb{R}^n \times (T^*\mathbb{R}^n \setminus 0) \to T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$$

равенством $r(p, u) = r_{p,x}(u)$ для $u \in T_x\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subset T\mathbb{R}^n \setminus 0$.

Из первого требования определения 3.4 следует, что образ $r_{p,x}(u)$ единичного ковектора $u \in S_x^*\mathbb{R}^n$ — тоже единичный ковектор. Таким образом, $r_{p,x}$ можно рассматривать как отображение из $S_x^*\mathbb{R}^n$ в $S_p^*\mathbb{R}^n$.

Предложение 3.7. *Отображение r гладкое. Для любых $p, x \in \mathbb{R}^n$ отображение $r_{p,x}$ — диффеоморфизм между $T_x^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $T_p^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, сужение $r_{p,x}|_{S_x^*\mathbb{R}^n}$ — диффеоморфизм между $S_x^*\mathbb{R}^n$ и $S_p^*\mathbb{R}^n$.*

Замечание 5. Фактически мы доказываем, что отображение, сопоставляющее касательному вектору в некоторой точке касательный вектор в другой точке с тем же интегралом Клеро и тем же знаком y_n-координаты, гладко зависит от своих аргументов.

Прежде чем доказывать предложение 3.7, выведем из него предложение 3.1. Зафиксируем $p \in \mathbb{R}^n$ и определим отображение $\mathbb{K} : S\mathbb{R}^n \to S_p^*\mathbb{R}^n$ равенством

$$\mathbb{K}(v) = r_{p,x}(\mathcal{L}(v)), \quad v \in S_x\mathbb{R}^n.$$

По предложению 3.7 отображение $\mathbb{K}$ гладкое, и для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ сужение $\mathbb{K}|_{S_x\mathbb{R}^n}$ является диффеоморфизмом на $S_p^*\mathbb{R}^n \cong S^{n-1}$. По построению для каждого $u \in S_p^*\mathbb{R}^n$ множество $\mathcal{L}(\mathbb{K}^{-1}(u))$ является графиком замкнутой формы ω^u.

Покажем, что $\mathbb{K}$ — интеграл геодезического потока. Пусть γ — натурально параметризованная геодезическая, обозначим $u(t) = \mathcal{L}(\dot\gamma(t))$, $\omega = \omega^{u(0)}$. По лемме 3.5(2), ω является калибратором для γ, следовательно, $\omega(\gamma(t)) = \mathcal{L}(\dot\gamma(t)) = u(t)$, откуда $\omega^{u(t)} = \omega$ для всех t. Значит, $\mathbb{K}(\dot\gamma(t)) = r_{p,\gamma(t)}(u(t)) = \omega(p) = \mathrm{const}$, т.е. $\mathbb{K}$ — интеграл геодезического потока.

Из леммы 3.5(1) следует, что $\mathbb{K}$ инвариантно относительно целочисленных параллельных переносов. Следовательно, оно является поднятием некоторого отображения $S^*T^n \to S_p^*\mathbb{R}^n \cong S^{n-1}$, удовлетворяющего требованиям предложения 3.1.

Таким образом, предложение 3.1 следует из предложения 3.7.

3.3. Доказательство предложения 3.7. Очевидно, что $r_{p,p}$ — тождественное отображение и $r_{p,q} = r_{p,x} \circ r_{x,q}$ для любых $p, q, x \in \mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что $r_{p,x}$ — биекция между $T_x^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ и $T_p^*\mathbb{R}^n \setminus 0$, причем $r_{p,x}^{-1} = r_{x,p}$.

Теперь вторая часть предложения 3.7 следует из первой. Действительно, из гладкости отображения r следует гладкость его сужений $r_{p,x}$ и $r_{x,p} = r_{p,x}^{-1}$, откуда $r_{p,x}$ — диффеоморфизм. Аналогично $r_{p,x}|_{T_x^*\mathbb{R}^n}$ — диффеоморфизм между $S_x^*\mathbb{R}^n$ и $S_p^*\mathbb{R}^n$. Таким образом, достаточно доказать гладкость отображения r.

Разобьем $T^*\mathbb{R}^n$ на три множества M_0 M_+ и M_-, состоящие из всех ковекторов $u \in T^*\mathbb{R}^n$ таких, что y_n-координата вектора $\mathcal{L}^{-1}(u)$ соответственно равна 0, положительна или отрицательна.

Ясно, что эти три множества являются конусами: для любого $u \in T^*\mathbb{R}^n$ и любого $\alpha > 0$ ковектор αu принадлежит тому же множеству, что и u. Множества M_+ и M_- открыты и связны, поскольку таковы соответствующие множества $\mathcal{L}^{-1}(M_+)$ и $\mathcal{L}^{-1}(M_-)$.

Следующая лемма перечисляет все используемые в этом доказательстве свойства отображения r.

Лемма 3.8. *Отображение $r : \mathbb{R}^n \times (T^*\mathbb{R}^n \setminus 0) \to T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ послойно однородно по второму аргументу. Для любых $p \in \mathbb{R}^n$, $u \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ верно следующее*:

(1) $r(p, u) \in T_p^*\mathbb{R}^n$;
(2) $\Phi^*(r(p, u)) = \Phi^*(u)$;
(3) $P_{H^*}(r(p, u)) = P_{H^*}(u)$;
(4) *если $u \in M_0$, то $r(p, u) \in M_0$, то же верно для M_+ и M_-.*

Доказательство. Однородность и свойство 1 следует из определения r. С учетом однородности, остальные свойства следуют из соответствующих требований определения 3.4. □

Из утверждений (1) и (3) леммы 3.8 вытекает

Следствие 3.9. *Отображение r в координатах имеет вид*

$$r(p, x, \bar{w}, w_n) = (p, \bar{w}, r_n(p, x, \bar{w}, w_n)), \quad p, x \in \mathbb{R}^n, \ \bar{w} \in \mathbb{R}^{n-1}, \ w_n \in \mathbb{R},$$

где r_n — некоторая функция, определённая при $(\bar{w}, w_n) \neq 0$.

Лемма 3.10. *Отображение r непрерывно.*

Доказательство. В силу однородности достаточно доказать непрерывность сужения r на $\mathbb{R}^n \times S^*\mathbb{R}^n$.

Пусть ковекторы $u_i \in S^*\mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots$, сходятся к $u \in S^*\mathbb{R}^n$, а точки $p_i \in \mathbb{R}^n$ сходятся к точке p. Покажем, что ковекторы $r(p_i, u_i)$ сходятся к

$r(p,u)$. Для этого достаточно проверить, что для любой предельной точки α последовательности $\{r(p_i,u_i)\}$ имеет место равенство $\alpha = r(p,u)$.

Из леммы 3.8(1,2) следует, что $r(p,u) \in S^*_p\mathbb{R}^n$ и $r(p_i,u_i) \in S^*_{p_i}\mathbb{R}^n$ при всех i, откуда $\alpha \in S^*_p\mathbb{R}^n$. По лемме 3.8(3), $P_{H^*}(r(p,u)) = P_{H^*}(u)$ и $P_{H^*}(r(p_i,u_i)) = P_{H^*}(u_i)$, откуда предельным переходом получаем, что $P_{H^*}(\alpha) = P_{H^*}(r(p,u))$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что все ковекторы u_i лежат в одном из множеств M_0, M_+ и M_-, не умаляя общности, предположим, что они лежат в $M_0 \cup M_+$. Тогда $u \in M_0 \cup M_+$, так как множество $M_0 \cup M_+$ замкнуто. По лемме 3.8(4), $r(p,u)$ и $r(p_i,u_i) \in M_0 \cup M_+$ при всех i, откуда $\alpha \in M_0 \cup M_+$. Таким образом, ковекторы α и $r(p,u)$ удовлетворяют предположениям следствия 3.3, значит, они равны. $\square$

Введем обозначения $\Psi = \Phi^*$, $\Psi_x = \Psi|_{T^*_x\mathbb{R}^n}$. Мы рассматриваем Ψ как функцию координат $(x, \bar{w}, w_n)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{w} =\in \mathbb{R}^{n-1}$, $w_n \in \mathbb{R}$.

Обозначим через ψ норму на H^*, двойственную к Φ_H.

Лемма 3.11. *Множества M_0, M_+, M_- обладают следующими свойствами:*

(1) *$\psi(P_{H^*}(u)) \le \Psi(u)$ для всех $u \in T^*\mathbb{R}^n$, равенство достигается тогда и только тогда, когда $u \in M_0$;*

(2) *в координатах можно описать M_0 как*
$$M_0 = \Big\{(x,w) \in T^*\mathbb{R}^n : \frac{\partial \Psi^2}{\partial w_n}(x,w) = 0\Big\};$$

(3) *M_0 представимо в виде графика*
$$M_0 = \{(x,\bar{w},w_n) \in T^*\mathbb{R}^n : w_n = f(x,\bar{w})\}$$
функции $f = f(x,\bar{w})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$, гладкой вне множества $\{\bar{w} = 0\}$;

(4) *M_+ и M_- — надграфик и подграфик той же функции f:*
$$M_\pm = \{(x,\bar{w},w_n) \in T^*\mathbb{R}^n : \operatorname{sign}(w_n - f(x,\bar{w})) = \pm 1\}.$$

Доказательство. (1) Пусть $u \in T^*_x\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. По определению $\Psi(u)$ — максимальное значение u на векторах из $S_x\mathbb{R}^n$, $\psi(P_{H^*}(u))$ — максимальное значение u на горизонтальных векторах из $S_x\mathbb{R}^n$. Поэтому $\psi(P_{H^*}(u)) \le \Psi(u)$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда максимум u на $S_x\mathbb{R}^n$ достигается на горизонтальном векторе h, а это означает, что u пропорционален ковектору $\mathcal{L}(h) \in M_0$.

(2) Напомним, что $\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}_\Psi$ — послойное преобразование Лежандра семейства норм Ψ_x, $x \in \mathbb{R}^n$. По определению преобразования Лежандра

y_n-координата вектора $\mathcal{L}_\Psi(u)$, где $u = (x, w) \in T^*\mathbb{R}^n$, равна $\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi^2}{\partial w_n}(u)$. Следовательно, $u \in M_0$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial \Psi^2}{\partial w_n}(u) = 0$, что и требовалось.

Аналогично $u \in M_+$ при $\frac{\partial \Psi^2}{\partial w_n}(u) > 0$, и $u \in M_-$ при $\frac{\partial \Psi^2}{\partial w_n}(u) < 0$.

(3) Зафиксируем $x \in \mathbb{R}^n$ и $\bar{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ и рассмотрим функцию $g(t) = \Psi^2(x, \bar{w}, t)$. По свойству (1), ковектор $u = (x, \bar{w}, w_n)$ принадлежит M_0 тогда и только тогда, когда w_n — точка минимума функции g. Поскольку Ψ_x — строго выпуклая норма, функция g строго выпукла и $g(t) \to +\infty$ при $t \to \pm\infty$, поэтому точка минимума существует и единственна. Следовательно, M_0 — график $w_n = f(x, \bar{w})$ некоторой функции f.

Гладкость функции f (при $\bar{w} \neq 0$) следует из теоремы о неявной функции. Действительно, по свойству (2), M_0 задается уравнением $\frac{\partial \Psi^2}{\partial w_n} = 0$. Это уравнение удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции (относительно переменной w_n), так как $\frac{\partial^2 \Psi^2}{\partial w_n^2} > 0$ в силу квадратичной строгой выпуклости норм Ψ_x.

(4) Функция g (см. доказательство предыдущего свойства) строго выпукла, поэтому ее производная после точки минимума положительна. Следовательно, $\frac{\partial \Psi^2}{\partial w_n}(x, \bar{w}, w_n) > 0$ при $w_n > f(x, \bar{w})$. Неравенство $\frac{\partial \Psi^2}{\partial w_n}(x, \bar{w}, w_n) > 0$ эквивалентно тому, что $(x, \bar{w}, w_n) \in M_+$, см. конец доказательства свойства (2). Значит, $(x, \bar{w}, w_n) \in M_+$ при $w_n > f(x, \bar{w})$. Аналогично $(x, \bar{w}, w_n) \in M_-$ при $w_n < f(x, \bar{w})$. □

Лемма 3.12. *Функция $\Psi^2 = \Psi^2(x, \bar{w}, w_n)$ вне множества $\{\bar{w} = 0\}$ представима в виде*

$$\Psi^2(x, \bar{w}, w_n) = \psi^2(\bar{w}) + (w_n - f(x, \bar{w}))^2 g(x, \bar{w}, w_n)^2,$$

где f — функция из леммы (3.11), а функция $g = g(x, \bar{w}, w_n)$ определена при $\bar{w} \neq 0$, гладкая и строго положительная.

Мы воспользуемся следующим стандартным фактом.

Лемма 3.13. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^k$ и функция $h = h(x, y) \in C^\infty(U \times \mathbb{R})$ такова, что $h(x, 0) \equiv 0$. Тогда существует функция $h_1 \in C^\infty(U \times \mathbb{R})$ такая, что*

$$h(x, y) = y \cdot h_1(x, y) \quad \text{для всех } x \in U, y \in \mathbb{R}.$$

Если дополнительно известно, что $\frac{\partial h}{\partial y}(x, 0) \equiv 0$, то можно представить h в виде

$$h(x, y) = y^2 \cdot g(x, y), \quad \text{где } g \in C^\infty(U \times \mathbb{R}).$$

Доказательство. По формуле Ньютона–Лейбница
$$h(x,y) = \int_0^1 \frac{dh(x,ty)}{dt}\,dt = \int_0^1 y\cdot\frac{\partial h}{\partial y}(x,ty)\,dt,$$
откуда $h(x,y) = y\cdot h_1(x,y)$, где
$$h_1(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial y}(x,ty)\,dt.$$
Это равенство определяет гладкую функцию h_1 на $U\times\mathbb{R}$. Первое утверждение доказано.

Заметим, что $h_1(x,0) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,0)$. Если это выражение всюду равно нулю, то можно применить первую часть леммы к h_1 вместо f, откуда следует второе утверждение. □

Доказательство леммы 3.12. По лемме 3.11
$$\Psi(x,\bar w,f(x,\bar w)) = \psi(\bar w), \qquad \frac{\partial\Psi^2}{\partial w_n}(x,\bar w,f(x,\bar w)) \equiv 0$$
для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $\bar w\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$, $w_n\in\mathbb{R}$. Применив лемму 3.13 к функции
$$h(x,\bar w,w_n) = \Psi^2(x,\bar w,w_n+f(x,\bar w)) - \psi^2(\bar w)$$
на множестве $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$, получаем представление
$$\Psi^2(x,\bar w,w_n) = \psi^2(\bar w) + (w_n - f(x,\bar w))^2 g(x,\bar w,w_n),$$
где $x\in\mathbb{R}^n$, $\bar w\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$, $w_n\in\mathbb{R}$, g — гладкая функция. При $(x,\bar w,w_n)\notin M_0$ по лемме 3.11(1) имеем $\Psi(x,\bar w,w_n) > \psi(\bar w)$, откуда $g(x,\bar w,w_n) > 0$. При $(x,\bar w,w_n)\in M_0$, т.е. при $w_n = f(x,\bar w)$,
$$g(x,\bar w,w_n) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi^2}{\partial w_n^2}(x,\bar w,w_n) > 0,$$
так как Ψ_x — квадратично строго выпуклая норма. Таким образом, функция g всюду положительна. Переобозначая $\sqrt{g}$ через g, получаем требуемое. □

Перейдем к доказательству предложения 3.7. Как уже отмечено, достаточно проверить гладкость отображения r. Согласно следствию 3.9, отображение r в координатах имеет вид
$$r(p,x,\bar w,w_n) = (p,\bar w,r_n(p,x,\bar w,w_n)),$$
$p,x\in\mathbb{R}^n, (\bar w,w_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Таким образом, достаточно доказать гладкость координатной функции r_n.

Из леммы 3.8(2) следует, что r_n удовлетворяет уравнению
$$\Psi(p,\bar w,r_n(p,x,\bar w,w_n)) = \Psi(x,\bar w,w_n). \tag{3.1}$$

По лемме 3.11(2) вне множества M_0 выполнено $\frac{\partial\Psi}{\partial w_n} \neq 0$, а значит, к уравнению (3.1) на r_n применима теорема о неявной функции. Поскольку функция r_n непрерывна (см. лемму 3.10), из теоремы о неявной функции следует, что она гладкая в окрестности любой точки $(p, x, \bar{w}, w_n)$ такой, что $r(p, x, \bar{w}, w_n) = (p, \bar{w}, r_n(p, x, \bar{w}, w_n)) \notin M_0$. Следовательно, r_n гладкая на множестве

$$r^{-1}(T^*\mathbb{R}^n \setminus M_0) = \mathbb{R}^n \times (T^*\mathbb{R}^n \setminus M_0).$$

Остается доказать, что r_n — гладкая в некоторой окрестности множества $r^{-1}(M_0 \setminus 0) = \mathbb{R}^n \times (M_0 \setminus 0)$. Отметим, что $\bar{w} \neq 0$ для любой точки $(p, x, \bar{w}, w_n)$ из этого множества.

Возводя уравнение (3.1) в квадрат и подставляя выражение для Φ^2 из леммы 3.12, получаем

$$\begin{gathered}(r_n - f(p, \bar{w}))^2 g(p, \bar{w}, r_n)^2 = (w_n - f(x, \bar{w}))^2 g(x, \bar{w}, w_n)^2, \\ r_n = r_n(p, x, \bar{w}, w_n).\end{gathered} \tag{3.2}$$

Из леммы 3.8(4) и леммы 3.11(4) следует, что отображение r удовлетворяет условию

$$\operatorname{sign}(r_n(p, x, \bar{w}, w_n) - f(p, \bar{w})) = \operatorname{sign}(w_n - f(x, \bar{w}))$$

для любых $p, x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, $w_n \in \mathbb{R}$. С учетом этого условия и положительности функции g из (3.2) следует, что

$$F(p, \bar{w}, r_n(p, x, \bar{w}, w_n)) = F(x, \bar{w}, w_n), \tag{3.3}$$

где

$$F(x, \bar{w}, w_n) = (w_n - f(x, \bar{w}))g(x, \bar{w}, w_n).$$

По лемме 3.11(3) при $(p, \bar{w}, r_n(p, x, \bar{w}, w_n)) \in M_0 \setminus 0$ выполняется равенство $r_n(p, x, \bar{w}, w_n) = f(p, \bar{w})$. Для точки $(x, \bar{w}, w_n)$ такой, что $\bar{w} \neq 0$ и $w_n = f(x, \bar{w})$, имеем $\frac{\partial F}{\partial w_n}(x, \bar{w}, w_n) = g(x, \bar{w}, w_n) > 0$. Значит, к тождеству (3.3), рассматриваемому как уравнение относительно r_n, применима теорема о неявной функции. Поскольку функция r_n непрерывна (см. лемму 3.10), отсюда следует, что она гладкая в некоторой окрестности любой точки множества $r^{-1}(M_0 \setminus 0)$.

Доказательство предложения 3.7, а значит, и предложения 3.1 завершено.

§4. Вычисление стабильной нормы

Мы используем удобное в данном случае определение стабильной нормы на языке универсального накрывающего пространства n-мерного тора (см. также [BBI]). Обычное определение см., например, в [Ban].

Пусть Φ — произвольная $\mathbb{Z}^n$-периодическая финслерова метрика на $\mathbb{R}^n$, $d = d_\Phi$ — соответствующая внутренняя метрика. Известно [Bur], что пространство $(\mathbb{R}^n, d)$ находится на конечном расстоянии по Громову–Хаусдорфу от некоторого нормированного пространства. Точнее, существуют норма $\|\cdot\|_{st}$, называемая *стабильной нормой* данной метрики, и константа C такая, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $|d(x,y) - \|x-y\|_{st}| < C$.

Замечание 6. В случае, когда метрика не имеет сопряжённых точек, это утверждение доказывается значительно проще, чем в общем случае. А именно нетрудно показать (см., например, [Bu2, §32]), что для каждого $v \in \mathbb{Z}^n$ расстояние $d(x, x+v)$ не зависит от $x \in \mathbb{R}^n$ и $d(x, x+kv) = kd(x, x+v)$ для любого натурального k и $x \in \mathbb{R}^n$. Пользуясь этими свойствами, можно положить $\|v\|_{st} = d(x, x+v)$ для $v \in \mathbb{Z}^n$ и продолжить $\|\cdot\|_{st}$ по однородности и непрерывности на все $\mathbb{R}^n$.

Из определения ясно, что для всякого вектора $v \in \mathbb{R}^n$

$$\|v\|_{st} = \lim_{t\to+\infty} \frac{d(p, p+tv)}{t}$$

для любой точки $p \in \mathbb{R}^n$.

В этом параграфе мы вычислим стабильную норму обобщённой метрики вращения без сопряжённых точек (см. следствие 4.8) и докажем теорему 2, т.е. покажем, что стабильная норма такой метрики гладкая и квадратично строго выпуклая.

Далее в этом параграфе Φ — обобщённая метрика вращения без сопряжённых точек в $\mathbb{R}^n$, $d = d_\Phi$ — соответствующая внутренняя метрика. Мы продолжаем пользоваться обозначениями, зафиксированными в предыдущих параграфах.

Лемма 4.1. *Для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{Z}$ геодезическая γ, соединяющая точки x и $x+v$, инвариантна относительно параллельного переноса T^v на вектор v.*

Доказательство. Пусть $x = \gamma(0)$, $x+v = \gamma(a)$. Воспользуемся тем, что интеграл Клеро $K(\dot\gamma(t))$ и $\operatorname{sign}\dot\gamma(t)_n$ постоянны (см. лемму 2.3). Согласно лемме 3.2, вектор скорости $\dot\gamma(a)$ однозначно определяется значениями $K(\dot\gamma(a))$ и $\operatorname{sign}\dot\gamma_n(a)$. Вектор $dT^v\dot\gamma(0)$ имеет те же значения этих параметров, следовательно, $\dot\gamma(a) = dT^v\dot\gamma(0)$, откуда следует T^v-инвариантность геодезической. $\square$

Замечание 7. Лемму можно также вывести из того факта, что функция $f(x) = d(x, T^v(x))$ постоянна (см. замечание 6). Действительно, пусть

γ — геодезический отрезок между x и $x+v$, q — его середина, тогда $d(q, T^v(q)) = \mathrm{Length}(\gamma)$, следовательно, $\gamma \cup T^v(\gamma)$ — геодезическая.

Лемма 4.2. *Если $v \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, то $\|v\|_{st} = d(p, p+v)$ для всех $p \in \mathbb{R}^n$. Сужение нормы $\|\cdot\|_{st}$ на горизонтальное подпространство H совпадает с Φ_H.*

Доказательство. По лемме 4.1 геодезическая γ, проходящая через p и $p+v$, переходит в себя при сдвиге T^v, значит, она проходит через все точки вида $p+nv$, где $n \in \mathbb{N}$. Так как сопряжённых точек нет, γ минимальна, значит, $d(p, p+nv) = nd(p, p+v)$. Следовательно, $\|v\|_{st} = \lim \frac{d(p,p+nv)}{n} = d(p, p+v)$. Если $v \in H$, то $d(p, p+v) = \Phi_H(v)$, так как γ — горизонтальная прямая (см. лемму 2.3). □

Замечание 8. Из леммы 4.2 легко вывести строгую выпуклость стабильной нормы, т.е. отсутствие отрезков на ее единичной сфере.

Действительно, если на единичной сфере стабильной нормы есть отрезок, то $\|v+u\|_{st} = \|v\|_{st} + \|u\|_{st}$ для некоторых несонаправленных векторов $u, v \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$. Отсюда по лемме $d(0, v+u) = d(0, v) + d(v, v+u)$, т.е. неравенство треугольника обращается в равенство для точек $0, v, v+u$, которые по лемме 4.1 не лежат на одной геодезической.

Напомним, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и любого ненулевого ковектора $u \in T^*_x\mathbb{R}^n$ существует единственная 1-форма ω^u на $\mathbb{R}^n$, пропорциональная стандартному калибратору и такая, что $\omega^u(x) = u$ (см. определение 3.6). По определению 3.4 и лемме 3.5(1) ω^u — замкнутая $\mathbb{Z}^n$-периодическая 1-форма на $\mathbb{R}^n$, следовательно, она определяет элемент $[\omega^u]$ группы $H^1(T^n; \mathbb{R})$ одномерных когомологий де Рама тора $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Определим положительно однородное отображение

$$I : T^*\mathbb{R}^n \setminus 0 \to H^1(T^n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n*}$$

формулой $I(u) = [\omega^u]$. Мы отождествляем $H^1(T^n; \mathbb{R})$ с $\mathbb{R}^{n*}$, пользуясь стандартным изоморфизмом $H_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$.

Лемма 4.3. *Пусть $u \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$, $p \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, γ — гладкая кривая, соединяющая p с $p+v$. Тогда $I(u)(v) = \int_\gamma \omega^u$.*

Доказательство. Для $v \in \mathbb{Z}^n$ равенство следует из определения $I(u)$, так как проекция кривой γ на T^n представляет элемент группы гомологий, соответствующий вектору v. В общем случае для каждого натурального k рассмотрим кривую $\gamma^k = \cup_{i=0}^{k-1}(T^v)^i\gamma$, соединяющую p с $p+kv$. Поскольку форма ω^u T^v-инвариантна (по лемме 3.5), имеем $\int_{\gamma^k} \omega^u = k\int_\gamma \omega^u$. С другой стороны, разности $|\int_{\gamma^k} \omega^u - I(u)(kv)|$, $k \in \mathbb{N}$, ограничены, так как векторы kv лежат на ограниченном расстоянии от целочисленной решетки. Поскольку $|\int_{\gamma^k}\omega^u - I(u)(kv)| = k|\int_\gamma \omega^u - I(u)(v)|$, отсюда следует, что $\int_\gamma \omega^u - I(u)(v) = 0$. □

Лемма 4.4. *Для любых $p \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{Z}$ выполнено*

$$\|v\|_{st} = \sup_{u\in S_p^*\mathbb{R}^n} I(u)(v). \tag{4.1}$$

Супремум достигается в точности на одном ковекторе $u \in S_p^*\mathbb{R}^n$, $u = \mathcal{L}(\dot\gamma(0))$, где γ — натурально параметризованная геодезическая, соединяющая точки p и $p+v$, $\gamma(0) = p$.

Доказательство. Пусть $u \in S_p^*\mathbb{R}^n$, γ — отрезок геодезической между p и $p+v$. По предыдущей лемме $I(u)(v) = \int_\gamma \omega^u$. Из общих свойств калибраторов (см. §1.2) имеем $d(p,p+v) \geq \int_\gamma \omega^u$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда ω^u калибрует γ, т.е. при $u = \mathcal{L}(\dot\gamma(0))$ (см. лемму 3.5). Следовательно, $d(p,p+v) = \sup_{u\in S_p^*\mathbb{R}^n} I(u)(v)$. Согласно лемме 4.2, $d(p,p+v) = \|v\|_{st}$, что завершает доказательство. □

Далее ∂B^*_{st} обозначает единичную сферу нормы $\|\cdot\|^*_{st}$, двойственной к стабильной; te_n обозначает точку в $\mathbb{R}^n$ с координатами $(0,\dots,0,t)$. Эти обозначения используются до конца параграфа.

Лемма 4.5. *Пусть $p \in \mathbb{R}^n$, $(w_1,\dots,w_n)$ — координаты ковектора $u \in T_p^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ в стандартном базисе пространства $T_p^*\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$I(u) = \Big(w_1,\dots,w_{n-1}, \int_0^1 r_n(te_n, p, \bar w, w_n)\,dt\Big), \tag{4.2}$$

где $\bar w = (w_1,\dots,w_{n-1})$, r_n — координатная функция отображения r (см. определение 3.6 и следствие 3.9).

Доказательство. По определению 3.6 и следствию 3.9 форма ω^u в координатах имеет вид

$$\omega^u(x) = w_1\,dx_1 + \dots + w_{n-1}\,dx_{n-1} + r_n(x,p,\bar w, w_n)\,dx_n.$$

По лемме 4.3 $I_i(u) = I(u)(e_i) = \int_{\gamma_i}\omega^u$, где кривая $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ определена равенством $\gamma_i(t) = te_i$. (Здесь I_i — i-я координатная функция отображения I, $i = 1,\dots,n$.) Подставляя в интеграл $\int_{\gamma_i}\omega^u$ координатное выражение для ω^u, получаем требуемый ответ. □

Лемма 4.6. *Отображение I гладкое. Для любого $p \in \mathbb{R}^n$ дифференциал сужения $I|_{T_p^*\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ всюду невырожден.*

Доказательство. Гладкость следует из формулы (4.2) и гладкости функции r_n (см. предложение 3.7).

Так как для всех $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $r_{x,p} : T_p^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to T_x^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ является диффеоморфизмом (см. предложение 3.7) и сохраняет координаты $w_1, \dots w_{n-1}$ (см. следствие 3.9), имеем $\frac{\partial r_n}{\partial w_n} \neq 0$. Так как область определения связна, знак производной $\frac{\partial r_n}{\partial w_n}$ постоянен, а так как $r_{p,p}$ тождественно, этот знак положителен. Отсюда и из (4.2) следует, что $\frac{\partial I_n}{\partial w_n} > 0$. Следовательно, так как I тоже сохраняет координаты $w_1, \dots, w_{n-1}$, дифференциал отображения $I|_{T_p^*\mathbb{R}^n}$ невырожден. □

Предложение 4.7. *Для любого $p \in \mathbb{R}^n$, сужение $I|_{S_p^*\mathbb{R}^n}$ является диффеоморфизмом на ∂B_{st}^*. В частности, ∂B_{st}^* является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^{n*}$.*

Доказательство. Пусть $u \in S_p^*\mathbb{R}^n$. По лемме 4.4 $I(u)(v) \leq \|v\|_{st}$ для любого $v \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, а значит, и для любого $v \in \mathbb{R}^n$, причем в этом неравенстве достигается равенство (на векторе $v \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, таком, что геодезическая γ с начальным вектором скорости $\mathcal{L}^{-1}(u)$ соединяет p с $p+v$; такая геодезическая существует по лемме 2.5). Следовательно, $I(u) \in \partial B_{st}^*$.

Пусть $v \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ таков, что $I(u)(v) = \|v\|_{st}$, $u' \in S_p^*\mathbb{R}^n$, $u' \neq u$. Тогда $I(u')(v) < \|v\|_{st}$ по лемме 4.4, откуда $I(u') \neq I(u)$. Таким образом, сужение $I|_{S_p^*\mathbb{R}^n}$ инъективно. По лемме 4.6 оно гладкое и его дифференциал невырожден. Следовательно, оно является диффеоморфизмом на гладкое подмногообразие $I(S_p^*\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n*}$, которое содержится в ∂B_{st}^*. Поскольку ∂B_{st}^* гомеоморфно S^{n-1} и любое непрерывное инъективное отображение из S^{n-1} в S^{n-1} сюръективно, образ $I(S_p^*\mathbb{R}^n)$ совпадает с ∂B_{st}^*. □

Следствие 4.8. *Единичная сфера двойственной к стабильной нормы представима в виде*

$$\partial B_{st}^* = \{I(w) \mid w \in S^*\mathbb{R}^n\} = \{[\omega] \mid \omega \text{ — стандартный калибратор}\}.$$

Предложение 4.9. *Гиперповерхность ∂B_{st}^* квадратично строго выпукла, т.е. для каждой точки $u \in \partial B_{st}^*$ существует евклидов шар B такой, что $u \in \partial B$ и $\partial B_{st}^* \subset B$.*

Доказательство. Для $x \in \mathbb{R}^n$ обозначим через S_x^* гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n*}$, соответствующую кокасательной сфере $S_x^*\mathbb{R}^n$ при отождествлении $T_x^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n*}$. Зафиксируем обозначения $(w_1, \dots, w_n)$ для координат в $\mathbb{R}^{n*}$. Как и раньше, мы обозначаем $\bar{w} = (w_1, \dots, w_{n-1})$.

Зафиксируем точку $p \in \mathbb{R}^n$. По предложению 3.7 и следствию 3.9 гиперповерхность $S_x^* \subset \mathbb{R}^{n*}$ параметризуется диффеоморфизмом $r_{x,p} : S_p^* \to S_x^*$, который в координатах имеет вид

$$r_{x,p}(\bar{w}, w_n) = (\bar{w}, r_n(x, p, \bar{w}, w_n)) \tag{4.3}$$

(мы сохраняем обозначение $r_{x,p}$ для отображения из определения 3.6, скомбинированного с отождествлениями $T_x^*\mathbb{R}^n \cong T_p^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n*}$). По предложению 4.7 и лемме 4.5 гиперповерхность $\partial B_{st}^* \subset \mathbb{R}^{n*}$ параметризуется диффеоморфизмом $I_p : S_p^* \to \partial B_{st}^*$, где

$$I_p(w) = \Big(\bar{w}, \int_0^1 r_n(te_n, p, \bar{w}, w_n)\,dt\Big) = \int_0^1 r_{te_n,p}(w)\,dt \tag{4.4}$$

для $w = (\bar{w}, w_n) \in S_p^*$.

Зафиксируем $w^0 = (\bar{w}^0, w_n^0) \in S_p^*$ и покажем, что гиперповерхность ∂B_{st}^* квадратично строго выпукла в точке $u^0 = I_p(w^0)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\mathcal{L}^{-1}(p, w^0)$ — *горизонтальный вектор.* Это означает, что ковектор (p, w_0), а с ним и все ковекторы вида $(x, r_{x,p}(w^0))$ лежат в множестве M_0 из п. 3.3 (см. лемму 3.8(4)).

Поскольку гиперповерхности S_x^* квадратично строго выпуклы, для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ существует евклидов шар B_x, содержащий S_x^* и такой, что $r_{x,p}(w^0) \in \partial B_x$. По соображениям компактности можно считать, что радиусы всех шаров B_x одинаковы.

Заметим, что все касательные гиперплоскости к поверхностям S_x^* в точках $r_{x,p}(w^0)$ совпадают. Действительно, из п. 1 и 2 леммы 3.11 следует, что эти гиперплоскости параллельны координатной оси w_n, а их образы при проекции P_{H^*} касаются в точке $\bar{w}^0$ единичного шара нормы $\psi = (\Phi_H)^*$ на $H^* \cong \mathbb{R}^{n-1}$.

Следовательно, все шары B_x совмещаются параллельными переносами, при которых точки $r_{x,p}(w^0)$ переходят друг в друга. Обозначим через B шар, получающийся из B_x параллельным переносом, при котором $r_{x,p}(w^0)$ переходит в u^0. Покажем, что $\partial B_{st}^* \subset B$.

Для любых $w \in S_p^*$ и $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $r_{x,p}(w) \in B_x$, откуда по построению шара B точка $c(x, w) = u^0 + r_{x,p}(w) - r_{x,p}(w^0)$ лежит в B. Из формулы (4.4) следует, что точка $I_p(w) = u^0 + I_p(w) - I_p(w^0)$ лежит в выпуклой оболочке точек $c(te_n, w)$, $t \in [0, 1]$, откуда $I_p(w) \in B$. Поскольку $I_p(S_p^*) = \partial B_{st}^*$, отсюда следует, что $\partial B_{st}^* \subset B$.

Случай 2. $\mathcal{L}^{-1}(p, w^0)$ *не горизонтален.* Достаточно показать, что вторая форма гиперповерхности ∂B_{st}^* знакоопределена в точке u^0.

Поскольку $\frac{\partial\Psi}{\partial w_n}(p, w^0) \neq 0$ (см. п. 2 леммы 3.11), некоторая окрестность U точки w^0 в S_p^* представима в виде графика

$$U = \{(\bar{w}, h(\bar{w})) \mid \bar{w} \in U^0\}$$

гладкой функции $h : U^0 \to \mathbb{R}$, где U^0 — некоторая окрестность точки $\bar{w}^0$ в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Теперь из (4.3) следует, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ соответствующая область $r_{x,p}(U) \subset S_x^*$ представляется в виде графика

$$r_{x,p}(U) = \{(\bar{w}, g_x(\bar{w})) \mid \bar{w} \in U^0\},$$

где $g_x(\bar{w}) = r_n(x, p, \bar{w}, h(\bar{w}))$.

Из формулы (4.4) получаем, что соответствующая окрестность $I_p(U)$ точки u^0 в ∂B_{st}^* представима в виде графика гладкой функции $g : U^0 \to \mathbb{R}$, где

$$g(\bar{w}) = \int_0^1 g_{te_n}(\bar{w})\, dt, \quad \bar{w} \in U^0.$$

Воспользуемся следующим простым фактом: если гиперповерхность $N \subset \mathbb{R}^n$ локально представлена в виде графика гладкой функции $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, то ее вторая форма знакоопределена тогда и только тогда, когда знакоопределена вторая производная $d^2 g$ (т.е. квадратичная форма с коэффициентами $\frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}$).

Поскольку каждая поверхность S_x^* квадратично строго выпукла, квадратичная форма $d^2 g_x(\bar{w}^0)$ знакоопределена, причем по непрерывности ее знак один и тот же для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, квадратичная форма $d^2 g(\bar{w}^0) = \int_0^1 d^2 g_{te_n}(\bar{w}^0)\, dt$ знакоопределена, поэтому гиперповерхность ∂B_{st}^* строго выпукла в точке u^0. □

Доказательство теоремы 2. Из предложений 4.7 и 4.9 следует, что двойственная к стабильной норма бесконечно гладкая и квадратично строго выпуклая, следовательно, такова и $||\cdot||_{st}$. □

Замечание 9. *Предельным направлением* геодезической γ финслеровой метрики в $\mathbb{R}^n$ называется предел $D(\gamma) = \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma(t)}{t}$, если он существует. В случае обобщённой метрики вращения предел всегда существует, так как γ инвариантна относительно сдвига T^v на некоторый вектор $v \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ (см. лемму 4.1).

Пусть $\mathcal{L}_{st} : \partial B_{st} \to \partial B_{st}^*$ — преобразование Лежандра стабильной нормы. Нетрудно видеть, что для любого $v \in S\mathbb{R}^n$ вектор $\mathcal{L}_{st}^{-1}(I(\mathcal{L}(v)))$ совпадает с $D(\gamma_v)$, где γ — геодезическая с $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Отображения $I \circ \mathcal{L}$

и $\mathcal{L}_{st}^{-1} \circ I \circ \mathcal{L}$ обладают всеми свойствами отображения $\mathbb{K}$ из предложения 3.1. Таким образом, построенный интеграл геодезического потока приобретает наглядный геометрический смысл.

Замечание 10. Несложно вывести, что слои $I^{-1}(y)$, $y \in \mathbb{R}^{n*}$, совпадают со слоями расслоения, построенного в [H]. Последние являются графиками дифференциалов функций Буземана. В [H] доказано, что при отсутствии у метрики Φ сопряженных точек для $w \in S\mathbb{R}^n$ функция Буземана b_w геодезической γ с $\dot\gamma(0) = w$ совпадает с $-b_{-w}$. Т.е. для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$b_w(x) = \lim_{t\to\infty} d_\Phi(x, \gamma(t)) - t = \lim_{t\to\infty} t - d_\Phi(x, \gamma(-t)).$$

Из этого несложно вывести, что произвольная 1-липшицева функция g, такая, что $g(\gamma(t)) = t$ для всех $t \in \mathbb{R}$, совпадает с b_{-w}. Следовательно, каждый стандартный калибратор является дифференциалом некоторой функции Буземана.

4.1. Доказательство теоремы 3. Рассмотрим T^*T^n как симплектическое многообразие со стандартной симплектической формой ω. Поскольку отображение I инвариантно относительно целочисленных параллельных переносов, оно является поднятием некоторого отображения F : $T^*T^n \setminus 0 \to \mathbb{R}^{n*}$. Для каждого $y \in \mathbb{R}^{n*} \setminus \{0\}$ слой $F^{-1}(y)$ является графиком замкнутой 1-формы ω^y (поднятие которой в $\mathbb{R}^n$ равно ω^u, где $u \in I^{-1}(y)$). Отсюда следует, что $F^{-1}(y)$ является лагранжевым многообразием (см. [TF, §24; Fom, §3.1]).

Из этого и теоремы 35.2 из [DNF, т. 1] следует, что координатные функции отображения F находятся в инволюции (см. также предложение 15 §24 [TF], исследование лагранжевых расслоений в §28 [TF]). Следовательно, применима теорема Лиувилля (см. [Arn, DNF, BF]) о существовании координат „действие–угол“ в окрестности каждого из торов $F^{-1}(y)$. А именно для каждой точки $y_0 \in \mathbb{R}^{n*}$ существует окрестность $U \ni y_0$ и гладкие функции $s_1, \dots, s_n : F^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ (координаты действия) и $\varphi_1, \dots, \varphi_n : F^{-1}(U) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (угловые координаты) такие, что

(1) функции s_i постоянны на каждом слое $F^{-1}(y)$, $y \in U$;
(2) отображение $(s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ является диффеоморфизмом из $F^{-1}(U)$ на $V \times T^n$, где V — область в $\mathbb{R}^n$;
(3) $\omega = \sum_i ds_i \wedge d\varphi_i$.

При этом координаты действия могут быть заданы следующим образом. Пусть на каждом торе $F^{-1}(y)$, $y \in U$, зафиксирован набор $\gamma_{1,y}, \dots, \gamma_{n,y}$ циклов, представляющих базис фундаментальной группы $\pi_1(F^{-1}(y)) \cong \mathbb{Z}^n$, причем $\gamma_{i,y}$ непрерывно зависит от y. Пусть α — такая 1-форма на $F^{-1}(U)$, что $d\alpha = \omega$. Тогда s_i можно определить явной формулой (см. [BF, §1.5]):

$$s_i(u) = \int_{\gamma_{i,y}} \alpha, \quad \text{где } u \in F^{-1}(U), \; y = F(u).$$

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — циклы в T^n, представляющие стандартный базис фундаментальной группы $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$. Выберем в качестве $\gamma_{i,y}$ цикл в $F^{-1}(y)$, проецирующийся в γ_i при проекции расслоения $\pi : T^*M \to M$. В качестве α выберем каноническую форму действия (определяемую равенством $\alpha(a) = \xi(d\pi(a))$, где $a \in T_{(x,\xi)}T^*M$).

Пусть $y \in U$, $u \in F^{-1}(y)$. Напомним, что $F^{-1}(y)$ есть график замкнутой 1-формы ω^y, причем $y = F(u) = [\omega^y]$ — элемент группы когомологий $H^1(T^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n*}$, определяемый формой ω^y. Теперь формула для s_i принимает вид

$$s_i(u) = \int_{\gamma_{i,y}} \alpha = \int_{\gamma_i} \omega^y = [\omega^y](e_i) = F_i(u),$$

где F_i — координатная функция отображения F. Таким образом, координаты действия совпадают с координатными функциями отображения F, в частности, они определены всюду на $T^*T^n \setminus 0$. Выбор начала отсчета на каждом торе $F^{-1}(y)$, $y \in \mathbb{R}^{n*} \setminus \{0\}$ однозначно определяет угловые координаты, таким образом, существуют глобальные координаты действие–угол

$$(s, \varphi) : T^*T^n \setminus 0 \to (\mathbb{R}^{n*} \setminus \{0\}) \times T^n,$$

причем $\|s(u)\|^*_{st} = \Phi^*(u)$ для всех $u \in T^*T^n \setminus 0$ (см. предложение 4.7).

Пусть Φ_0 — плоская финслерова метрика на T^n, соответствующая стабильной норме метрики Φ (здесь мы пользуемся теоремой 2). Построим аналогичные координаты (s^0, φ^0) для метрики Φ_0 и определим диффеоморфизм $h : T^*T^n \setminus 0 \to T^*T^n \setminus 0$ равенством $h = (s^0, \varphi^0)^{-1} \circ (s, \varphi)$. Этот диффеоморфизм сохраняет симплектическую структуру и удовлетворяет равенству $H = H_0 \circ h$, где H и H_0 — гамильтонианы метрик Φ и Φ_0 соответственно.

Следовательно, h сопрягает гамильтоновы потоки метрик Φ и Φ_0, а также их сужения на единичные кокасательные расслоения. Поскольку геодезический поток переводится в гамильтонов поток преобразованием Лежандра, геодезические потоки метрик Φ и Φ_0 тоже сопряжены.

Список литературы

[Arn] Арнольд В. И., *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.

[Ban] Bangert V., *Minimal geodesics*, Ergodic Theory Dynam. Systems **10** (1989), 263–286.

[BBI] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В., *Курс метрической геометрии*, Москва–Ижевск, 2004, 512 с.

[Bu1] Busemann H., *Metrics on the torus without conjugate points*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **10** (1953), nos. 3–4, 1–18.

[Bu2] Буземан Г., *Геометрия геодезических*, Физматгиз, М., 1962.

[Bur] Burago D., *Periodic metrics*, Adv. Soviet Math., vol. 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 205-210.

[BuI] Burago D., Ivanov S., *Riemannian tori without conjugate points are flat*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), no. 3, 259–269.

[BF] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., *Интегрируемые гамильтоновы системы.* Т. I, Удмурт. ун-т, Ижевск, 1999.

[CK] Croke C. B., Kleiner B., *On tori without conjugate points*, Invent. Math. **120** (1995), 241–257.

[DNF] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., *Современная геометрия. Методы и приложения*, Эдиториал, М., 2001.

[Fom] Фоменко А. Т., *Симплектическая геометрия*, МГУ, М., 1988.

[H] Heber Jens, *On the geodesic flow of tori without conjugate points*, Math. Z. **216** (1994), 209–216.

[Sh] Shen Z., *Lectures on Finsler geometry*, World Sci. Publ. Co., Singapore, 2001.

[TF] Трофимов В. В., Фоменко А. Т., *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*, Математика и её приложения, Факториал, М.; совместно с изд-вом Удмурт. ун-та, Ижевск, 1995.

E-mail: nikita.zinoviev@gmail.com

Поступило 8 февраля 2007 г.