V. A. Sharafutdinov, Convex sets in a manifold of nonnegative curvature,
Mat. Zametki, 1979, Volume 26, Issue 1, 129–136

https://www.mathnet.ru/eng/mzm8386

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

О ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ В МНОГООБРАЗИИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

В. А. Шарафутдинов

Множество C риманова многообразия M называется выпуклым, если для любых двух точек p, $q \in C$ любая кратчайшая, соединяющая эти точки, лежит целиком в C. C называется локально выпуклым, если каждая точка $p \in C$ обладает такой окрестностью U, что $U \cap C$ выпукло. Всякое замкнутое, локально выпуклое множество $C \subset M$, рассматриваемое с топологией, индуцированной из M, является топологическим многообразием с (возможно пустым) краем ∂C, причем $C \setminus \partial C$ является вполне геодезическим подмногообразием в M.

Пусть M — риманово многообразие неотрицательной кривизны, C — связное, компактное, локально выпуклое множество в M. Если $\partial C \neq \varnothing$, то можно рассмотреть функцию f: $C \to R$ расстояния до края, т. е. функцию, определенную формулой $f(p) = \rho(p, \partial C)$, где ρ — внутренняя метрика на C, индуцированная метрикой M (т. е. $\rho(p, q)$ для p, $q \in C$ определяется как точная нижняя грань длин кривых, лежащих в C и соединяющих p и q). Как известно [1], f является геодезически выпуклой, т. е. для любой геодезической γ: $[0, 1] \to C$ функция $f \circ \gamma$ выпукла (вверх). В частности, множество C^1, состоящее из точек, на которых f принимает максимальное значение, абсолютно выпукло в C, т. е. любая геодезическая, лежащая в C, концы которой принадлежат C^1, лежит целиком в C^1. Отсюда вытекает, что C^1 связно, локально выпукло и внутренняя метрика множества C^1 совпадает с ρ. Очевидно, $\dim C^1 < \dim C$. Если $\partial C^1 \neq \varnothing$, то к C^1 снова применима эта конструкция. Рассуждая по индукции, получим последовательность компактных, локально выпуклых множеств

$$C = C^0 \supset C^1 \supset \ldots \supset C^{n+1} = S \qquad (1)$$

таких, что $\dim C^{i+1} < \dim C^i$ $(i = 0, \ldots, n)$, $\partial S = \varnothing$, т. е. S является вполне геодезическим подмногообразием в M. Следуя Дж. Чигеру и Д. Громолу [1], будем называть S душой множества C. Если $\partial C = \varnothing$, то полагаем $S = C$. В этой заметке будут доказаны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть C, C_0 — два компактных, связных, локально выпуклых множества в римановом многообразии неотрицательной кривизны M; S, S_0 — их души; NS, NS_0 — нормальные расслоения подмногообразий S и S_0 в M. Если $S_0 \subset C \subset C_0$ и $\dim S_0 = \dim S$, то существует такая изометрия h: $S_0 \to S$, что расслоение $h^*(NS)$ изоморфно NS_0.*

Другими словами, эта теорема утверждает существование коммутативного квадрата

$$\begin{array}{ccc} NS_0 & \xrightarrow{\lambda} & NS \\ {\scriptstyle p_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ S_0 & \xrightarrow{h} & S \end{array}$$

в котором p_0, p — проекции нормальных расслоений, h — изометрия риманова многообразия S_0 на S, а λ — диффеоморфизм, линейный на слоях.

Замечание. Из включений $S_0 \subset C \subset C_0$ легко следует, что $\dim S_0 \leqslant \dim S$. Возможно, из этих включений вытекает и равенство $\dim S_0 = \dim S$, однако доказательство этого автору не известно.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1, и пусть дополнительно известно, что $S_0 \neq S$. Тогда расслоение NS_0 имеет ненулевое параллельное (в смысле связности Леви — Чивита на M) сечение.*

Пусть теперь M — полное, открытое многообразие неотрицательной кривизны. Душой M Чигер и Громол назвали компактное, вполне геодезическое подмногообразие S, получаемое с помощью некоторой специальной конструкции, приводить которую мы здесь не будем. Для нас важны лишь следующие свойства S:

1) Существует диффеоморфизм M на пространство нормального расслоения NS, тождественный на S [2].

2) Для любого компактного множества $B \subset M$ можно указать связное, компактное, локально выпуклое множество $C \subset M$, содержащее B и такое, что S является душой C в смысле сформулированного выше определения.

Конструкция души S содержит некоторый элемент произвола, так что, вообще говоря, душа многообразия M не единственна. Из теорем 1 и 2 немедленно вытекают следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть S_0 и S — две души полного открытого многообразия неотрицательной кривизны M. Тогда существует диффеоморфизм M на себя, который S_0 отображает изометрично на S.*

ТЕОРЕМА 4. *Пусть S — душа полного открытого многообразия неотрицательной кривизны M. Для того чтобы S была единственной душой M, достаточно, чтобы нормальное расслоение NS не допускало ненулевого параллельного сечения.*

Основным инструментом при доказательстве теоремы 1 будет нам служить теорема 3 работы [3], доказательство которой приведено в [4]. Отметим одновременно, что в формулировке этой теоремы в [3] допущена неточность, а именно, в число ее утверждений должно быть включено следующее: 3) отображение φ_t тождественно на C_t. Для доказательства нам понадобятся также следующие два утверждения общего характера.

ЛЕММА 1. *Пусть X — компактное многообразие без края. Любое непрерывное, гомотопное тождественному отображение f: $X \to X$ сюръективно.*

ЛЕММА 2. *Пусть X — компактное метрическое пространство с метрикой ρ. Если f: $X \to X$ — сюръективное отображение, удовлетворяющее условию*

$$\rho(f(p), f(q)) \leqslant \rho(p, q) \quad (p, q \in X),$$

то f — изометрия.

Лемма 1 следует из того, что если бы f не было сюръективным, то его степень была бы равна нулю, в то время как степень любого гомотопного тождественному отображения равна единице. Лемма 2 следует из [5, гл. 9, § 2, упр. 11].

Доказательство теоремы 1. Для множества C построим последовательность (1) компактных, локально выпуклых множеств, как описано выше. Для каждого $i = 0, \ldots, n$ определим функцию f_i: $C^i \to R$

расстояния до края, т. е. $f_i(p) = \rho(p, \partial C^i)$, где ρ — внутренняя метрика на C. Положим $m_i = \sup f_i$, $m = m_0 + \ldots + m_n$. Тогда $C^{i+1} = f_i^{-1}(m_i)$. Функция f_i удовлетворяет всем условиям теоремы 3 работы [3]. Пусть

$$\varphi_t^i\colon C^i \to C_t^i = \{p \in C^i \mid f_i(p) \geqslant t\} \quad (t \in [0, m_i])$$

— семейство отображений существование которого утверждает эта теорема. Для каждого $t \in [0, m]$ определим теперь отображение $\varphi_t\colon C \to C$ в соответствии с формулами

$$\varphi_t = \varphi_t^0 \text{ для } t \in [0, m_0],$$

$$\varphi_{m_0+\ldots+m_{i-1}+t} = \varphi_t^i \circ \varphi_{m_0+\ldots+m_{i-1}} \text{ для } t \in [0, m_i], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Семейство отображений φ_t обладает следующими свойствами:

i) φ_t не увеличивает расстояний, т. е.

$$\rho(\varphi_t(p), \varphi_t(q)) \leqslant \rho(p, q) \quad (p, q \in C). \tag{2}$$

ii) Отображение $\Phi\colon C \times [0, m] \to C$, определенное формулой $\Phi(p, t) = \varphi_t(p)$, непрерывно.

iii) $\varphi = \varphi_m$ отображает C на S и тождественно на S.

iv) Для $t \in [0, m_i]$ отображение $\varphi_{m_0+\ldots+m_{i-1}+t}$ тождественно на C_t^i, в частности, φ_0 — тождественное отображение множества C.

Аналогично отображению $\varphi = \varphi_m\colon C \to S$ можно построить отображение $\psi\colon C_0 \to S_0$, тождественное на S_0 и удовлетворяющее условию

$$\rho_0(\psi(p), \psi(q)) \leqslant \rho_0(p, q) \quad (p, q \in C_0), \tag{3}$$

где ρ_0 — внутренняя метрика на C_0.

Так как $C \subset C_0$, то

$$\rho_0(p, q) \leqslant \rho(p, q) \quad (p, q \in C). \tag{4}$$

Заметим теперь, что на S_0 метрики ρ и ρ_0 совпадают. Действительно, пусть $p, q \in S_0$. Так как C_0 замкнуто и локально выпукло, то существует геодезическая γ длины $\rho_0(p, q)$, лежащая в C_0 и соединяющая p и q. Поскольку S_0 абсолютно выпукло в C_0, то γ лежит в S_0. А так как $S_0 \subset C$, то отсюда следует обратное неравенство $\rho(p,q) \leqslant \rho_0(p, q)$. Итак,

$$\rho_0(p, q) = \rho(p, q) \quad (p, q \in S_0). \tag{5}$$

Обозначим теперь через h_t: $S_0 \to C$ $(t \in [0, m])$ ограничение отображения φ_t на S_0. Зафиксируем некоторое $t \in [0, m]$ и рассмотрим отображение $\psi \circ h_t$: $S_0 \to S_0$. Из (2) — (5) получаем, что для любых $p, q \in S_0$

$$\rho_0 (\psi(h_t(p)), \psi (h_t(q))) \leqslant \rho_0 (h_t (p), h_t (q)) \leqslant$$
$$\leqslant \rho (h_t (p), h_t (q)) \leqslant \rho (p, q) = \rho_0 (p, q). \quad (6)$$

Отображение $\psi \circ h_t$ гомотопно тождественному, соответствующую гомотопию дает семейство $\psi \circ h_{t'}$ $(t' \in \in [0, t])$. Применяя леммы 1 и 2, получаем, что для любого $t \in [0, m]$ отображение $\psi \circ h_t$ является изометрией и в (6) везде имеет место знак равенства. Следовательно, метрики ρ и ρ_0 совпадают на $S_t = h_t (S_0)$ и h_t является изометрией S_0 на S_t. Поскольку $S_m \subset S$ и $\dim S_0 = \dim S$, то $S_m = S$ и отображение $h = h_m$ является изометрией S_0 на S.

Из того, что S_0 — вполне геодезическое подмногообразие, а h_t — изометрия S_0 на S_t, следует, как легко видеть, что S_t — вполне геодезическое подмногообразие в M, а отображение h_t — гладкое. Пусть π_0: $TS_0 \to S_0$, π: $TM \to M$ — касательное расслоения многообразий S_0 и M соответственно. Определим отображение g: $TS_0 \times \times [0, m] \to TM$ формулой $g (v, t) = (h_t)_* v$, где $(h_t)_*$ — дифференциал отображения h_t. Докажем, что g непрерывно. Действительно, поскольку g линейно на слоях расслоения

$$\pi_0 \times 1\colon\ TS_0 \times [0, m] \to S_0 \times [0, m],$$

то достаточно установить непрерывность g в некоторой окрестности нулевого сечения этого расслоения. А поскольку отображение $\pi \times \exp$: $TM \to M \times M$ является диффеоморфизмом в некоторой окрестности нулевого сечения касательного расслоения, то для доказательства непрерывности g достаточно установить, что отображения $\pi \circ g$ и $\exp \circ g$ непрерывны. Непрерывность последних двух отображений вытекает из коммутативности следующих квадратов:

$$\begin{array}{ccc} TS_0 \times [0, m] & \xrightarrow{g} & TM \\ {\scriptstyle \pi_0\times 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S_0 \times [0, m] & \xrightarrow{H} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} TS_0 \times [0, m] & \xrightarrow{g} & TM \\ {\scriptstyle \exp\times 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ S_0 \times [0, m] & \xrightarrow{H} & M \end{array} \quad (7)$$

где непрерывное отображение H определено формулой $H(p, t) = h_t(p)$. Коммутативность первого квадрата очевидна, а второго — следует из того, что h_t является изометрией.

Для завершения доказательства отметим, что, как известно [6], два гладких векторных расслоения изоморфны в категории гладких расслоений тогда и только тогда, когда они изоморфны в категории непрерывных векторных расслоений. Таким образом, достаточно установить изоморфность NS_0 и $h^*(NS)$ как непрерывных векторных расслоений. А для этого в свою очередь достаточно построить непрерывное векторное расслоение над $S_0 \times \times [0, m]$, ограничение которого на $S_0 \times 0$ изоморфно NS_0, а ограничение на $S_0 \times m$ изоморфно $h^*(NS)$ [7, гл. 3, следствие 4.6]. Обозначим для краткости через ξ векторное расслоение $\pi_0 \times 1$: $TS_0 \times [0, m] \to S_0 \times \times [0, m]$, а через τ расслоение π: $TM \to M$. Как видно из (7), пара (g, H) является морфизмом ξ в τ и, следовательно [7, гл. 2, предложение 5.5], определяет $(S_0 \times [0, m])$ — морфизм u: $\xi \to H^*(\tau)$. Из того, что h_t — изометрия, вытекает, что u является мономорфизмом и, следовательно [8, лемма 1.3.1], определено фактор-расслоение $H^*(\tau)/u(\xi)$. Очевидно, что ограничение этого расслоения на $S_0 \times 0$ изоморфно NS_0, а ограничение на $S_0 \times m$ изоморфно $h^*(NS)$. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Будем использовать обозначения из доказательства теоремы 1. Рассмотрим последовательность (1) и положим $k = \max \{i \mid S_0 \subset C^i\}$. Докажем, что функция f_k постоянна на S_0. Действительно, поскольку S_0 связно и вполне геодезично, то для любых двух точек $p, q \in S_0$ найдется геодезическая γ: $R \to S_0$, проходящая через эти точки. Функция $f_k \circ \gamma$ выпукла и ограничена и, следовательно, постоянна, т. е. $f_k(p) = f_k(q)$. Обозначим через μ значение f_k на S_0 и положим $t_0 = m_0 + \ldots + m_{k-1} + \mu$. Так как $S_0 \not\subset C^{k+1}$, то $\mu < m_k$.

Напомним [4], что в каждой точке $p \in C^k$, для которой $f_k(p) < m_k$, определен ненулевой вектор $\nabla f_k(p)$ — обобщенный градиент выпуклой функции f_k. Поскольку f_k постоянна на S_0, то, как следует из леммы 3 работы [4], $\nabla f_k(p) \in N_p S_0$ для любой точки $p \in S_0$. Определим сечение x: $S_0 \to NS_0$, полагая $x(p) = \nabla f_k(p) / | \nabla f_k(p) |^2$.

Покажем, что x является искомым параллельным сечением.

Из сформулированного выше свойства iv) следует, что отображение h_t тождественно для всех $t \in [0, t_0]$. Кроме того, согласно определению отображения φ_t^k, приведенному в [4], для любой точки $p \in S_0$ кривая φ_p: $[t_0, m] \to C$, определяемая формулой $\varphi_p(t) = h_t(p)$, имеет в точке t_0 правый касательный вектор, равный $x(p)$.

Зафиксируем точку $p \in S_0$ и выберем такую окрестность U точки p в M, чтобы любые две точки из U соединяла единственная лежащая в U геодезическая, гладко зависящая от своих концов. Пусть γ: $[0, 1] \to S_0$ — произвольная геодезическая, лежащая в U. Выберем гладкие кривые c_0, c_1: $[t_0, t_0 + \varepsilon) \to U$ так, чтобы $c_i(t_0) = \gamma(i)$, $\dot{c}_i(t_0) = x(\gamma(i))$ $(i = 0, 1)$ и для каждого $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon)$ рассмотрим геодезическую γ_t: $[0, 1] \to U$, для которой $\gamma_t(i) = c_i(t)$ $(i = 0, 1)$. Отображение V: $[0, 1] \times [t_0, t_0 + \varepsilon) \to U$, определяемое формулой $\mathrm{V}(s, t) = \gamma_t(s)$, является геодезической вариацией γ, и, следовательно, поле $y(s) = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}(s, t_0)$ — поле Якоби вдоль γ. С другой стороны, поскольку обе кривые $\varphi_{\gamma(i)}$ и c_i выходят из одной точки и имеют общий касательный вектор в этой точке, то

$$\rho(\varphi_{\gamma(i)}(t_0 + t), c_i(t_0 + t)) = o(t) \quad (i = 0, 1). \tag{8}$$

Так как отображение h_t — изометрия, то кривая $\bar{\gamma}_t$: $[0, 1] \to U$, определенная формулой $\bar{\gamma}_t(s) = h_t(\gamma(s)) = \varphi_{\gamma(s)}(t)$, является геодезической для любого $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon)$. Так как в силу (8) концы геодезических γ_t и $\bar{\gamma}_t$ близки, то и сами эти геодезические близки, т. е.

$$\rho(\mathrm{V}(s, t_0 + t), \varphi_{\gamma(s)}(t_0 + t)) = o(t) \ (s \in [0, 1]).$$

Это равенство означает, что кривые $\varphi_{\gamma(s)}$ и $t \to \mathrm{V}(s, t)$ имеют общий касательный вектор в точке t_0, т. е. что $x(\gamma(s)) = y(s)$. Тем самым мы установили, что для любой геодезической γ: $R \to S_0$ поле $x(\gamma(s))$ является якобиевым вдоль γ. Отсюда вытекает, в частности, что функция $|x(p)|$ непрерывна и, следовательно, ограничена на S_0.

Снова рассмотрим произвольную геодезическую γ: $R \to S_0$ и положим $y(s) = x(\gamma(s))$. Поле $y(s)$ удовлетворяет уравнению Якоби

$$y'' + R(y, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Как следует из теоремы 3 работы [1], второе слагаемое в левой части этого уравнения тождественно равно нулю (в [1] эта теорема доказана для абсолютно выпуклого множества, однако это доказательство с очевидными изменениями проходит и для локально выпуклого множества). Таким образом, из этого уравнения следует, что поле y' параллельно вдоль γ. Если бы $y' \neq 0$, то из равенства

$$\langle y, y\rangle'' = 2\langle y', y'\rangle + 2\langle y, y''\rangle = 2\langle y', y'\rangle = \text{const} > 0$$

мы получили бы, что функция $|y(s)|$ неограничена на R, что противоречило бы ранее установленному факту. Следовательно, $y' \equiv 0$ и тем самым теорема доказана.

Новосибирский государственный
педагогический институт

Поступило
3.V.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Cheeger J., Gromoll D., On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, Ann. of Math., 96, № 3 (1972), 413—443.
[2] Шарафутдинов В. А., Полные открытые многообразия неотрицательной кривизны, Сиб. матем. ж., 15, № 1 (1974), 177—191.
[3] Шарафутдинов В. А., Радиус инъективности полного открытого многообразия неотрицательной кривизны, Докл. АН СССР, 231, № 1 (1976), 46—48.
[4] Шарафутдинов В. А., Теорема Погорелова — Клингенберга для многообразий, гомеоморфных R^n, Сиб. матем. ж., 18, № 4 (1977), 915—925.
[5] Бурбаки Н., Общая топология, Использование вещественных чисел в общей топологии, М., «Наука», 1975.
[6] Milnor J., Lectures on Differential Topology Prinseton, N. Y., Prinseton University Press, 1958.
[7] Хьюзмоллер Д., Расслоение пространства, М., «Мир», 1970.
[8] Атья М., Лекции по K-теории, М., «Мир», 1967.