

$|\operatorname{Re} \lambda| < \kappa_2$ . В этом случае локализация вибрационного процесса только путем подбора глубины залегания включения невозможна. Невозможен также и низкочастотный резонанс, так как для полупространства  $\omega_{кр} = 0$ .

1. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. — М.: Научн. мир, 1999. — 246 с.
2. *Бабешко В.А.* Среда с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ, 2000. — № 3. С. 5–9.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

donna@kubsu.ru

УДК 517.95

**А. В. Псху**

### **УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА СО МНОГИМИ ВРЕМЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ\***

1. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^m \lambda_k \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial y_k^{\alpha_k}} u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где  $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$  — оператор Лапласа,  $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ ;  $\partial^{\alpha_k} / \partial y_k^{\alpha_k}$  — дробная производная порядка  $\alpha_k$  по переменной  $y_k$ , либо производная в смысле Римана-Лиувилля ([1, с. 9]),  $\partial^{\alpha_k} / \partial y_k^{\alpha_k} = D_{0y_k}^{\alpha_k}$ ,

$D_{0t}^{\alpha} g(t) = [\Gamma(m - \alpha)]^{-1} (\partial / \partial t)^m \int_0^t g(s) (t - s)^{m - \alpha - 1} ds$ ,  $\alpha \leq m$ ; либо производная Капуто ([1, с. 11]),  $\partial^{\alpha_k} / \partial y_k^{\alpha_k} = \partial_{0y_k}^{\alpha_k}$ ,  $\partial_{0t}^{\alpha} g(t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^m D_{0t}^{\alpha - m} g(t)$ ;

$y = (y_k) \in \mathbb{R}^m$ ;  $\alpha_k \in (0; 1)$ ,  $\lambda_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

При  $m = 1$  уравнение (1) совпадает с уравнением диффузии дробного порядка. Уравнения с дробными производными могут выступать в качестве математических моделей, описывающих различные процессы в средах с фрактальной геометрией ([1, гл. 5]). Отметим работы [2–8], в которых рассматривались диффузионные и диффузионно-волновые уравнения

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 06-01-96625, № 06-01-96627) и Фонда содействия отечественной науке

дробного порядка (см., также, библиографические комментарии в [7, с. 132]).

В работе построено решение задачи Коши для уравнения (1) и доказана его единственность в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А. Н. Тихонова.

Обозначим через  $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in T\}$ , где  $T = \{y = (y_k) : y_k \in (0; T_k), k = 1, 2, \dots, m\}$ . Если  $z \in \mathbb{R}^m$ ,  $z = (z_k, k = 1, 2, \dots, m)$ , то через  $z_{(k)}$  будем обозначать проекцию точки  $z$  на  $\mathbb{R}^{m-1}$  вдоль  $z_k$ :  $z_{(k)} = (z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_m)$ .  $Y = (0; y_1) \times \dots \times (0; y_m)$ .  $Y_{(k)} = (0; y_1) \times \dots \times (0; y_{k-1}) \times (0; y_{k+1}) \times \dots \times (0; y_m)$ .  $T_{(k)} = (0; T_1) \times \dots \times (0; T_{k-1}) \times (0; T_{k+1}) \times \dots \times (0; T_m)$ .

2. Регулярным решением уравнения (1) в области  $D$  в случае производной Римана-Лиувилля ( $\partial^{\alpha_k} / \partial y_k^{\alpha_k} = D_{0y_k}^{\alpha_k}$ ) назовем функцию  $u = u(x, y)$  из класса  $\prod_{k=1}^m y_k^{1-\alpha_k} u(x, y) \in C(\bar{D})$ ,  $u_{x_i x_i}(x, y)$ ,  $D_{0y_k}^{\alpha} u(x, y_k) \in C(D)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках  $(x, y) \in D$ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $0 < \alpha_k < 1$ ,  $\tau_k(x, y_{(k)}) \in C(\mathbb{R}^n \times \bar{T}_{(k)})$ ,  $f(x, y) \in C(\bar{D})$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $f(x, y)$  удовлетворяет условию Гельдера, и выполняются соотношения

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \tau_k(x, y_{(k)}) \exp\left(-\rho|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0, \quad 1 \leq k \leq m; \quad (2)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x, y) \exp\left(-\rho|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0, \quad (3)$$

где  $\rho < (1 - \beta)(\beta/T^*)^{\beta/(1-\beta)}$ ,  $\beta = \alpha/2$ ,  $\alpha = \max_{1 \leq k \leq m} \alpha_k$ ,  $T^* = \max_{1 \leq k \leq m} T_k$ . Тогда функция  $u = u(x, y)$ , определенная равенством

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^m \int_{Y_{(k)}} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k(\xi, \eta_k) \Gamma(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\eta_k=0} d\xi d\eta_{(k)} + F(x, y; f),$$

где

$$F(x, y; f) = \int_Y \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (4)$$

а  $\Gamma(x, y, \xi, \eta)$  — фундаментальное решение уравнения (1), является регулярным решением уравнения (1) ( $\partial^{\alpha_k} / \partial y_k^{\alpha_k} = D_{0y_k}^{\alpha_k}$ )

и удовлетворяет условиям

$$\lim_{y_k \rightarrow 0} D_{0y_k}^{\alpha_k - 1} u(x, y) = \tau_k(x, y_{(k)}), \quad 1 \leq k \leq m, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Решение задачи (1), (5) единственно в классе функций, удовлетворяющих для некоторой положительной константы  $\sigma$  условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, y) \exp\left(-\sigma|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0. \quad (6)$$

3. В случае производной Капуто регулярным решением уравнения (1)  $(\partial^{\alpha_k} / \partial y_k^{\alpha_k} = \partial_{0y_k}^{\alpha_k})$  в области  $D$  назовем функцию  $u(x, y)$  из класса  $u(x, y) \in C(\bar{D})$ ,  $u_{x_i x_i}(x, y)$ ,  $\partial_{0y_k}^{\alpha} u(x, y_k) \in C(D)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , удовлетворяющую уравнению (1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть  $0 < \alpha_k < 1$ ,  $\tau_k(x, y_{(k)}) \in C(\mathbb{R}^n \times \bar{T}_{(k)})$ ,  $f(x, y) \in C(\bar{D})$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $f(x, y)$  удовлетворяет условию Гельдера, и выполняются соотношения (2) и (3). Тогда функция  $u = u(x, y)$ , определенная равенством

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^m \int_{Y_{(k)}} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_k(\xi, \eta_k) D_{y_k \eta_k}^{\alpha_k - 1} \Gamma(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\eta_k=0} d\xi d\eta_{(k)} + F(x, y; f),$$

где  $F(x, y; f)$  задано соотношением (4), является регулярным решением уравнения (1)  $(\partial^{\alpha_k} / \partial y_k^{\alpha_k} = \partial_{0y_k}^{\alpha_k})$  и удовлетворяет условиям

$$\lim_{y_k \rightarrow 0} u(x, y) = \tau_k(x, y_{(k)}), \quad 1 \leq k \leq m, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Решение задачи (1), (7) единственно в классе функций, удовлетворяющих условию (6).

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.
2. Wyss W. The fractional diffusion equation // J. Math. Phys., 1986. — Vol. 27, No. 11. P. 2782–2785.
3. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения, 1990. — Т. 26, № 4. — С. 660–770.
4. Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени // Докл. Адыгской (Черкесской) Международ. акад. наук, 1994. — Т. 1, № 1. — С. 17–18.

5. *Mainardi F.* The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // *Appl. Math. Lett.*, 1996. — Vol 9, No. 6. — P. 23–28.
6. *Псху А.В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2005. — Т. 8, № 1. — С. 26–31.
7. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005. — 199 с.
8. *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана-Лиувилля // Докл. АН, 2006. — Т. 406, № 1. — С. 12–16.

*НИИ прикладной математики и автоматизации*

*Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик*

*pskhu@mail1333.com*

УДК 517.956

***Л. С. Пулькина***

## **ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ИХ СВЯЗИ С ОБРАТНЫМИ ЗАДАЧАМИ**

Нелокальные задачи для параболических и гиперболических уравнений весьма активно изучаются в настоящее время. Одним из классов нелокальных задач, вызывающих интерес для исследователей, является класс задач с нелокальными интегральными условиями. Заметим, что из физических соображений условия такого вида совершенно естественны и возникают при математическом моделировании в тех случаях, когда невозможно получить информацию о происходящем процессе на границе области его протекания с помощью непосредственных измерений.

Аналогичная ситуация хорошо известна из теории обратных задач. Обратными называют такие задачи теории уравнений с частными производными, в которых наряду с искомым решением некоторые коэффициенты уравнения, либо его правая часть, либо другие параметры входных данных подлежат определению. В таких задачах задаются дополнительные условия, которые могут быть получены, например, из информации о состоянии среды в определенный момент времени, либо дополнительная информация поступает в виде некоторых средних значений каких-либо физических характеристик и в математической модели изучаемого процесса может быть