Доказательство. Рассмотрим оператор перехода итерационной схемы (1): $G=E-\tau B^{-1}A$. Следуя [3], вычислим оператор $H=(E-G)^{-1}(E+G)=\tau^{-1}A^{-1}B(2E-\tau B^{-1}A)=\tau^{-1}A^{-1}(2B-\tau A)=((\tau/2)A)^{-1}(B-(\tau/2)A)$. Обозначим

$$L=B-(\tau/2)A. \tag{4}$$

По предположению, $L=L^*>0$. Известно [2], что произведение диссипативного оператора A на самосопряженный положительно определенный оператор L даст устойчивый оператор H, что по соответствующей теореме из [3] достаточно для сходимости итерационного метода (1) в энергетическом пространстве H_L, порожденном оператором L.

Представим оператор A в виде

$$A=S+K=S+K_{\text{в}}+K_{\text{н}}, \tag{5}$$

где $S=S^*$ — симметричная часть, а $K=-K^*$ — кососимметричная часть оператора A, $K_{\text{н}}$ и $K_{\text{в}}$ — операторы, заданные соответственно строго нижней и строго верхней треугольными частями матрицы, определяющей оператор K, причем

$$K_{\text{н}}=-K_{\text{в}}^*. \tag{6}$$

Легко показать, используя равенства (5) и (6), что запись оператора B в виде

$$B=B_0+\tau K_{\text{н}}, \tag{7}$$

где $B_0=B_0^*$ — произвольный оператор, обеспечивает самосопряженность оператора L.

Теорема 2. *Пусть оператор A диссипативен, а оператор B задан равенством* (7). *Тогда итерационная схема* (1) *сходится в H_L, где L определяется равенством* (9) *при условии, что*

$$B_0>(\tau/2)M, \tag{8}$$

а M определяется равенством (10).

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$L=B-(\tau/2)A=(B_0+\tau K_{\text{н}})-(\tau/2)A=$$
$$=B_0+\tau K_{\text{н}}-(\tau/2)S-(\tau/2)K_{\text{в}}-(\tau/2)K_{\text{н}}=B_0-(\tau/2)(S+K_{\text{в}}-K_{\text{н}}). \tag{9}$$

Обозначим

$$M=S+K_{\text{в}}-K_{\text{н}} \tag{10}$$

и потребуем выполнения неравенства (8). Тогда, используя теорему 1, получим утверждение теоремы 2.

Неравенство (8) есть обобщение неравенства (3) на случай, когда оператор A диссипативен, и переходит в него при $A=A^*>0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.—М., 1978.—590 с.
2. Крукиер Л. А. Неявные разностные схемы и итерационный метод их решения для одного класса систем квазилинейных уравнений.—Изв. вузов. Матем., 1979, № 7, с. 41—52.
3. Young D. M. Iterative solution of large linear systems.—Academic Press, New York—London, 1971.

г. Ростов-на-Дону

Поступила
27 V 1980

Л. А. Онегов

УДК 519.64

ОБ ОДНОЙ НАИЛУЧШЕЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С НЕПОДВИЖНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

В теории квадратурных формул для регулярных интегралов задача построения наилучшей (оптимальной) квадратурной формулы для заданного класса функций является хорошо изученной и достаточно разработанной (см., напр., [1]). Для сингулярных интегралов подобные исследования находятся еще в начальной стадии. В работах [2]—[6] получены оптимальные по порядку

квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядрами Гильберта и Коши, но не затрагивался вопрос о построении наилучшей квадратурной формулы.

В данной статье получена одна наилучшая квадратурная формула для сингулярных интегралов с неподвижной особенностью на некоторых заданных классах функций $W_0^{(1)}(M;\ 0,\ 1)$, $H_0^{\alpha}(M;\ 0,\ 1)$ $(0<\alpha\leqslant 1)$. Полученные результаты использованы при приближенном вычислении сингулярных интегралов с неподвижной особенностью, областью интегрирования которых является круг единичного радиуса.

1. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярный интеграл вида

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx. \tag{1}$$

Условие

$$f(0)=0 \tag{2}$$

является необходимым условием существования интеграла (1).

Пусть $\mathfrak{M}$—некоторый класс заданных на [0, 1] и достаточно гладких функций. Для $f(x)\in\mathfrak{M}$ при условии (2) рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx=\sum_{k=0}^{N-1} p_k f(x_k)+R(f), \tag{3}$$

которая задана векторами узлов $X=\{x_k\}$ $(0<x_0<x_1<\ldots<x_{N-1}<1)$ и коэффициентов $P=\{p_k\}$ $(k=0,\ 1,\ldots,\ N-1;\ N$ фиксированное), остаточный член $R(f)=R(f;\ X,\ P)$.

Положим

$$R(\mathfrak{M})=R(\mathfrak{M};\ X,\ P)=\sup_{f\in\mathfrak{M}}|R(f;\ X,\ P)|. \tag{4}$$

$R(\mathfrak{M})$ является точной оценкой остатка квадратурной формулы (3) на классе функций $\mathfrak{M}$. Требуется среди всевозможных квадратурных формул (3) (N фиксированное) найти такую, для которой величина (4) имеет наименьшее значение, т. е. требуется найти величину $E_N(\mathfrak{M})=\inf\limits_{X,P} R(\mathfrak{M};\ X,\ P)$ и указать вектор $(X^*,\ P^*)$ $(X^*=\{x_k\},\ P^*=\{p_k^*\})$, на котором достигается точная нижняя грань $E_N(\mathfrak{M})=R(\mathfrak{M};\ X^*,\ P^*)$.

Также важной задачей является нахождение квадратурных формул, для которых точная нижняя грань на всем классе функций достигается по порядку. В связи с этим квадратурную формулу с векторами узлов $X^*=\{x_k^*\}$ и коэффициентов $P^*=\{p_k^*\}$ назовем оптимальной по порядку на классе функций $\mathfrak{M}$, если $E_N(\mathfrak{M})\asymp R(\mathfrak{M};\ X^*,\ P^*)$ (см. [3]).

Будем рассматривать следующие классы функций: $W^{(1)}(M;\ 0,\ 1)$—класс функций, непрерывных на отрезке [0, 1] и имеющих на нем кусочно-непрерывную производную $f'(x)$, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $|f'(x)|\leqslant M$; $W_0^{(1)}(M;\ 0,\ 1)$—класс функций $f(x)\in W^{(1)}(M;\ 0,\ 1)$ и удовлетворяющих условию (2); $H^{\alpha}(M;\ 0,\ 1)$ $(0<\alpha\leqslant 1)$—класс функций $f(x)$, заданных на отрезке [0, 1] и удовлетворяющих для всех точек x' и x'' этого отрезка неравенству $|f(x')-f(x'')|\leqslant M|x'-x''|^{\alpha}$; $H_0^{\alpha}(M;\ 0,\ 1)$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ — класс функций $f(x)\in H^{\alpha}(M;\ 0,\ 1)$ и удовлетворяющих условию (2).

При постановке экстремальной задачи и определении классов функций мы следовали монографии [1].

2. Построение наилучшей квадратурной формулы

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Среди квадратурных формул* (3) *наилучшей для класса* $W_0^{(1)}(M;\ 0,\ 1)$ *является формула*

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx=\sum_{k=0}^{N-1}\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2 f\left(\frac{(k+1)(k+2)}{(N+1)^2}\right)+R(f). \tag{5}$$

При этом

$$E_N(W_0^1(M;\ 0,\ 1)) = M/(N+1).$$

Утверждение теоремы 1 будет следовать из нахождения минимума интеграла

$$\sup_{f\in W_0^{(1)}(M;\,0,\,1)} |R(f)| = M\int_0^1 \left| -\ln t - \sum_{k=0}^{N-1} p_k K_1(x_k - t)\right| dt,$$

где

$$K_1(u) = \begin{cases} 1, & u > 0; \\ 0, & u < 0 \end{cases}$$

среди всевозможных чисел $\{p_k\}$ и узлов $\{x_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ $(0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < 1$; N фиксированное).

Теорема 2. *Среди квадратурных формул* (3) *наилучшей для класса* $H_0^1(M;\ 0,\ 1)$ *является формула* (5), *причем мера ее приближения на всем классе*

$$E_N(H_0^1(M;\ 0,\ 1)) = M/(N+1).$$

Доказательство теоремы 2 основано на исследовании экстремальной функции из класса $H_0^1(M;\ 0,\ 1)$:

$$\varphi_X = \varphi(x) = \begin{cases} M(x - x_{k-1}), & x_{k-1} \leqslant x \leqslant (x_k + x_{k-1})/2; \\ M(x_k - x), & (x_k + x_{k-1})/2 \leqslant x \leqslant x_k; \\ M(x - x_{N-1}), & x_{N-1} \leqslant x \leqslant 1,\ k = 0, 1, \ldots, N-1,\ x_{-1} = 0, \end{cases}$$

связанной с произвольным вектором узлов $X = \{x_k\}$ и обращающей в нуль квадратурную сумму. Доказывается, что точная нижняя грань достигается на функции $\varphi(x)$, связанной с узлами квадратурной формулы (5).

Теорема 3. *Среди всевозможных квадратурных формул* (3) *оптимальной по порядку на классе функций* $H_0^\alpha(M;\ 0,\ 1)$ $(0 < \alpha < 1)$ *является формула* (5). *При этом*

$$E_N(H_0^\alpha(M;\ 0,\ 1)) \asymp M/N^\alpha.$$

Утверждение теоремы 3 следует из двух вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть* $f(x) \in H_0^\alpha(M;\ 0,\ 1)$ $(0 < \alpha < 1)$. *Тогда для остаточного члена квадратурной формулы* (5) *справедлива оценка*

$$|R(f)| \leqslant \frac{M}{\alpha(N+1)^\alpha}\left(\frac{2}{1+\alpha} + \frac{1}{(N+1)^\alpha}\right), \quad N = 1, 2, \ldots$$

Лемма 2. *На всем классе* $H_0^\alpha(M;\ 0,\ 1)$ $(0 < \alpha < 1)$ *имеет место неравенство*

$$E_N(H_0^\alpha(M;\ 0,\ 1)) \geqslant M/3N^\alpha,\ N = 1,\ 2,\ \ldots$$

3. Применение наилучшей квадратурной формулы к вычислению двумерных сингулярных интегралов с неподвижной особенностью в круге

Наилучшая квадратурная формула (5) может быть использована для вычисления двумерного сингулярного интеграла

$$\iint_S \frac{f(\theta)}{r^2} u(x)\, dx, \quad r = r(0,\ x),$$

где $f(\theta)$—характеристика интеграла, $u(x) = u(x_1, x_2)$ — данная непрерывная плотность, S—единичный круг с центром в начале координат, r и θ—полярные координаты точки $x = (x_1, x_2)$ относительно начала координат. Выполнено необходимое условие существования этого интеграла [7]:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta = 0, \tag{6}$$

Приведем окончательный результат. Положим

$$F_u(r) = \int_0^{2\pi} f(\theta)\, u(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, d\theta, \quad F_u(0) = 0$$

и обозначим через $W_0^{(1)}(M;\ S)$ класс функций $u(x_1,\ x_2)$, непрерывных в круге S и удовлетворяющих условию $F_u(r) \in W_0^{(1)}(M;\ 0,\ 1)$. Аналогичным образом определим класс $H_0^{\alpha}(M;\ S)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

Для непрерывных в круге функций $u(x_1,\ x_2)$ при условии (6) рассмотрим кубатурную формулу специального вида

$$\iint_S \frac{f(\theta)}{r^2}\, u(x)\, dx = \sum_{k=0}^{N-1} p_k F_u(x_k) + R(F_u)\ ^{1)}, \tag{7}$$

которая задана при помощи векторов узлов $X = \{x_k\}$ $(0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < 1)$ и коэффициентов $P = \{p_k\}$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1)$, N фиксированное, остаточный член $R(F_u) = R(F_u;\ X,\ P)$.

Теорема 4.1. *Среди всевозможных кубатурных формул вида* (7) *наилучшей для классов функций* $W_0^{(1)}(M;\ S)$ *и* $H_0^1(M;\ S)$ *является формула*

$$\iint_S \frac{f(\theta)}{r^2}\, u(x)\, dx = \sum_{k=0}^{N-1} \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2 F_u\left(\frac{(k+1)(k+2)}{(N+1)^2}\right) + R(F_u). \tag{8}$$

При этом $E_N(W_0^{(1)}(M;\ S)) = E_N(H_0^1(M;\ S)) = M/(N+1)$.

2. *Среди всевозможных кубатурных формул специального вида* (7) *оптимальной по порядку на классе функций* $H_0^{\alpha}(M;\ S)$ $(0 < \alpha < 1)$ *является формула* (8) *и при этом*

$$E_N(H_0^{\alpha}(M;\ S)) \asymp M/N^{\alpha}.$$

Замечание. Аналогично рассматривается вычисление n-мерных $(n \geqslant 3)$ сингулярных интегралов с неподвижной особенностью по гипершару.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М. Квадратурные формулы.—М., 1974.—223 с.
2. Иванов В. В. Об оптимальных алгоритмах вычисления сингулярных интегралов.—ДАН СССР, 1972, т. 204, № 1, с. 21—24.
3. Габдулхаев Б. Г. Поперечники и оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов.—ДАН СССР, 1977, т. 234, № 3, с. 513—516.
4. Габдулхаев Б. Г. Об оптимальных квадратурных формулах для сингулярных интегралов.—Изв. вузов. Матем., 1978, № 3, с. 24—39.
5. Маковоз Ю. И., Шешко М. А. Об оценке погрешности квадратурной формулы для сингулярного интеграла.—Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. н., 1977, № 6, с. 36—41.
6. Габдулхаев Б. Г., Шарипов Р. Н. Оптимизация квадратурных формул с кратными узлами для сингулярных интегралов.—Изв. вузов. Матем., 1979, № 12, с. 62—66.
7. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.—М., 1962.—254 с.
8. Габдулхаев Б. Г., Онегов Л. А. Кубатурные формулы для сингулярных интегралов.—Изв. вузов. Матем., 1976, № 7, с. 100—105.
9. Пономаренко А. К. О построении кубатурных формул для некоторых двойных сингулярных интегралов.—В сб.: Вопр. вычисл. и прикл. матем. Ташкент, 1978, вып. 51, с. 110—118.

г. Казань

Поступила
21 V 1980

---

1) Кубатурные формулы вида (7) рассматривались в работе автора [8], а также позднее в работе [9].