



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Аверьянов, Усреднение решения задачи Дирихле для системы Навье–Стокса с быстроосциллирующей правой частью,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 5, 89–94

<https://www.mathnet.ru/vmumm2060>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

27 апреля 2025 г., 20:11:54



УДК 517.954

А. Н. Аверьянов

УСРЕДНЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА С БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области Q под действием векторного поля быстроосциллирующих массовых сил:

$$\begin{cases} -\nu \nabla u_\varepsilon + (u_\varepsilon)_k \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} + \nabla p_\varepsilon = f(x, x/\varepsilon), \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, \\ u_\varepsilon|_{\partial Q} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$Q \subset \mathbb{R}^n, \partial Q \in C^\infty, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], x \in Q, \xi = x/\varepsilon,$$

$$\Pi \equiv (0, 1)^n, f(x, \xi) \in C^\infty(\bar{Q} \times \mathbb{R}^n),$$

вектор-функция f 1-периодична по ξ .

Следуя [1], введем следующие объекты:

$$H(Q) \equiv \{u \in (H_0^1(Q))^n, \operatorname{div} u = 0\},$$

$$\|u\|_{H(Q)} \equiv \|\nabla u\|_{L_2(Q)};$$

$H^*(Q)$ — пространство, сопряженное к $H(Q)$;

μ — наименьшее собственное значение оператора Лапласа в области Q с нулевым условием Дирихле.

Согласно [1], если ν, f и Q таковы, что выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} (4/3)^{3/4} \mu^{-1/4} \nu^{-2} \|f(x, x/\varepsilon)\|_{H^*(Q)} < 1, n=3; \\ (2/\mu)^{1/2} \nu^{-2} \|f(x, x/\varepsilon)\|_{H^*(Q)} < 1, n=2, \end{cases} \quad (2)$$

то задача (1) имеет единственное решение

$$u_\varepsilon \in C^\infty(\bar{Q}), p_\varepsilon \in C^\infty(\bar{Q}) \cap L_2(Q)/\mathbb{R}.$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{H(Q)} \leq \nu^{-1} \|f(x, x/\varepsilon)\|_{H^*(Q)}. \quad (3)$$

Далее рассматриваются следующие задачи:
усредненная

$$\begin{cases} -\nu \Delta u_0 + (u_0)_k \frac{\partial u_0}{\partial x_k} + \nabla p_0 = \langle f \rangle \equiv \int_{\Pi} f(x, \xi) d\xi, \\ \operatorname{div} u_0 = 0, \\ u_0|_{\partial Q} = 0; \end{cases} \quad (4)$$

периодическая (на ячейке Π)

$$\begin{cases} -\nu \Delta_\xi B(x, \xi) + \nabla_\xi A(x, \xi) = \tilde{f}(x, \xi) \equiv f(x, \xi) - \langle f \rangle, \\ \operatorname{div}_\xi B(x, \xi) = 0, \\ B(x, \xi), A(x, \xi) \text{ 1-периодичны по переменной } \xi, \\ \langle B(x, \xi) \rangle = 0, \langle A(x, \xi) \rangle = 0; \end{cases} \quad (5)$$

задача, корректирующая граничное условие

$$\begin{cases} -\nu \Delta_{\xi} \tilde{B}(x, \xi) + \nabla_{\xi} \tilde{A}(x, \xi) = 0 \\ \operatorname{div}_{\xi} \tilde{B}(x, \xi) = 0 \\ \tilde{B}(x, \xi)|_{\xi \in \varepsilon^{-1} \partial Q} = B(x, \xi)|_{\xi \in \varepsilon^{-1} \partial Q}. \end{cases} \quad \xi \in \varepsilon^{-1} Q, \quad (6)$$

Задачи (5), (6) параметрически зависят от $x \in \bar{Q}$.
Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(x) &\equiv u_{\varepsilon}(x) - u_0(x), \quad \tilde{p}_0(x) \equiv p_{\varepsilon}(x) - p_0(x), \\ \tilde{u}_2(x, \xi) &\equiv \tilde{u}_0(x) + \varepsilon^2 (\tilde{B}(x, \xi) - B(x, \xi)), \\ \tilde{p}_2(x, \xi) &\equiv \tilde{p}_0(x) + \varepsilon (\tilde{A}(x, \xi) - A(x, \xi)), \\ \hat{B}(x, \xi) &\equiv B(x, \xi) - \tilde{B}(x, \xi), \\ \hat{A}(x, \xi) &\equiv A(x, \xi) - \tilde{A}(x, \xi). \end{aligned}$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. Пусть для $f(x, x/\varepsilon)$ и $\langle f \rangle$ выполнено условие (2), тогда

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_0(x)\|_{H_1(Q)} + \|\tilde{p}_0(x)\|_{L_2(Q)/\mathbb{R}} &= O(\varepsilon), \\ \|\tilde{u}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_2(Q)} + \|\tilde{p}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_1(Q)/\mathbb{R}} &= O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (7)$$

В процессе доказательства нам понадобится теорема, доказательство которой изложено в [2].

Теорема 2. Пусть ограниченная область Q , функция $g(x)$ и вектор-функции $f(x)$, $\varphi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} Q \subset \mathbb{R}^n, \quad \partial Q \in C^{\infty}, \quad m \geq -1, \quad f \in (H_m(Q))^n, \quad \varphi(x) \in (H_{m+3/2}(\partial Q))^n, \\ g \in H_{m+1}(Q), \quad \int_Q g dx = \int_{\partial Q} (\varphi, n) ds. \end{aligned}$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи Стокса

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f & \text{в } Q, \\ \operatorname{div} u = g \\ u|_{\partial Q} = \varphi, \end{cases}$$

при этом $u \in (H_{m+2}(Q))^n$, $p \in H_{m+1}(Q) \cap L_2(Q)/\mathbb{R}$ и выполнена оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_{m+2}(Q)} + \|p\|_{H_{m+1}(Q)/\mathbb{R}} \leq c(\nu, m, Q) (\|f\|_{H_m(Q)} + \\ + \|g\|_{H_{m+1}(Q)} + \|\varphi\|_{H_{m+3/2}(\partial Q)}). \end{aligned} \quad (8)$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся технические леммы.

Лемма 1. Периодическое подпространство вектор-функций с нулевым средним из $(L_2(\mathbb{R}^n))^n$ представимо в виде прямой суммы двух периодических подпространств $(L_2(\mathbb{R}^n))^n$, содержащих соответственно потенциальные и соленоидальные компоненты, обладающие нулевым средним.

Доказательство леммы 1 непосредственно следует из утверждения теоремы Вейля—Гельмгольца о разложении векторного поля на потенциальную и соленоидальную составляющие.

З а м е ч а н и е 1. Вектор-функция $\tilde{f}(x, \xi)$ естественным образом представима в виде ряда Фурье по элементам системы

$$X_\alpha(\xi) \equiv \exp(2\pi i \langle \alpha, \xi \rangle),$$

здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $\langle \alpha, \xi \rangle \equiv \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k$, $\alpha_k \in \mathbf{Z}$, $i^2 = -1$.

При этом коэффициенты разложения суть гладкие (по x) функции, которые вместе со всеми своими производными мажорируются по модулю любой отрицательной степенью собственного мультииндекса, тем самым обеспечивается равномерная сходимость соответствующих рядов в $\bar{Q} \times \mathbf{R}^n$.

Л е м м а 2. Существует единственное решение задачи (5) и выполнены условия:

$$1) |D_x^\beta B(x, x/\varepsilon)| + |D_x^\beta A(x, x/\varepsilon)| = O(\varepsilon^{-k}), \quad (9)$$

где β — мультииндекс, $|\beta| = k$;

$$2) \|B(x, x/\varepsilon)\|_{H_{k-1/2}(\partial Q)} = O(\varepsilon^{-k+1/2}), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Доказательство. Согласно замечанию 1 утверждение леммы достаточно доказать для решения задачи (5) в правой части вида $f_{\alpha j}(\xi) = X_\alpha(\xi) \bar{e}_j$, где \bar{e}_j — единичный вектор вдоль оси x_j .

В результате имеем вспомогательную задачу

$$\begin{cases} -\nu \Delta_\xi B + \nabla_\xi A = f_{\alpha j}(\xi), \\ \operatorname{div}_\xi B = 0, \\ B(\xi), A(\xi) \text{ 1-периодичны; } \langle B(\xi) \rangle = 0 \text{ и } \langle A(\xi) \rangle = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Далее, в соответствии с утверждением леммы 1 $f_{\alpha j}(\xi) = \nabla_\xi \Phi + h(\xi)$,

где функция $\Phi(\xi)$ и вектор-функция $h(\xi)$ 1-периодичны, $\operatorname{div}_\xi h = 0$, $\langle h(\xi) \rangle = 0$.

Легко видеть, что задача (10) расщепляется на две периодические задачи для скорости и давления:

$$\begin{cases} -\nu \Delta_\xi B = h(\xi), \\ \langle B(\xi) \rangle = 0; \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \nabla_\xi A(\xi) = \nabla_\xi \Phi(\xi), \\ \langle A(\xi) \rangle = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Существует единственное периодическое решение $B(\xi)$, $A(\xi)$ задач (11) и (12), и для него справедлива оценка (9₁).

Для доказательства оценки (9₂) в области Q рассмотрим гладкую функцию $\tau(x)$, удовлетворяющую следующим условиям: $\tau(x)$ равна нулю вне ε -окрестности границы ∂Q , $\tau|_{\partial Q} = 1$, $|\tau(x)| \leq 1$, $|D^\beta \tau| \leq c\varepsilon^{-|\beta|}$ для любого мультииндекса β : $|\beta| \leq k$.

Введем функцию $v(x) = B(x/\varepsilon) \tau(x)$, для нее выполнены условия $v|_{\partial Q} = B(x/\varepsilon)|_{\partial Q}$, $|D_x^\beta v| \leq c\varepsilon^{-|\beta|}$, $\|v\|_{H_k(Q)} = O(\varepsilon^{-k+1/2})$. В результате имеем

$$\|B(x/\varepsilon)\|_{H_{k-1/2}(\partial Q)} \equiv \inf_{h=B|_{x \in \partial Q}} \|h\|_{H_k(Q)} \leq \|v\|_{H_k(Q)} = O(\varepsilon^{-k+1/2}).$$

Л е м м а 3. Существует единственное решение задачи (6), причем

$$\|\tilde{B}(x, x/\varepsilon)\|_{H_k(Q)} + \varepsilon^{-1} \|\tilde{A}(x, x/\varepsilon)\|_{H_{k-1}(Q)} = O(\varepsilon^{-k+1/2}). \quad (13)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} -\nu \Delta_{\xi} \tilde{B}(\xi) + \nabla_{\xi} \tilde{A}(\xi) = 0 \\ \operatorname{div}_{\xi} \tilde{B}(\xi) = 0 \\ \tilde{B}|_{\xi \in \varepsilon^{-1} \partial Q} = B|_{\xi \in \varepsilon^{-1} \partial Q}, \end{cases} \quad \text{в } \varepsilon^{-1} Q, \quad (14)$$

где $B(\xi)$ — решение задачи (10).

Из утверждения теоремы 2 непосредственно следует как существование и единственность решения этой задачи, так и интегральная оценка

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \|\tilde{B}(x/\varepsilon)\|_{H_k(Q)} + \varepsilon \|\tilde{A}(x/\varepsilon)\|_{H_{k-1}(Q)/\mathbb{R}} &\leq \\ &\leq c(k, \nu, Q) \varepsilon^2 \|B(x/\varepsilon)\|_{H_{k-1/2}(\partial Q)}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

откуда (с учетом (9₂)) получаем оценку (13) для решения задачи (14) и, следовательно, для (6).

Лемма 4. Пусть $f(x, \xi) \in C^{\infty}(\bar{Q} \times \mathbb{R}^n)$, f 1-периодична по ξ и $\langle f(x, \xi) \rangle = 0$. Тогда имеет место оценка

$$\|f(x, x/\varepsilon)\|_{H_{-1}(Q)} = O(\varepsilon). \quad (15)$$

Доказательство. По определению

$$\|f(x, x/\varepsilon)\|_{H_{-1}(Q)} = \sup_w \left| \int_Q (f(x, x/\varepsilon), w(x)) dx \right|, \quad (16)$$

$$w \in (H_0^1(Q))^n, \quad \|w\|_{H_1(Q)} = 1.$$

С учетом замечания 1 о гладкости коэффициентов Фурье функции $\tilde{f}(x, \xi)$ и тождества $X_{\alpha}(x/\varepsilon) = (2\pi i \alpha_j)^{-1} \varepsilon D_{x_j} \exp(2\pi i \langle \alpha, x/\varepsilon \rangle)$ по формуле Грина в (16) для каждого слагаемого ряда Фурье дифференцирование перебрасывается на пробную функцию $w(x)$, и полученный интеграл по неравенству Коши—Буняковского оценивается некоторой постоянной, не зависящей от ε . В результате имеем

$$\left| \int_Q (f(x, x/\varepsilon), w(x)) dx \right| \leq c\varepsilon.$$

В [1] доказана следующая

Лемма 5. Для любой функции $u(x)$ из $H_0^1(Q)$, $Q \subset \mathbb{R}^n$, выполнено условие

$$\begin{cases} \|u\|_{L_4(Q)} \leq (4/3)^{3/8} \mu^{-1/8} \|\nabla u\|_{L_2(Q)}, \quad n=3; \\ \|u\|_{L_4(Q)} \leq (2/\mu)^{1/4} \|\nabla u\|_{L_2(Q)}, \quad n=2. \end{cases} \quad (17)$$

Доказательство теоремы 1. Из системы (1) вычтем (4) и, учитывая равенство

$$(u_{\varepsilon})_k \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_k} - (u_0)_k \frac{\partial u_0}{\partial x_k} = (\tilde{u}_0)_k \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k} + (\tilde{u}_0)_k \frac{\partial u_0}{\partial x_k} + (u_0)_k \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k},$$

получим следующую задачу:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \tilde{u}_0 + \nabla \tilde{p}_0 + (\tilde{u}_0)_k \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k} + (u_0)_k \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k} + (\tilde{u}_0)_k \frac{\partial u_0}{\partial x_k} = \tilde{f}(x, x/\varepsilon), \\ \operatorname{div} \tilde{u}_0 = 0, \\ \tilde{u}_0|_{\partial Q} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Умножим первое уравнение в (18) скалярно на \tilde{u}_0 и проинтегрируем по области Q . Применяя формулу Грина к левой части первого равенства, имеем

$$-\int_Q (\Delta \tilde{u}_0, \tilde{u}_0) dx = \|\tilde{u}_0\|_{H(Q)}^2, \quad (19)$$

$$\int_Q (\tilde{u}_0, \nabla \tilde{p}_0) dx = \int_Q (\tilde{u}_0)_k \left(\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k}, \tilde{u}_0 \right) dx = \int_Q (u_0)_k \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k}, u_0 \right) dx \equiv 0. \quad (20)$$

При оценке $\left| \int_Q (\tilde{u}_0)_k \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k}, \tilde{u}_0 \right) dx \right|$ последовательно воспользуемся не-

равенством Гельдера, утверждением леммы 5 и оценкой (3):

$$\left| \int_Q (\tilde{u}_0)_k \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k}, \tilde{u}_0 \right) dx \right| \leq \|\tilde{u}_0\|_{L_4(Q)} \|u_0\|_{H(Q)} \leq c_n^2 v^{-1} \|\langle f \rangle\|_{H^*(Q)} \|\tilde{u}_0\|_{H(Q)}^2. \quad (21)$$

Здесь c_n — константы в оценках (17), причем

$$c_n^2 v^{-1} \|\langle f \rangle\|_{H^*(Q)} = \begin{cases} (4/3)^{3/4} \mu^{1/4} v^{-1} \|\langle f \rangle\|_{H^*(Q)}, & n=3; \\ (2/\mu)^{1/2} v^{-1} \|\langle f \rangle\|_{H^*(Q)}, & n=2. \end{cases} \quad (22)$$

Из (18) — (21) следует, что

$$v \|\tilde{u}_0\|_{H(Q)}^2 \leq \|\tilde{f}(x, x/\varepsilon)\|_{H^*(Q)} \|\tilde{u}_0\|_{H(Q)} + c_n^2 v^{-1} \|\langle f \rangle\|_{H^*(Q)} \|\tilde{u}_0\|_{H(Q)}^2. \quad (23)$$

Учитывая оценки (2) для $\langle f \rangle$ и (22), из (23) получаем

$$\|\tilde{u}_0\|_{H(Q)} \leq c \|\tilde{f}(x, x/\varepsilon)\|_{H^*(Q)}.$$

В силу оценки (15) для \tilde{f} (по лемме 4) находим

$$\|u_0\|_{H(Q)} = O(\varepsilon). \quad (24)$$

Далее, применяя к решению системы (18) интегральную оценку (8) при $m=-1$, устанавливаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}_0\|_{L_2(Q)/\mathbb{R}} &\leq c(v, Q) \left(\|\tilde{f}(x, x/\varepsilon)\|_{H_{-1}(Q)} + \right. \\ &\left. + \left\| (\tilde{u}_0)_k \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k} + (\tilde{u}_0)_k \frac{\partial u_0}{\partial x_k} + (u_0)_k \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k} \right\|_{H_{-1}(Q)} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Легко видеть, что норма второго слагаемого в правой части (25) в силу (24) есть $O(\varepsilon)$. В результате согласно (24) и неравенству Фридрихса для \tilde{u}_0 получаем оценку (7₁):

$$\|\tilde{u}_0(x)\|_{H_1(Q)} + \|\tilde{p}_0(x)\|_{L_2(Q)/\mathbb{R}} = O(\varepsilon).$$

Из системы (18) вычтем (5) и прибавим (6), в результате имеем

$$\begin{cases} -v\Delta \tilde{u}_2(x, x/\varepsilon) + \nabla \tilde{p}_2(x, x/\varepsilon) = f_2(x, \varepsilon) \\ \operatorname{div} \tilde{u}_2(x, x/\varepsilon) = g_2(x, \varepsilon) \\ \tilde{u}_2(x, x/\varepsilon)|_{x \in \partial Q} = 0, \end{cases} \quad \text{в } Q, \quad (26)$$

где

$$f_2(x, \varepsilon) \equiv (\tilde{u}_0)_k \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k} + (\tilde{u}_0)_k \frac{\partial u_0}{\partial x_k} + (u_0)_k \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k} + \\ + (\nu \varepsilon^2 \Delta_x \hat{B}(x, \xi) + 2\nu \varepsilon (\nabla_x, \nabla_\xi) \hat{B}(x, \xi) - \varepsilon \nabla_x \hat{A}(x, \xi))|_{\xi=x/\varepsilon}, \\ g_2(x, \varepsilon) \equiv -\varepsilon^2 (\operatorname{div}_x \hat{B}(x, \xi))|_{\xi=x/\varepsilon}.$$

Используя для системы (26) оценку (8) в случае $m=0$, получаем

$$\|\tilde{u}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_2(Q)} + \|\tilde{p}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_1(Q)/\mathbb{R}} \leq \\ \leq c(\nu, Q) (\|f_2(x, \varepsilon)\|_{L_2(Q)} + \|g_2(x, \varepsilon)\|_{H_1(Q)}). \quad (27)$$

Учитывая оценки (9), (13) для \hat{B} и \hat{A} , тривиальным образом можно показать, что

$$\|g_2(x, \varepsilon)\|_{H_1(Q)} + \left\| f_2(x, \varepsilon) - (\tilde{u}_0)_k \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k} \right\|_{L_2(Q)} = O(\varepsilon). \quad (28)$$

Остается только оценить $\left\| (\tilde{u}_0)_k \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k} \right\|_{L_2(Q)}$ и воспользоваться оценкой (27). С помощью неравенства

$$\max_{x \in \bar{Q}} |\tilde{u}_0|^2 \leq c \|\tilde{u}_0\|_{H_2(Q)}^2$$

находим

$$\left\| (\tilde{u}_0)_k \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_k} \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq c \int_Q |\tilde{u}_0|^2 |\nabla \tilde{u}_0|^2 dx \leq c \|\tilde{u}_0\|_{H_2(Q)}^2 \|\tilde{u}_0\|_{H^1(Q)}^2 \leq \\ \leq c \varepsilon^2 \|\tilde{u}_0\|_{H_2(Q)}^2 \leq c \varepsilon^2 (\|\tilde{u}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_2(Q)}^2 + \varepsilon^4 \|\hat{B}(x, x/\varepsilon)\|_{H_2(Q)}^2) \leq \\ \leq c \varepsilon^2 (1 + \|\tilde{u}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_2(Q)}^2). \quad (29)$$

Подставляя (28), (29) в оценку (27), заключаем, что

$$\|\tilde{u}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_2(Q)} + \|\tilde{p}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_1(Q)/\mathbb{R}} \leq c \varepsilon (1 + \|\tilde{u}_2(x, x/\varepsilon)\|_{H_2(Q)}),$$

откуда и следует оценка (7₂).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
2. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. М., 1981.

Поступила в редакцию
04.07.95