А. П. Терехин, Смешанная q-интегральная p-вариация и теоремы об эквивалентности и вложении классов функций со смешанным модулем гладкости,
Тр. МИАН СССР, 1979, том 150, 306–319

Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

А. П. ТЕРЕХИН

СМЕШАННАЯ q-ИНТЕГРАЛЬНАЯ p-ВАРИАЦИЯ И ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ВЛОЖЕНИИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ СО СМЕШАННЫМ МОДУЛЕМ ГЛАДКОСТИ

Понятие q-интегральной p-вариации [1] применяется в данной работе для характеристики p-интегральных смешанных свойств гладкости функций многих переменных. В отличие от работы [1], где решались задачи, связанные с наличием у функции из L_q смешанных производных в L_p, в данной работе в терминах L_q-нормы характеризуются обобщенные классы Гёльдера, построенные в L_p по смешанным модулям гладкости. Вместе с [1] это будет переносом на многомерный случай и развитием результатов [2]. Теоремы доказываются для векторных p и q, любой открытой области задания функции и квазинорм, определенных по общим функционалам типа максимизации, в частности, аналогам $\mathscr{H}$-функционалов [3]. Непосредственными следствиями являются вложения в соответствующие классы в L_q $(q \geqslant p \geqslant 1)$.

О соотношениях между известными и родственными понятиями p-вариации и о частных случаях см. упомянутые работы [1, 2]. Отметим, что в данной работе, в отличие от [1], понятие q-интегральной p-вариации определяется в ином порядке q-интегрирования и p-варьирования. Это сделано с той целью, чтобы основная оценка ((p, q)-модуля через модули в L_p) приняла вид окончательной одномерной оценки П. Л. Ульянова [4] (для модулей в L_q через модули в L_p).

О. В. Бесов сделал ряд замечаний к данной работе; за это я искренне ему признателен.

§ 1. ОЦЕНКА РАЗНОСТИ ЧЕРЕЗ ЕЕ УСРЕДНЕНИЯ

1.1. Из одномерного представления функции через разности [3, с. 253] выводится поточечная оценка разности через ее усреднения. Оценка устанавливается для определенных на открытых множествах функций одной переменной, причем в виде, удобном для последующего использования в многомерном случае при оценке смешанных разностей. Последнее обстоятельство потребовало некоторой модификации известных приемов получения подобных оценок [3, с. 253—256], связанной главным образом с наличием операторных коэффициентов (которые при переходе к нормам превращаются в скаляры).

1.2. Пусть f — измеримая действительная функция, определенная на открытом множестве G числовой прямой R. Через $T(t)$, $-\infty < t < +\infty$, обозначим оператор сдвига: $T(t)f(x) = f(x+t)$ на $G - t$. Полагаем $\Delta^r(t)f(x) = [T(t) - I]^r f(x)$, если $x + [0, rt] \subset G$ и $\Delta^r(t)f(x) = 0$ в ином случае ($r = 1,2,\ldots$).

1.3. *При* $t > 0$

$$|\Delta^r(t)f| \leqslant C(t)\frac{1}{t}\int\limits_{-t}^{t}|\Delta^r(\xi)f|\,d\xi,$$

где $C(t)$ *— равномерно по* t *ограниченный оператор, действующий (в частности) в* L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Для доказательства воспользуемся оценкой

$$|\Delta^r(Nt)f(x)| \leqslant C\frac{1}{t}\int\limits_{-rNt}^{rNt}\int\limits_{-1}^{1}|\Delta^r(ty)f(x+\xi)|\,dy\,d\xi +$$
$$+ C\sum_{s=0}^{r(N-1)}\int\limits_{-1}^{1}|\Delta^r(t)\Delta^r(ty)f(x+st)|\,dy.$$

Это аналог неравенства (13) (см. [3, с. 255]), вытекающий из (10′) [3, с. 256], как (13) из (10) (по нашим выводам в правых частях неравенств на с. 255 должно быть mN вместо N).

Учитывая, что $|\Delta^r(t)g| \leqslant [T(t) + I]^r|g|$, применяя последнюю оценку с t/N вместо t, получаем доказываемое неравенство с оператором

$$C(t) = C\frac{N}{t}\int\limits_{-rt}^{rt}T(\xi)\,d\xi + C[T(t/N) + I]^r\sum_{s=0}^{r(N-1)}T(st/N).$$

Равномерная ограниченность $C(t)$ очевидна.

1.4. *При* $t > 0$

$$|\Delta^r(t)f| \leqslant C(t)\int\limits_{-t}^{t}\int\limits_{-t}^{t}\frac{T(y)[I + T(\xi)]}{(|y| + |\xi|)^2}|\Delta^r(\xi)f|\,dy\,d\xi,$$

где $C(t)$ *обладает свойством оператора в* 1.3.

Доказательство. Исходим из одномерного представления функции через разности [3, с. 253, (11)]. Запишем представление в операторной форме и умножим обе его части на разность $\Delta^r(t)$. Получим

$$\Delta^r(t) = \frac{1}{t}\int\limits_R \psi_0\left(\frac{y}{t}\right)T(y)\,\Delta^r(t)\,dy +$$
$$+ \Delta^r(t)\int\limits_0^t\int\limits_R\int\limits_R h^{-3}\psi_1\left(\frac{y}{h}\right)\zeta\left(\frac{\xi}{h}\right)T(y+\xi)\,\Delta^k(\xi)\,dy\,d\xi\,dh. \qquad (1)$$

Из-за того, что ядра ψ_0, ψ_1, ζ сосредоточены на интервале (0, 1), носитель представления равен отрезку $[0, (r+k+2)t]$, тогда как носитель разности $\Delta^r(t)$ есть отрезок $[0, rt]$: из соответствующих отрезков берутся аргументы сдвигов в представлении и определении разности. Для совмещения носителей воспользуемся известным приемом с привлечением противоположного направления числовой оси [3, с. 255]. Поскольку желательно по возможности компактное представление, этот прием мы повторим в удобной для нас форме.

По равенству

$$\Delta^r(Nt) = \Delta^r(t)\left[\sum_{s=0}^{N-1} T(st)\right]^r = \Delta^r(t)\sum_{s=0}^{r(N-1)} C_s T(st)$$

определим операторы

$$P(t) = \sum_{s\leqslant S} C_s T(st), \qquad Q(t) = \sum_{s>S} C_s T(st), \qquad 0 \leqslant S \leqslant r(N-1).$$

Имеем, таким образом,

$$\Delta^r(Nt) = P(t)\Delta^r(t) + Q(t)\Delta^r(t).$$

Для первого слагаемого применим представление (1), а для второго — такое же представление с ядрами $\psi_i(-y)$ и $\zeta(-\xi)$ вместо $\psi_i(y)$ и $\zeta(\xi)$. Носителем представления первого слагаемого станет отрезок $[0, (S+r+k+2)t]$, второго — $[(S+r-k-1)t, rNt]$. Выберем S и N так, чтобы $S+r+k+2 \leqslant rN$ и $S+r-k-1 \geqslant 0$. Очевидно, при достаточно большом N нужное S существует. В таком случае носитель всего представления будет не больше отрезка $[0, rNt]$ — носителя разности $\Delta^r(Nt)$. Носители совмещены. Представление теперь будет таким:

$$\Delta^r(Nt) = \frac{1}{t}\int_R \left[P(t)\psi_0\left(\frac{y}{t}\right) + Q(t)\psi_0\left(\frac{-y}{t}\right)\right] T(y)\Delta^r(t)\,dy +$$

$$+ \Delta^r(t)\int_0^t\int_R\int_R h^{-3}\left[P(t)\psi_1\left(\frac{y}{h}\right)\zeta\left(\frac{\xi}{h}\right) + Q(t)\psi_1\left(\frac{-y}{h}\right)\zeta\left(\frac{-\xi}{h}\right)\right]\times$$

$$\times T(y+\xi)\Delta^k(\xi)\,dy\,d\xi\,dh.$$

Переходя к неравенству, учитываем положительность операторов P и Q, оценку $|\Delta^r(t)g| \leqslant [T(t) + I]^r |g|$, ограниченность ядер и их сосредоточение на интервале $(0, 1)$. Находим

$$|\Delta^r(Nt)f| \leqslant P_1(t)\frac{1}{t}\int_R \chi\left(\frac{y}{t}\right) T(y)|\Delta^r(t)f|\,dy +$$

$$+ P_2(t)\int_0^t\int_R\int_R h^{-3}\chi\left(\frac{y}{h}\right)\chi\left(\frac{\xi}{h}\right) T(y+\xi)|\Delta^k(\xi)f|\,dy\,d\xi\,dh,$$

где χ — характеристическая функция интервала $(-1,1)$.

В первом интеграле разность $|\Delta^r(t)f|$ оценим согласно 1.3, а потом воспользуемся неравенством

$$\frac{1}{t^2}\chi\left(\frac{y}{t}\right)\chi\left(\frac{\xi}{t}\right) \leqslant 4\int_0^{2t} h^{-3}\chi\left(\frac{y}{h}\right)\chi\left(\frac{\xi}{h}\right) dh.$$

Заменив Nt на t и k на r, придем к оценке

$$|\Delta^r(t)f| \leqslant C(t)\int_0^t\int_R\int_R h^{-3}\chi\left(\frac{y}{h}\right)\chi\left(\frac{\xi}{h}\right)[T(y) + T(y+\xi)]\,|\Delta^r(\xi)f|\,dy\,d\xi\,dh.$$

Осталось внешний интеграл оценить по неравенству

$$\int_0^t h^{-3}\chi\left(\frac{y}{h}\right)\chi\left(\frac{\xi}{h}\right) dh \leqslant \chi\left(\frac{y}{t}\right)\chi\left(\frac{\xi}{t}\right)\int_{\max(|y|,\,|\xi|)}^{\infty} h^{-3}\,dh \leqslant \frac{\chi\left(\frac{y}{t}\right)\chi\left(\frac{\xi}{t}\right)}{(|y|+|\xi|)^2}$$

(ср. [3, с. 261]). Свойство доказано.

§ 2. ОЦЕНКИ (p, q)-МОДУЛЕЙ И МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ В L_p

2.1. Определяется понятие (p, q)-модуля и устанавливаются его взаимные оценки с различными q, в том числе с модулями непрерывности в L_p-норме.

2.2. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, действительная функция f определена на числовой оси, φ — на положительной полуоси; (a_j), $j = 0, \pm 1, \ldots,$ — действительная (двусторонняя) последовательность. Обозначаем

$$\| f(x) \|_{L_p} = \Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^p \, dx \Big]^{1/p}, \qquad \| \cdot \|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup} | \cdot |;$$

$$\| f(x) \|_{L_p^t} = \Big[\int\limits_{0}^{t} | f(x) |^p \, dx \Big]^{1/p} \qquad (t > 0);$$

$$\| (a_j) \|_{l_p} = \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} | a_j |^p \Big)^{1/p}, \qquad \| \cdot \|_{l_\infty} = \sup | \cdot |;$$

$$\| \varphi(t) \|_{J_\theta^t} = J_\theta^t [\varphi(t)] = \Big[\int\limits_{0}^{t} | \varphi(\xi) |^\theta \frac{d\xi}{\xi} \Big]^{1/\theta},$$

$$\| \varphi(t) \|_{J_\infty} = \sup_{t>0} | \varphi(t) |, \qquad \| \varphi(t) \|_{J_0^t} = J_0^t [\varphi(t)] = \varphi(t).$$

На базе этих норм в многомерном случае будут строиться прямые произведения по аналогии со смешанными L_p-нормами. Общая схема обозначений, связанных с построениями, такова.

Если B_i — нормированное пространство функций (абстрактной) переменной x_i и $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то через $B_1 \ldots B_n$ обозначаем пространство функций $f(x)$ с нормой

$$\| f(x) \|_{B_1 \ldots B_n} = \| \ldots \| f(x) \|_{B_1} \ldots \|_{B_n}.$$

Если, далее, $B^j = B_1^j \ldots B_n^j$ $(j = 1, \ldots, m)$, то по определению $B^1 \ldots B^m = B_1^1 \ldots B_n^1 \ldots B_1^m \ldots B_n^m$ и $(B^1 \ldots B^m) = B_1^1 \ldots B_1^m \ldots$ $\ldots B_n^1 \ldots B_n^m$. В первом случае нормы смешаны последовательно, во втором — покоординатно.

Пусть, теперь, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$ и $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, т. е. $1 \leqslant p_i \leqslant q_i \leqslant \infty$ для всех $i = 1, \ldots, n$; $L_p = L_{p_1} \ldots L_{p_n}$; $L_q^h = L_{q_1}^{h_1} \ldots L_{q_n}^{h_n}$, $h = (h_1, \ldots, h_n) > 0$; $l_p = l_{p_1} \ldots l_{p_n}$; $j = (j_1, \ldots, j_n)$ — вектор с целочисленными компонентами, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ — с натуральными; $jh = (j_1 h_1, \ldots, j_n h_n)$.

Величину $\sup\limits_{h \geqslant t} \| \Delta^r(t) f(x + jh) \|_{l_p L_q^h}$ при вещественных p и q и $\sup\limits_{h \geqslant t} \| \Delta^r(t) \times$ $\times f(x + jh) \|_{(l_p L_q^h)}$ при p или q векторном называем *q-интегральной p-вариацией порядка r функции f* или *(p, q)-модулем* и обозначаем через $\mu_{p,q}^r(t; f)$.

Неоднозначность определения связана с тем фактом, что модуль с последовательным смешением, более естественный по крайней мере для вещественного p, при векторном p теряет свойство 2.3, а при векторном q — свойство 2.4. Первое из свойств включает в класс (p, q)-модулей модули непрерывности в L_p-норме, второе — оценки для (p, q)-модулей преобразует в оценки для модулей в L_q-норме.

В этом параграфе будут также использованы нормы пространств

$$J^t_\theta = J^{t_1}_\theta \ldots J^{t_n}_{\theta_n} \text{ и } \overleftarrow{J}^t_\theta = J^{t_n}_{\theta_n} \ldots J^{t_1}_{\theta_1}.$$

Наконец, x^e, $e \subset \{1, \ldots, n\}$ — проекция x на подпространство переменных x_i, $i \in e$;

$$t^\alpha = \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha_i}, \quad t_e^\alpha = \prod_{i\in e} t_i^{\alpha_i}, \quad t_\phi^\alpha = 1, \quad t_e^1 = \prod_{i\in e} t_i; \qquad -e = \{1, \ldots, n\} \setminus e.$$

2.3. *Имеем*

$$\mu^r_{p,p}(t; f) = \| \Delta^r(t) f \|_{L_p},$$

что вытекает из равенства

$$\int\limits_{(0,h)} \sum_j |\Delta^r(t) f(x + jh)|^p \, dx = \sum_j \int\limits_{(0,h)+jh} |\Delta^r(t) f(x)|^p \, dx = \int\limits_{R^n},$$

где p вещественное, $(0, h) = \Pi\,(0, h_i)$. Для векторного p равенство следует применить покоординатно.

2.4. *Справедлива оценка*

$$\| \Delta^r(t) f \|_{L_q} \leqslant \mu^r_{p,q}(t; f).$$

В самом деле, в случае скалярных p и q

$$\| \Delta^r(t) f \|_{L_q} = \mu^r_{q,q}(t; f) \leqslant \mu^r_{p,q}(t; f).$$

Применили 2.3 и неравенство Иенсена

$$(\Sigma \, | \cdot |^q)^{1/q} \leqslant (\Sigma \, | \cdot |^p)^{1/p}.$$

Для векторных p или q оценка является следствием.

2.5. *Если* $1 \leqslant p \leqslant q' \leqslant q \leqslant \infty$, *то*

$$\mu^r_{p,q'}(t; f) \leqslant (2t)^{1/q' - 1/q} \mu^r_{p,q}(t; f).$$

Для скалярных p и q докажем неравенство

$$\| g(x + jmh) \|_{l_p L_q^{mh}} \leqslant \| g(x + jh) \|_{l_p L_q^h}, \tag{1}$$

$m = (m_1, \ldots, m_n)$, m_i — натуральные.

Следствием будет такое же неравенство для векторных p или q с нормой $(l_p L_q^h)$. Из (1) вытекало бы равенство

$$\sup_{h \geqslant t} \| g(x + jh) \|_{l_p L_q^h} = \sup_{2t \geqslant h \geqslant t} \| g(x + jh) \|_{l_p L_q^h}, \tag{2}$$

в том числе и для $(l_p L_q^h)$-нормы: по любому h найдется такое m, что $t_i \leqslant h_i/m_i < 2t_i$, и ввиду (1) правая часть (2) не может быть меньше левой.

Из (2) искомая оценка 2.5 следует благодаря неравенству Гёльдера. Итак, доказываем (1). Имеем

$$\int\limits_{(0,mh)} \Big[\sum_j |g(x + jmh)|^p\Big]^{q/p} dx = \int\limits_{(0,h)} \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \ldots \sum_{k_n=0}^{m_n-1} \Big[\sum_j |g(x + kh + jmh)|^p\Big]^{q/p} dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{(0,h)} \Big[\sum_{k=0}^{m-1} \sum_j |g(x + (k + jm) h)|^p\Big]^{q/p} dx = \| \, \| g(x + jh) \|_{l_p} \|^q_{L_q^h}.$$

Применили аналог неравенства Минковского ($q/p \geqslant 1$).

Осталось извлечь корень q-й степени.

2.6. Пусть $1 \leqslant p \leqslant q' \leqslant q \leqslant \infty$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, причем $\theta_i = 0$ на $e_0 = \{i : q'_i = q_i\}$, $\theta_i = \infty$ на $e_\infty = \{i : q_i = \infty,\ q'_i = 1,\ r_i = 1\}$ и $\theta_i = 1$ на $e_1 = \{i : q_i = \infty\} \setminus (e_0 \cup e_\infty)$; полагаем $\overline{\theta} = \theta^{-e_\infty}$ и $\overline{\infty} = \theta^{e_\infty}$, $e = -(e_0 \cup e_1 \cup e_\infty)$.

Т е о р е м а. *При $h \geqslant t$ оценка*

$$\| \Delta^r (t) f (x + jh) \|_A \leqslant C \| t^{-1/q'+1/q} \Delta^r (t) f (x + jh) \|_B$$

выполняется (с постоянной C, не зависящей от f, t и h) в следующих случаях:

1) *с нормами $A = l_p L^h_q$ и $B = l_p (L^h_{q'}, J^t_{\overline{\theta}}) J_{\overline{\infty}}$, а также с $A = (l_p L^h_q)$ и $B = (l_p L^h_{q'} J^t_{\overline{\theta}}) J_{\overline{\infty}}$, если $1 \leqslant \theta_i \leqslant q_i$ для $i \in e$;*

2) *с $A = l_p L^h_q$ и $B = l_p L^h_{q'} \overleftarrow{J}^t_{\overline{\theta}} J_{\overline{\infty}}$, если $1 \leqslant \theta_i \leqslant q_i, q_{i+1}, \ldots, q_n$ для $i \in e$;*

3) *с $A = (l_p L^h_q)$ и $B = (l_p L^h_{q'}) \overleftarrow{J}^t_{\overline{\theta}} J_{\overline{\infty}}$, если $1 \leqslant \theta_i \leqslant q_i, p_{i+1}, \ldots, p_n$ для $i \in e$ (при $n \in e$, если $1 \leqslant \theta_n \leqslant q_n$).*

З а м е ч а н и е. Условия на конечные θ_i аналогичны известным ([3, с. 466]). Выделение бесконечных θ_i связано с тем обстоятельством, что соответствующие аналогии значения $\theta_i = 1$ на e_∞ ведут к вырождению в бесконечность правой части искомой оценки: $-1/q'_i + 1/q_i = -1$, а разность $\Delta (\xi_i) f$, если она ненулевая, не может иметь при $\xi_i \to 0$ порядка малости выше первого.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Наряду с оценкой 1.4 воспользуемся для средней Стеклова $f_\xi (x) = \int_0^1 f (x + \xi y)\, dy$ одномерной оценкой

$$| \Delta (t) f_\xi | \leqslant \frac{1}{\xi} \int_0^t T (y) | \Delta (\xi) f |\, dy \qquad (t, \xi > 0), \tag{3}$$

прямо вытекающей из равенства

$$\Delta (t) f_\xi (x) = \int_0^t f'_\xi (x + y)\, dy = \frac{1}{\xi} \int_0^t \Delta (\xi) f (x + y)\, dy.$$

В многомерном случае обозначим через f_ξ, $\xi = \xi^{e_\infty}$, среднюю Стеклова по переменным x_i, $i \in e_\infty$:

$$f_\xi (x) = \int_{(0,\,1)^{e_\infty}} f (x + \xi y^{e_\infty})\, dy^{e_\infty},$$

где $(0,1)^{e_\infty}$ — куб пространства переменных x^{e_∞}. Считаем $\xi_i > 0$ для $i \in e_\infty$ (от других ξ_i средняя не зависит).

Будем, далее, применять попеременно оценки (3) и 1.4 в зависимости от принадлежности номера переменной множеству e_∞ или $-(e_\infty \cup e_0)$; при $i \in e_0$ оценки не производим.

Допустим, что $1 \in e_\infty$. Тогда $r_1 = 1$ и можно применять оценку (3). Перейдя в ней по неравенству Минковского от модулей к p-вариациям, положив

$$g (x_1, t_1) = \| \Delta^r (t) f_\xi (x + jh) \|_{l_p},$$

получим

$$g (x_\text{I}, t_\text{I}) \leqslant \frac{1}{\xi_\text{I}} \int_0^{t_\text{I}} T (y_\text{I})\, g_\text{I} (x_\text{I}, \xi_\text{I})\, dy_\text{I}, \tag{4'}$$

где

$$g_1(x_1, t_1) = \| \Delta^r(t) f_{\xi^1}(x + jh) \|_{l_p}, \quad \xi^1 = (0, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Освободиться от усреднения здесь существенно помогает оценка (3).

В одномерном случае при $x, t \in (0, h)$

$$\int_0^t |g(x+y)|\, dy \leqslant \int_0^{2h} |g(y)|\, dy.$$

Следовательно,

$$\| g(x_1, t_{\mathrm{I}}) \|_{L_{q_1}^{h_1}} \leqslant \frac{1}{\xi_1} \| g_{\mathrm{I}}(x_{\mathrm{I}}, \xi_{\mathrm{I}}) \|_{L_{q_1'}^{2h_1}},$$

с учетом, что $q_1 = \infty$, $q_1' = 1$.

От $2h_1$ перейдем к h_1 на основании неравенства

$$\| g_{\mathrm{I}} \|_{L_{q'}(-mh, nh)} \leqslant (m + n) \| g_{\mathrm{I}} \|_{L_{q'}^{h}}, \tag{5}$$

вытекающего из h_i-периодичности вариации $\| \Delta^r(t) f_{\xi^1}(x + jh) \|_{l_p}$.

Таким образом,

$$\| g(x_{\mathrm{I}}, t_1) \|_{L_{q_1}^{h_1}} \leqslant C_1 \xi_{\mathrm{I}}^{-1} \| g_{\mathrm{I}}(x_{\mathrm{I}}, \xi_{\mathrm{I}}) \|_{L_{q_1'}^{h_1}}, \tag{6'}$$

если $1 \in e_\infty$.

Пусть $1 \in e_0$, т. е. $q_1' = q_1$. Здесь просто возьмем норму $L_{q_1}^{h_1} = L_{q_1'}^{h_1}$ функции g и запишем очевидный аналог неравенства (6′):

$$\| g(x_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}) \|_{L_{q_1}^{h_1}} \leqslant C_{\mathrm{I}} \| g_{\mathrm{I}}(x_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}) \|_{L_{q_1'}^{h_1} J_{\theta_1}^{t_1}}. \tag{6''}$$

По условию $\theta_1 = 0$ и, следовательно, $J_{\theta_1}^{t_1}$ — тождественный оператор. Кроме того, $\xi_1 = 0$ ($1 \notin e_\infty$), поэтому переход от g к g_1 формален ($g_1 = g$).

Пусть, наконец, $1 \in\!\!\!- (e_\infty \cup e_0)$. Оценка 1.4 даст следующий аналог неравенству (4′):

$$g(x_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}) \leqslant C_{\mathrm{I}}(t_{\mathrm{I}}) \int_{-t_1}^{t_1} \int_{-t_1}^{t_1} \frac{T(y_1) S(\xi_1)}{(|y_1| + |\xi_1|)^2} g_{\mathrm{I}}(x_{\mathrm{I}}, \xi_{\mathrm{I}})\, dy_{\mathrm{I}}\, d\xi_{\mathrm{I}}, \tag{4''}$$

где $S(\xi_1) = I + T(\xi_1)$.

Снова, так как $1 \notin e_\infty$, то $g_1 = g$. Прежде чем брать нормы, умножим обе части (4″) на $\chi_0(x_1/h_1)$ — характеристическую функцию интервала $(0, h_1)$ — и перейдем с ней в правой части под сдвиги. Учитывая, что $t_1 \leqslant h_1$, получаем

$$\chi_0(x_{\mathrm{I}}/h_{\mathrm{I}})\, g(x_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{I}}) \leqslant C_{\mathrm{I}}(t_{\mathrm{I}}) \int_{-t_1}^{t_1} \int_{-t_1}^{t_1} \frac{T(y_1) S(\xi_1)}{(|y_1| + |\xi_1|)^2} \chi_{\mathrm{I}}(x_{\mathrm{I}}/3h_{\mathrm{I}})\, g_{\mathrm{I}}(x_1, \xi_{\mathrm{I}})\, dy_{\mathrm{I}}\, d\xi_{\mathrm{I}},$$

де χ_1 — характеристическая функция интервала (—1,1).

Теперь возьмем норму L_{q_1} (на всей оси) и воспользуемся одномерным вариантом известной оценки [3, с. 258]; выполнение ее условий для θ_1 при $1 \in\!\!\!- (e_\infty \cup e_0)$ гарантировано условиями теоремы: либо $\theta_1 = 1$ (если

$1 \in e_1$), либо $1 \leqslant \theta_1 \leqslant q_1$, $q_1' < q_1 < \infty$ (если $1 \in e$). Найдем

$$\| \chi_0 (x_1/h_1) g (x_1, t_1)\|_{L_{q_1}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left\| |\xi_1|^{-\frac{1}{q_1'}+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{\theta_1}} \chi_1 (\xi_1/t_1) \chi_1 (x_1/3h_1) g_1 (x_1, \xi_1) \right\|_{L_{q_1'} L_{\theta_1, \xi_1}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left\| t_1^{-\frac{1}{q_1'}+\frac{1}{q_1}} g_1 (x_1, t_1) \right\|_{L_{q_1'} (-m_1h_1, m_1h_1) J_{\theta_1}^{t_1}}.$$

Для g_1 учли тождество $| \Delta^{r_1} (- \xi_1) f | = T (- r_1\xi_1) | \Delta^{r_1} (\xi_1) f |$ и неравенства $\xi_1 \leqslant t_1 \leqslant h_1$.

Как и выше, на основании приема (5) переходим от интервала $(-m_1h_1, m_1h_1)$ в норме $L_{q_1'}$ к интервалу $(0, h_1)$. Получим новый аналог неравенства (6'):

$$\| g (x_1, t_1) \|_{L_{q_1}^{h_1}} \leqslant C_1 \left\| t_1^{-\frac{1}{q_1'}+\frac{1}{q_1}} g_1 (x_1, t_1) \right\|_{L_{q_1'}^{h_1} J_{\theta_1}^{t_1}}. \tag{6}$$

Оценку (6) считаем общим видом оценок (6, 6', 6''), временно полагая оператор $J_{\theta_1}^{t_1}$ при $1 \in e_\infty$ действующим по формуле $J_{\theta_1}^{t_1} [\varphi (t_1)] = \varphi (\xi_1)$.

Переходим к оценкам по второй переменной x_2.

Теперь за исходную берем новую функцию $g (x_2, t_2)$, равную правой части (6); внимание переводим на зависимость g_1 от x_2, t_2 (см. после (4')).

По неравенству Минковского оценки (3) и 1.4 переносятся, как и ранее, на функцию $g (x_2, t_2)$.

Далее имеем в виду доказательство первой части утверждения 1). В этом случае условия на θ_i симметричны. Поэтому неравенство (6) будет верным и для второй переменной с новыми функциями. Обозначив через $g (x_1, x_2; t_1, t_2)$ прежнюю функцию с дополнительно выделенными вторыми переменными, найдем:

$$\| g (x_1, x_2; t_1, t_2)\|_{L_{q_1}^{h_1} L_{q_2}^{h_2}} \leqslant \| g (x_2, t_2) \|_{L_{q_2}^{h_2}} \leqslant C_2 \left\| t_2^{-\frac{1}{q_2'}+\frac{1}{q_2}} g_2 (x_2, t_2) \right\|_{L_{q_2'}^{h_2} J_{\theta_2}^{t_2}} =$$

$$= C_1C_2 \left\| t_{(1, 2)}^{-\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}} g_2 (x_1, x_2; t_1, t_2) \right\|_{L_{q_1'}^{h_1} J_{\theta_1}^{t_1} L_{q_2'}^{h_2} J_{\theta_2}^{t_2}}, \tag{7}$$

где $g_2 (x_1, x_2; t_1, t_2) = \| \Delta^r (t) f_{\xi^2} (x + jh) \|_{l_p}$, $\quad \xi^2 = (0,0, \xi_3, \ldots, \xi_n)$.

На последнем шаге придем к оценке

$$\| \Delta^r (t) f_\xi (x + jh) \|_{l_p L_q^h} \leqslant C \left\| t^{-\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}} \Delta^r (t) f (x + jh) \right\|_{l_p (L_{q'}^h J_{\theta}^t) J_\infty^t}. \tag{8}$$

Последними вынесены операции $J_{\theta_i}^{t_i}$ преобразования t_i в ξ_i, $i \in e_\infty$.

Взяв справа верхнюю грань по $\xi_i > 0$, $i \in e_\infty$, слева устремив ξ_i к нулю, получим неравенство, доказывающее первую часть утверждения 1).

Для доказательства утверждения 2) в качестве новой функции $g (x_2, t_2)$ возьмем также правую часть (6), но без взятия нормы $J_{\theta_1}^{t_1}$. Под нее можно пройти с нормой L_{q_2}, так как $\theta_1 \leqslant q_2$ (см. условие утверждения 2)). Поэтому будет выполнен аналог неравенства (7) с нормой $L_{q_1'}^{h_1} L_{q_2'}^{h_2} J_{\theta_2}^{t_2} J_{\theta_1}^{t_1}$ в правой части (использовано также условие $\theta_2 \leqslant q_2$).

Последующие проходы под нормы $J_{\theta_i}^{t_i} \ldots J_{\theta_1}^{t_1}$ обеспечат неравенства $\theta_i, \ldots, \theta_1 \leqslant q_{i+1}$, вытекающие из условия утверждения 2).

На n-м шаге придем к аналогу оценки (8) с последовательным смещением норм справа и обратным порядком взятия норм $J_{\theta_i}^{t_i}$. Как и после (8), взяв верхнюю грань и предел, докажем утверждение 2).

Для доказательства оценок теоремы с покоординатным смешением левых норм с самого начала следует исходить из частной p_1-вариации:

$$g(x_1, t_1) = \| \Delta^r(t) f_\xi (x + jh) \|_{l_{p_1}}.$$

Очевидно, неравенство (6) верно и для этой функции. Взяв от обеих частей (6) нормы $l_{p_2} L_{q_2}^{h_2}$, внешнюю из них, $L_{q_2}^{h_2}$, оценим опять-таки по (6) подобно (7). Рассуждая, далее, как при доказательстве первой части утверждения 1), доказываем его вторую часть.

Наконец, для доказательства утверждения 3) в оценке (6) под норму $J_{\theta_1}^{t_1}$ надо проходить сначала с нормой l_{p_2}, а затем с L_{q_2}. Это обеспечат неравенства $\theta_1 \leqslant p_2 \leqslant q_2$ (см. условия утверждения 3)). Само утверждение 3) теперь не вызывает сомнений. Теорема доказана.

2.7. Теорема. *Пусть p, q', q и θ вещественные*, $1 \leqslant p \leqslant q' \leqslant q \leqslant \infty$. *Оценка*

$$\mu_{p,q}^r(t; f) \leqslant C \left\| t^{-\frac{1}{q'} + \frac{1}{q}} \mu_{p,q'}^r(t; f) \right\|_{J_\theta^t}$$

имеет место при $\theta = 1$ *или когда* $1 \leqslant \theta \leqslant q$, *но* $q' < q < \infty$.

В общем случае векторных параметров оценка

$$\mu_{p,q}^r(t; f) \leqslant C \left\| t^{-\frac{1}{q'} + \frac{1}{q}} \mu_{p,q'}^r(t; f) \right\|_{J_{\bar\theta}^{\bar t} J_{\bar\infty}}$$

верна при выполнении общих условий теоремы 2.6 (*ей предшествующих в* 2.6) *и условий утверждения* 3).

Доказательство. Для вещественных параметров теорема следует из утверждения 2) теоремы 2.6, для векторных — из утверждения 3) (см. также определение (p, q)-модуля, пункт 2.2).

2.8. Теорема. *При p и q вещественных* ($1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$)

$$\mu_{p,q}^r(t; f) \leqslant C \left\| t^{-\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \| \Delta^r(t) f \|_{L_p} \right\|_{J_\theta^t},$$

если $\theta = 1$ *или* $1 \leqslant \theta \leqslant q$, *но* $p < q < \infty$.

В случае, когда $p = 1$, $q = \infty$ *и* $a = \{i\colon r_i > 1\} \neq \{1, \ldots, n\}$, *имеем*

$$\mu_{1,\infty}^r(t; f) \leqslant C \sup_{\substack{\xi_i > 0 \\ i \in -a}} \int_{(0,t)^a} \xi^{-1} \| \Delta^r(\xi) f \|_L \, d\xi^a,$$

где $(0, t)^a = \prod_a (0, t_i)$, $\int \varphi = \varphi$ *при* $a = \phi$.

Если p или q векторные, то

$$\mu^r_{p,q}(t; f) \leqslant C \left\| t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \| \Delta^r(t) f \|_{L_p} \right\|_{J^t_{\bar{\theta}} J_{\bar{\infty}}}$$

при выполнении общих условий теоремы 2.6 *и условий ее утверждения* 3) *с* $q' = p$.

Доказательство, без крайнего случая p и q, получаем из теоремы 2.7 при $q' = p$ ввиду равенства 2.3. В крайнем случае применим теорему 2.6 с нормами утверждения 2); условия выполнены автоматически, поскольку $e = \phi$, а $\theta_i = 1$ на $-e_\infty = a$. И здесь учтем равенство 2.3.

Следствие. *В соответствующих условиях теоремы* 2.8 *при вещественных p и q имеем*

$$\| \Delta^r(t) f \|_{L_q} \leqslant C \left\| t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \| \Delta^r(t) f \|_{L_p} \right\|_{J^t_\theta} {}^1,$$

$$\| \Delta^r(t) f \|_{L_\infty} \leqslant C \sup_{\substack{\xi_i > 0 \\ i \in -a}} \int_{(0,t)^a} \xi^{-1} \| \Delta^r(\xi) f \|_L \, d\xi^a,$$

и при p или q векторных [2]

$$\| \Delta^r(t) f \|_{L_q} \leqslant C \left\| t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \| \Delta^r(t) f \|_{L_p} \right\|_{J^t_{\bar{\theta}} J_{\bar{\infty}}}.$$

Вытекает из теоремы 2.8 и неравенства 2.4.

§ 3. ТЕОРЕМЫ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ВЛОЖЕНИИ

3.1. Устанавливается эквивалентность квазинорм, определенных по модулям $\mu^r_{p,q}(t; f)$ и $\| \Delta^r(t) f \|_{L_p}$. Кроме того, доказываются порядковые соотношения для тех же модулей, выровненных до монотонных. Как следствия получаются теоремы вложения обобщенных классов Гёльдера, заданных в L_p-нормах, в такие же классы в L_q-нормах ($p \leqslant q$).

3.2. Полагаем

$$\omega^r_{p,q}(\delta; f) = \sup_{0 < t \leqslant \delta} \mu^r_{p,q}(t; f),$$

$$\omega^r_p(\delta; f) = \sup_{0 < t \leqslant \delta} \| \Delta^r(t) f \|_{L_p}, \qquad \delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) > 0.$$

Это *выровненные* соответственно (p, q)-модули и известные смешанные модули непрерывности в L_p.

Пусть p, q и r заданы. Значение θ, скаляра или вектора, называем *допустимым*, если оно удовлетворяет условиям теоремы 2.8: θ — скаляр при вещественных p и q, причем либо $\theta = 1$, либо $1 \leqslant \theta \leqslant q$, $p < q < \infty$; при $p = 1$, $q = \infty$ допустимы $\theta_i = 1$ на $\{i: r_i > 1\}$ и $\theta_i = \infty$ на $\{i: r_i = 1\}$; при векторных p или q вектор θ удовлетворяет общим условиям теоремы 2.6 и ее

[1] М. К. Потапов [5], периодический случай; П. Л. Ульянов [4], одномерный периодический случай.

[2] См. [3, с. 466, лемма 29.4 при $\gamma = 0$]. Оценка выполнена при более широких предположениях утверждения 2) теоремы 2.6, а не 3), как того требует теорема 2.8. Это видно из доказательства 2): применив рассуждения непосредственно к разности, а не к p-вариации, при $q' = p$ придем к искомой оценке.

утверждения 3) с $q' = p$, т. е. $\theta_i = 0$ на $e_0 = \{i: q_i = p_i\}$, $\theta_i = \infty$ на $e_\infty = \{i: q_i = \infty, p_i = 1, r_i = 1\}$, $\theta_i = 1$ на $e_1 = \{i: q_i = \infty\} \setminus (e_0 \cup e_\infty)$ и $1 \leqslant \theta_i \leqslant q_i, p_{i+1}, \ldots, p_n$ на $-(e_0 \cup e_1 \cup e_\infty)$.

Отметим, что оценка теоремы 2.8 для векторных p или q является универсальной: она верна и для вещественных p и q со своими допустимыми значениями θ.

Обозначения: $\mu_a(t)$ — положительная функция переменных $t_i \in (0, t_i^0)$, $i \in a$; $\mathscr{H}_a[\psi] = \mathscr{H}_a[\psi(t)]$ — функционал, определенный на неотрицательных функциях $\psi_a(t)$ и *почти монотонный*: если $\psi_1(t) \leqslant C\psi_2(t)$, то $\mathscr{H}_a[\psi_1] \leqslant M(C)\,\mathscr{H}_a[\psi_2]$; $t^{-\alpha}J_\theta^t[t^\alpha]$ — оператор со значением $t^{-\alpha}J_\theta^t[t^\alpha\psi(t)]$ на $\psi(t)$; $F_e^t[\psi(t)] = \sup\limits_{0<\tau_i\leqslant t_i,\ i\in e} \tau_e^{-1} \int\limits_{(0,\tau)^e} \psi(\xi)\,d\xi$ — выровненная средняя Стеклова по переменным t^e; $\sup\limits_e \psi(t) = \sup\limits_{0<t_i,\, i\in e} \psi(t)$; S_e, $e \subset a$,— класс функций $\mu_a(t)$, обладающих свойством: найдется такое $\alpha > 0$, что функция $t_e^{-\alpha}\mu_a(t)$ *почти возрастает по* t_e, т. е. с некоторой постоянной C выполняется неравенство $\xi_e^{-\alpha}\mu_a(\xi) \leqslant Ct_e^{-\alpha}\mu_a(t)$, как только $\xi_i \leqslant t_i$ для всех $i \in e$ и $\xi_i = t_i$ для $i \in a\setminus e$ (условие $\mu_a \in S_e$ — многомерный аналог условия С. Б. Стечкина [6] для функций сравнения одной переменной).

Скажем, что μ_a и $\mathscr{H}_a$ *е-согласованы* с оператором $J_{\theta^e}^t$, если существует такой вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > 0$, что

1) $t_e^{-\alpha}\mu_a(t)$ почти возрастает по t_e;

2) относительно $\mathscr{H}_a$ ограничен оператор $t^{-\alpha}J_{\theta^e}^t[t^\alpha.]$:

$$\mathscr{H}_a\{t^{-\alpha}J_{\theta^e}^t[t^\alpha\psi(t)]\} \leqslant C\mathscr{H}_a[\psi(t)]$$

(очевидно, $t^{-\alpha}$ и t^α можно заменить на $t_e^{-\alpha}$ и t_e^α соответственно).

Аналогично определяется e-согласованность μ_a и $\mathscr{H}_a$ с F_e^t. Из (одномерной) оценки

$$\tau^{-1}\int\limits_0^\tau \psi(\xi)\,d\xi \leqslant \left(\int\limits_0^\tau \psi^\theta(\xi)\frac{d\xi}{\xi}\right)^{1/\theta} \qquad (1 \leqslant \theta \leqslant \infty),$$

вытекающей из неравенства Гёльдера, следует, что e-согласованность с $J_{\theta^e}^t$ влечет за собой e-согласованность с F_e^t, т. е. последняя шире.

Нетрудно проверить, что в случае одной переменной условиям почти монотонности и ограниченности оператора $t^{-\alpha}J_{\theta^e}^t[t^\alpha.]$ для всех $\alpha > 0$ удовлетворяет $\mathscr{H}$-функционал, определенный в монографии [3], откуда заимствовано обозначение (выполнение названных условий следует из свойств 1°—3° $\mathscr{H}$-функционала [3]).

Следуя принятой терминологии [3], называем *квазинормой* значение $\mathscr{H}_a$ на параметрической полунорме.

3.3. Теорема. *Пусть* $a = -\{i: q_i = \infty, p_i = 1, r_i = 1\}$ *и* $e = a \cap \{i: q_i \neq p_i\}$. *Если* μ_a *и* $\mathscr{H}_a$ *е-согласованы с* $\overleftarrow{J}_{\theta^e}^t$ *при некотором допустимом* θ, *то эквивалентны квазинормы*

$$\mathscr{H}_a\left[\sup_{-a} \|\Delta^r(t) f\|_{L_p}/\mu_a(t)\, t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right], \qquad \mathscr{H}_a\left[\sup_{-a} \mu_{p,q}^r(t; f)/\mu_a(t)\right]$$

и такие же квазинормы с выровненными модулями на месте невыровненных.

Если к тому же μ_a *и* $\mathscr{H}_a$ $a\setminus e$*-согласованы с* $F_{a\setminus e}^t$, *то попарно эквивалентны между собой все четыре названные квазинормы.*

Если $\mu_a \in S_e$, *то равносильны порядковые соотношения*

$$\sup_{-a} \omega^r_{p}(\delta; f)\,\delta^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \asymp \mu_a(\delta), \qquad \omega^r_{p,q}(\delta; f) \asymp \mu_a(\delta),$$

причем второе — равномерно по переменным δ_i, $i \in -a$, *от которых* $\mu_a(\delta)$ *не зависит* ($\psi_1(\delta) \asymp \psi_2(\delta)$ *означает, что* $C\psi_1(\delta) \leqslant \psi_2(\delta) \leqslant M\psi_1(\delta)$, $C > 0$).

Доказательство. Занумеруем (1)—(4) квазинормы в порядке их следования в формулировке теоремы. Индекс a у μ_a и $\mathscr{H}_a$ опускаем.

В силу монотонности функционала $\mathscr{H}$, (1) $\leqslant$ (3) и (2) $\leqslant$ (4), так из-за очевидных отношений между выровненными и невыровненными модулями оцениваются соответствующие квазинормы. Из 2.5 при $q' = p$, ввиду 2.3, следует, что (1) $\leqslant$ (2) и (3) $\leqslant$ (4); в последнем неравенстве учли справедливость 2.3 и 2.5 и для выровненных модулей.

Докажем неравенство (2) $\leqslant$ (1). Для этого воспользуемся теоремой 2.8, ее последней, универсальной оценкой. Положив

$$\psi(t) = \sup_{-a} \| \Delta^r(t) f \|_{L_p} / \mu(t)\, t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

получим

$$\mu^r_{p,q}(t; f)/\mu(t) \leqslant C \overleftarrow{J}^{t}_{\bar\theta}[\mu\psi]/\mu(t).$$

По определению $\bar\theta = \theta^a$ (см. 2.6), кроме того, $\theta_i = 0$ на $a \setminus e = a \cap e_0$; следовательно, $\bar\theta = \theta^e$. Ввиду e-согласованности

$$\mu(\xi)/\mu(t) \leqslant C_1 \xi_e^{\alpha} t_e^{-\alpha},$$

где ξ — переменная интегрирования в $\overleftarrow{J}^t_{\bar\theta}$: $\xi^e \leqslant t^e$ и $\xi^{-e} = t^{-e}$.

Тогда

$$\sup_{-a} \mu^r_{p,q}(t; f)/\mu(t) \leqslant C_2 t^{-\alpha} \overleftarrow{J}^t_{\bar\theta}[\xi^\alpha \psi(\xi)].$$

Воспользовались независимостью правой части от t_i с $i \in -a$.

Стоящий в правой части оператор ограничен относительно $\mathscr{H}$ по условию e-согласованности, поэтому

$$\mathscr{H}[\sup_{-a} \mu^r_{p,q}(t; f)/\mu(t)] \leqslant C_3 \mathscr{H}[\psi(t)].$$

Ввиду выбора ψ последнее означает неравенство (2) $\leqslant$ (1), которое вместе с неравенством (1) $\leqslant$ (2) доказывает эквивалентность (1) $\asymp$ (2).

Теорема 2.8, как нетрудно видеть, верна и для выровненных модулей. Значит, имеет место эквивалентность (3) $\asymp$ (4).

Пусть теперь с μ и $\mathscr{H}$ $a \setminus e$-согласован оператор $F^t_{a\setminus e}$. Поскольку $\theta_i = 0$ на $a \setminus e$, то $\overleftarrow{J}^{t}_{\bar\theta}{}^{a\setminus e}$ — тождественный оператор. Поэтому, ввиду 1.3, общая оценка теоремы 2.8 сохранится, если норму $\overleftarrow{J}^t_{\bar\theta} J_{\bar\infty}$ заменить нормой $\overleftarrow{J}^t_{\bar\theta e} J_{\bar\infty} F^t_{a\setminus e}$. Последняя по t монотонна и, следовательно, с ней оценивается не только модуль $\mu^r_{p,q}(t; f)$, но и выровненный модуль $\omega^r_{p,q}(t; f)$. Рассуждения, подобные приведенным выше, докажут неравенство (4) $\leqslant$ (1). Теперь цепочка неравенств замкнется: по доказанному (1) $\asymp$ (2), из неравенств (1) $\leqslant$ (3) и (3) $\leqslant$ (4) $\leqslant$(1) следует (1) $\asymp$ (3) $\asymp$ (4), откуда (1) $\asymp$ (2) $\asymp$ (3) $\asymp$ (4).

Приступаем к доказательству равносильности порядковых соотношений (здесь мы применяем технику доказательств, известную для функций одной переменной, см., например, [6]; проверке подлежит разве лишь использование свойства S_e при разбиении кратного интеграла).

Воспользуемся доказанной эквивалентностью квазинорм с выровненными модулями и функционалом $\mathcal{H}_a[\psi(t)] = \sup_a \psi(t)$. Относительно $\mathcal{H}_a$ оператор $t^{-\alpha} J_{1}^{t}{}_{e}[t^{\alpha}.]$ ограничен при любом $\alpha > 0$. По условию $\mu_a \in S_e$. Следовательно, μ_a и $\mathcal{H}_a$ e-согласованы с $J_{1}^{t}{}_{e}$. Эквивалентность названных квазинорм означает равносильность отношений

$$\omega_p^r(\delta; f) = O\left[\mu(\delta)\,\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right], \qquad \omega_{p,q}^r(\delta; f) = O[\mu(\delta)]. \tag{1}$$

При выполнении первого из порядковых соотношений (для p-модулей), применив 2.5 для выровненных модулей с $q' = p$, найдем

$$C_1\mu(\delta) \leqslant \omega_p^r(\delta; f)\,\delta^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leqslant C_2\omega_{p,q}^r(\delta; f).$$

Отсюда

$$C_3\mu(\delta) \leqslant \omega_{p,q}^r(\delta;\ f),$$

что вместе с имеющимся отношением (1) доказывает для $(p,\ q)$-модуля порядковое соотношение.

Пусть теперь

$$C_1\mu(\delta) \leqslant \omega_{p,q}^r(\delta;\ f) \leqslant C_2\mu(\delta). \tag{2}$$

Поскольку O-отношение для p-модуля уже обеспечено, то для него достаточно доказать оценку снизу.

На основании теоремы 2.8, ввиду (2),

$$C_3\mu(\delta) \leqslant \int\limits_{(0,\,\delta)^e} \sup_{-a} \xi^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,\omega_p^r(\xi; f)\,\xi_e^{-1}\,d\xi^e, \tag{3}$$

где $\xi^{-e} = \delta^{-e}$ (теорему 2.8 использовали с $\theta^e = 1^e$).

По разбиению

$$(0,\delta)^e = \sum_{e' \subset e} (0, h)^{e'} \times [h, \delta)^{e \setminus e'}, \qquad 0 < h^e < \delta^e, \qquad h^{-e} = \delta^{-e},$$

разложим интеграл в (3) и оценим каждое слагаемое.

При $e' = \varnothing$

$$\int\limits_{[h,\,\delta]^e} \sup_{-a} \xi^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,\omega_p^r(\xi; f)\,\xi_e^{-1}\,d\xi^e \leqslant C_4 \sup_{-a} h^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,\omega_p^r(\delta; f). \tag{4}$$

При $e' \neq \varnothing$ воспользуемся оценкой 2.5 (для выровненных модулей с $q' = p$) и правым неравенством (2); получим

$$\int\limits_{(0,\,h)^{e'} \times [h,\,\delta)^{e \setminus e'}} \sup_{-a} \xi^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,\omega_p^r(\xi; f)\,\xi_e^{-1}\,d\xi^e \leqslant C_5 \int\limits_{(0,\,h)^{e'} \times [h,\,\delta)^{e \setminus e'}} \mu(\xi)\,\xi_e^{-1}\,d\xi^e.$$

По свойству S_e

$$\mu(\xi) \leqslant C\mu(\delta)\,\xi_e^{\alpha}\delta_e^{-\alpha}.$$

Тогда последний интеграл оценится величиной

$$C_6\mu(\delta)\, h_{e'}^{\alpha}\delta_{e'}^{-\alpha},$$

которая, таким образом, будет мажорантой соответствующего слагаемого в разложении интеграла (3).

Воспользовавшись в (3) этой мажорантой при $e' \neq \varnothing$ и неравенством (4) при $e' = \varnothing$, найдем

$$C_7\mu(\delta) \leqslant \sup_{-a} h^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\omega_p^r(\delta; f) + \mu(\delta) \sum_{\substack{e'\subset e\\ e'\neq\varnothing}} h_{e'}^{\alpha}\delta_{e'}^{-\alpha}.$$

Положив $h_i = \varepsilon\delta_i$, $i \in e$, выбрав $\varepsilon > 0$ достаточно малым, добьемся, чтобы

$$\sum_{\substack{e'\subset e\\ e'\neq\varnothing}} \prod_{e'} \varepsilon^{\alpha} \leqslant C_7/2.$$

Осталось перенести слагаемое с $\mu(\delta)$ влево и поделить неравенство на коэффициент у p-модуля. Эквивалентность порядковых соотношений, а с ней и вся теорема, доказаны.

3.4. Теорема. *В условиях первой части теоремы 3.3 имеет место вложение* [1]

$$\mathcal{H}_a\left[\sup_{-a} \|\Delta^r(t) f\|_{L_p}/\mu_a(t)\, t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right] \subset \mathcal{H}_a\left[\sup_{-a} \|\Delta^r(t) f\|_{L_q}/\mu_a(t)\right]$$

и такое же вложение с выровненными модулями.

Доказательство получаем из теоремы 3.3 (ее первого утверждения) и неравенства 2.4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терехин А. П.* Многомерная q-интегральная p-вариация и обобщенная по Соболеву дифференцируемость в L_p функций из L_q.— Сиб. мат. журн. 1972, 13, № 6, с. 1358—1373.
2. *Терехин А. П.* Функции ограниченной q-интегральной p-вариации и теоремы вложения.— Мат. сб., 1972, 88, (130), № 2 (6), с. 277—286.
3. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
4. *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^{ω}.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, 32, с. 649—686.
5. *Потапов М. К.* Вложение классов функций с доминирующим смешанным модулем гладкости.— Труды МИАН СССР, 1974, 131, с. 199—210.
6. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций.— Труды Моск. матем. об-ва, 1956, 5, с. 483—522.

[1] В случае векторных p или q множество допустимых θ шире (см. сноску [2] к следствию 2.8).