



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. V. Khovratovich, On cardinality of some subclasses of  
monotone functions,  
*Diskr. Mat.*, 2005, Volume 17, Issue 4, 81–97

<https://www.mathnet.ru/eng/dm131>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read  
and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.80

April 19, 2025, 10:52:35



УДК 519.7

## О мощностях некоторых подклассов монотонных функций

© 2005 г. Д. В. Ховратович

Рассматривается вопрос о числе функций от  $n$  переменных из классов, являющихся пересечениями класса  $M$  монотонных функций с другими предполными классами в трехзначной логике. Получена асимптотика при  $n \rightarrow \infty$  логарифма мощности таких классов.

### 1. Общий подход

Задача оценки числа функций из некоторого класса  $\mathcal{F}$  может быть решена следующим способом.

Каждой функции  $f \in \mathcal{F}$  по некоторому правилу ставится в соответствие набор функций  $\langle f_1, f_2, \dots, f_l \rangle$ . Это соответствие можно описать как отображение

$$\mathcal{P}: \mathcal{F} \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2 \times \dots \times \widehat{\mathcal{F}}_l,$$

где  $\widehat{\mathcal{F}}_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , — некоторые множества функций, символ  $\times$  обозначает взятие декартова произведения множеств. Тогда, если отображение  $\mathcal{P}$  инъективно, то

$$|\mathcal{F}| \leq |\widehat{\mathcal{F}}_1| |\widehat{\mathcal{F}}_2| \dots |\widehat{\mathcal{F}}_l|.$$

Если известны верхние оценки мощности классов  $\widehat{\mathcal{F}}_i$ , то можно легко получить верхнюю оценку мощности  $\mathcal{F}$ .

С учетом уже построенных множеств  $\widehat{\mathcal{F}}_i$ , для получения нижней оценки достаточно, чтобы для некоторого  $k$ ,  $1 \leq k \leq l$ , существовало инъективное отображение  $\mathcal{Q}$ , действующее из  $\widehat{\mathcal{F}}_k$  в  $\mathcal{F}$ . Тогда  $|\mathcal{F}| \geq |\widehat{\mathcal{F}}_k|$ .

### 2. Основные определения

Обозначим через  $E_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , множество  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $n$ -ю декартову степень этого множества обозначим через  $E_k^n$ , а элементы полученного множества будем называть наборами гиперкуба (или просто куба) и представлять в виде  $(a_1, \dots, a_n)$ .

Далее для сокращения записи будем обозначать через  $f(A)$  множество всех значений, принимаемых функцией  $f$  на множестве  $A$ . Множество функций, действующих из  $A$  в  $B$ , будем обозначать  $\{A \rightarrow B\}$ .

**Определение 1.** Пусть  $j \in E_k$ . Тогда назовем  $j$ -подкубом куба  $E_k^n$  с индексом  $N \subset \{1, 2, \dots, n\}$  множество всех таких наборов  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  куба  $E_k^n$ , что

$$\alpha_i = j \iff i \in N, \quad i = 1, \dots, n.$$

Например, 2-подкуб куба  $E_3^3$  с индексом  $\{2, 3\}$  — это множество наборов  $\{(0, 2, 2), (1, 2, 2)\}$ .

**Замечание 1.** Заметим, что число  $j$ -подкубов в кубе  $E_k^n$  не зависит от  $k$  и равно  $2^n$ . Кроме того,  $j$ -подкубы не пересекаются, а в объединении дают весь куб  $E_k^n$ .

**Определение 2.** Частичным порядком  $O$  на множестве  $E_k$  называется двухместное отношение на этом множестве, удовлетворяющее условиям рефлексивности, транзитивности и антисимметричности. Для элементов из  $E_k$ , удовлетворяющих этому отношению, применяется обозначение  $a \leq_O b$ , причем, если  $a \neq b$ , то будем писать  $a < b$ . Если любые два элемента сравнимы по данному порядку, то он называется линейным. В дальнейшем будем рассматривать только линейные порядки.

Введем обозначения для линейных порядков, используемых нами в дальнейшем, пусть

$$O_3: \quad 0 < 1 < 2,$$

$$O_3^0: \quad 0 < 1,$$

$$O_3^2: \quad 1 < 2,$$

$$O'_3: \quad 1 < 0 < 2.$$

**Определение 3.** Пусть на множестве  $E_k$  задан порядок  $O$ , а наборы  $a$  и  $b$  принадлежат множеству  $E_k^n$ . Будем говорить, что набор  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  меньше либо равен набору  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  согласно порядку  $O$  и писать  $a \leq_O b$ , если  $a_i \leq_O b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Легко проверить, что заданное таким образом отношение также является порядком.

**Определение 4.** Пусть на множестве  $E_k$  задан некоторый порядок  $O$ . Функции  $f$ , действующие из  $E_k^n$  в  $E_k$  и такие, что

$$\forall a, b \in E_k^n \quad a \leq_O b \implies f(a) \leq_O f(b),$$

будем называть сохраняющими порядок  $O$ , а класс всех таких функций обозначать  $\{A \rightarrow_O B\}$ .

**Определение 5.** Классом  $M_3(n)$  называется множество функций  $\{E_3^n \rightarrow_{O_3} E_3\}$ . Известно [1], что данный класс является предполным в множестве  $\mathcal{P}_3$  всех функций трехзначной логики.

**Определение 6.** Пусть на множестве  $A$  введен некоторый порядок  $O_1$ , а на множестве  $B$  — некоторый порядок  $O_2$ . Функции  $f$ , действующие из  $A$  в  $B$  и такие, что

$$\forall a, b \in A \quad a \leq_{O_1} b \implies f(a) \leq_{O_2} f(b),$$

будем называть сохраняющими порядок  $O_1 | O_2$ , а класс всех таких функций обозначать  $\{A \rightarrow_{O_1|O_2} B\}$ .

### 3. Класс $M_3(n) \cap U_{\{0\}\{1,2\}}(n)$

**Определение 7.** Классом  $U_{\{0\}\{1,2\}}(n)$  называется множество всех функций трехзначной логики от  $n$  переменных, сохраняющих разбиение  $D = \{0\}\{1, 2\}$  (см. также [1]).

Согласно [1], данный класс является предполным в  $\mathcal{F}_3$ .

**Теорема 1.** Для числа  $\psi_{MU_0}(n)$  функций в классе  $M_3(n) \cap U_{\{0\}\{1,2\}}(n)$  справедливо равенство

$$\psi_{MU_0}(n) = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon(n))},$$

где  $\varepsilon(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Обозначим исследуемый класс функций через  $\mathcal{F}$ .

**Лемма 1.** Пусть  $f \in \mathcal{F}$ . Тогда на каждом 0-подкубе куба  $E_3^n$  функция  $f$  принимает либо только значение 0, либо только значения 1 и 2.

*Доказательство.* Пусть  $A$  — некоторый 0-подкуб куба  $E_3^n$ , а  $N$  — его индекс. Заметим, что любые два набора  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  из  $A$  эквивалентны согласно данному разбиению, это следует из того, что

$$\tilde{\alpha}_i = 0 \iff i \in N \iff \tilde{\beta}_i = 0.$$

Функция  $f$  сохраняет разбиение  $D$ , поэтому

$$\forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in A \quad f(\tilde{\alpha}) \stackrel{D}{\sim} f(\tilde{\beta}),$$

следовательно, на наборах из  $A$  функция  $f$  принимает либо только значение 0, либо только 1 и 2. Отсюда следует утверждение леммы.

Введем множество  $\hat{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_{2^n}\}$ , состоящее из всех 0-подкубов куба  $E_3^n$ . Заметим, что  $\bigcup_{A_i \in \hat{A}} A_i = E_3^n$ .

Введем также множество  $\hat{S} = \{S_1, S_2\}$  подстановок на  $E_k$ , где

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

и построим функциональные множества

$$\hat{\mathcal{F}}_1 = \{\hat{A} \rightarrow \hat{S}\}, \tag{1}$$

$$\hat{\mathcal{F}}_2 = \{E_3^n \rightarrow_{O_3} O_3^2 \{1, 2\}\}. \tag{2}$$

Фиксируем произвольную функцию  $f$  из  $\mathcal{F}$ . Определим для нее функцию  $f_1$  из  $\hat{\mathcal{F}}_1$ , полагая для всех  $A \in \hat{A}$

$$f_1(A) = \begin{cases} S_1, & \text{если } f(A) = \{0\}, \\ S_2 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3}$$

Теперь построим функцию  $f_2$ , определенную на  $E_3^n$ , полагая для всех  $\tilde{\alpha} \in E_3^n$

$$f_2(\tilde{\alpha}) = f_1(A_{\tilde{\alpha}})[f(\tilde{\alpha})], \tag{4}$$

где  $A_{\tilde{\alpha}}$  — 0-подкуб, содержащий набор  $\tilde{\alpha}$ . Корректность такого определения следует из того, что каждый набор попадает ровно в один 0-подкуб.

**Лемма 2.** Пусть  $f$  — функция из  $\mathcal{F}$ , а функции  $f_1$  и  $f_2$  задаются по правилам (3) и (4) соответственно. Тогда функция  $f_2$  принадлежит функциональному множеству  $\widehat{\mathcal{F}}_2$ .

*Доказательство.* Согласно определению подстановок из  $\widehat{S}$ , если  $f(\tilde{\alpha}) \neq 0$ , то  $f(\tilde{\alpha}) = f_2(\tilde{\alpha})$ , в противном случае  $f_2(\tilde{\alpha}) = 1$ .

Таким образом, функция  $f_2$  получается из  $f$  заменой всех нулей на единицы. Из этого следует, что  $f_2(E_3^n) \subset \{1, 2\}$ . Теперь возьмем два произвольных набора  $a$  и  $b$  из  $E_3^n$  такие, что  $a \leq_{O_3} b$ . Функция  $f$  сохраняет порядок  $O_3$ , поэтому

$$f(a) \leq_{O_3} f(b) \implies f_2(a) \leq_{O_3} f_2(b).$$

Из этого следует, что  $f_2(a) \leq_{O_3^2} f_2(b)$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.** Существует инъективное отображение  $\mathcal{P}$  множества  $\mathcal{F}$  в  $\widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2$ .

*Доказательство.* Положим  $\mathcal{P}(f) = (f_1, f_2)$ , где функции  $f_1$  и  $f_2$  задаются по правилам (3) и (4) соответственно. Функция  $f_1$  принадлежит множеству  $\widehat{\mathcal{F}}_1$  по определению. Функция  $f_2$  принадлежит множеству  $\widehat{\mathcal{F}}_2$  по лемме 2. Таким образом, отображение  $\mathcal{P}$  действует из  $\mathcal{F}$  в  $\widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2$ .

Покажем его инъективность. Действительно, пусть функции  $f'$  и  $f''$  принадлежат классу  $\mathcal{F}$  и отличны друг от друга на наборе  $\tilde{\alpha}$ . Возможны следующие варианты.

Среди значений  $f'(\tilde{\alpha})$ ,  $f''(\tilde{\alpha})$  есть 2. Тогда  $f'_2(\tilde{\alpha}) \neq f''_2(\tilde{\alpha})$ , так как подстановки множества  $\widehat{S}$  переводят в двойку только двойку, поэтому  $\mathcal{P}(f') \neq \mathcal{P}(f'')$ .

Среди значений  $f'(\tilde{\alpha})$ ,  $f''(\tilde{\alpha})$  нет двойки, а значит, есть 0 и 1. Пусть  $A_{\tilde{\alpha}}$  есть 0-подкуб, соответствующий набору  $\tilde{\alpha}$ . Тогда, по лемме 1, на этом подкубе одна из функций будет принимать только значение 0, а другая — только 1 и 2. Отсюда следует, что  $f'_1(A_{\tilde{\alpha}}) \neq f''_1(A_{\tilde{\alpha}})$ . Таким образом, и в этом случае  $\mathcal{P}(f') \neq \mathcal{P}(f'')$ . Лемма доказана.

**Лемма 4.** Справедлива оценка

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_1(n))},$$

где  $\varepsilon_1(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 3 существует инъективное отображение  $\mathcal{P}$ , действующее из  $\mathcal{F}$  в  $\widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2$ . Поэтому

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{P}(\mathcal{F})| \leq |\widehat{\mathcal{F}}_1| |\widehat{\mathcal{F}}_2|.$$

Мощность  $\widehat{\mathcal{F}}_1$ , очевидно, равна  $|\widehat{A}|^{|\widehat{S}|} = 2^{2^n}$ , а для мощности  $\widehat{\mathcal{F}}_2$  справедлива оценка (см. [2])

$$|\widehat{\mathcal{F}}_2| = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_2(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Отсюда получаем, что

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{2^n} 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))} = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))+2^n} = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_1(n))},$$

где  $\varepsilon_1(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Лемма доказана.

**Лемма 5.** Существует инъективное отображение  $\mathfrak{Q}$  из  $\widehat{\mathcal{F}}_2$  в  $\mathcal{F}$ .

*Доказательство.* Покажем, что достаточно взять тривиальное отображение

$$\mathfrak{Q}(f_2) = f_2$$

для всех  $f_2 \in \widehat{\mathcal{F}}_2$ . Очевидно, что это отображение инъективно. Покажем, что  $\mathfrak{Q}$  действует в  $\mathcal{F}$ . Это утверждение эквивалентно тому, что

$$\widehat{\mathcal{F}}_2 \subset M_3(n) \cap U_{\{0\}\{1,2\}}(n).$$

Действительно, функции из  $\widehat{\mathcal{F}}_2$  сохраняют порядок  $O_3$ : из того, что  $f_2(a) \leq_{O_3} f_2(b)$  при всех  $a \leq_{O_3} b$ , следует, что  $f_2(a) \leq_{O_3} f_2(b)$ . Они также сохраняют разбиение  $\{0\}\{1,2\}$ , так как множество значений этих функций попадает в один класс эквивалентности по данному разбиению.

**Лемма 6.** Справедлива оценка

$$|\mathcal{F}| \geq 2^{\sqrt{3/4\pi n}3^n(1+\varepsilon_2(n))},$$

где  $\varepsilon_2(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 5 существует инъективное отображение  $\mathfrak{Q}$ , действующее из  $\widehat{\mathcal{F}}_2$  в  $\mathcal{F}$ . Поэтому в силу (5)

$$|\mathcal{F}| \geq |\widehat{\mathcal{F}}_2| = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))}.$$

Утверждение теоремы следует теперь из лемм 4 и 6.

**Следствие 1.** Пусть  $\psi_{MU_1}(n)$  — число функций из класса  $M_3(n) \cap U_{\{1\}\{0,2\}}(n)$ , а  $\psi_{MU_2}(n)$  — число функций из класса  $M_3(n) \cap U_{\{2\}\{0,1\}}(n)$ . Тогда справедливы соотношения

$$\psi_{MU_1}(n) = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_3(n))},$$

$$\psi_{MU_2}(n) = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_4(n))},$$

где  $\varepsilon_3(n) \rightarrow 0$  и  $\varepsilon_4(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Для доказательства этих соотношений достаточно провести те же самые рассуждения с перестановкой констант и изменением соответствующих порядков.

#### 4. Класс $M_3(n) \cap T_{\mathcal{E}_0,1}(n)$

**Определение 8.** Классом  $T_{\mathcal{E}_0,1}(n)$  называется множество всех функций трехзначной логики от  $n$  переменных, сохраняющих предикат

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно [1], данный класс является предполным в  $\mathcal{P}_3$ .

**Теорема 2.** Для числа  $\psi_{MT_0}(n)$  функций в классе  $M_3(n) \cap T_{\mathbb{Z}_0,1}(n)$  справедливо равенство

$$\psi_{MT_0}(n) = 2^{\sqrt{3}/(4\pi n)} 3^{n(1+\varepsilon(n))},$$

где  $\varepsilon(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Обозначим исследуемый класс функций через  $\mathcal{F}$ .

**Лемма 7.** Пусть  $f \in \mathcal{F}$ ,  $A$  — произвольный 2-подкуб куба  $E_3^n$ . Тогда 1 и 2 не входят во множество  $f(A)$  одновременно.

*Доказательство.* Пусть  $N$  — индекс 2-подкуба  $A$ . Заметим, что любые два набора  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  из  $A$  сравнимы по предикату  $R_1$ , это следует из того, что

$$\tilde{\alpha}_i = 2 \iff i \in N \iff \tilde{\beta}_i = 2,$$

поэтому запрещенных по данному предикату пар значений не возникает. Функция  $f$  сохраняет предикат  $R_1$ , поэтому любая пара ее значений на наборах из  $A$  должна быть сравнима по данному предикату. Таким образом, невозможен случай, когда на одном наборе принимается значение 1, а на другом — значение 2. Из этого следует, что эти два значения не могут входить в множество  $f(A)$  одновременно. Отсюда следует утверждение леммы.

Введем множество  $\hat{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_{2^n}\}$ , состоящее из всех 2-подкубов куба  $E_3^n$ . Заметим, что

$$\bigcup_{A_i \in \hat{A}} A_i = E_3^n.$$

Введем множество подстановок  $\hat{S} = \{S_1, S_2\}$ , где

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

и построим функциональные множества

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_1 &= \{\hat{A} \rightarrow \hat{S}\}, \\ \hat{\mathcal{F}}_2 &= \{E_3^n \rightarrow_{O_3|O_3^0} \{0, 1\}\}. \end{aligned}$$

Фиксируем произвольную функцию  $f$  из  $\mathcal{F}$ . Определим для нее функцию  $f_1$  из  $\hat{\mathcal{F}}_1$ , полагая для всех  $A \in \hat{A}$

$$f_1(A) = \begin{cases} S_1, & \text{если } 2 \in f(A), \\ S_2 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6)$$

Теперь построим функцию  $f_2$ , определенную на  $E_3^n$ , полагая для всех  $\tilde{\alpha} \in E_3^n$

$$f_2(\tilde{\alpha}) = f_1(A_{\tilde{\alpha}})[f(\tilde{\alpha})], \quad (7)$$

где  $A_{\tilde{\alpha}}$  — 2-подкуб, содержащий набор  $\tilde{\alpha}$ . Корректность такого определения следует из того, что каждый набор попадает ровно в один 2-подкуб.

**Лемма 8.** Пусть  $f$  — функция из  $\mathcal{F}$ , а функции  $f_1$  и  $f_2$  задаются по правилам (6) и (7) соответственно. Тогда функция  $f_2$  принадлежит функциональному множеству  $\widehat{\mathcal{F}}_2$ .

*Доказательство.* Согласно определению подстановок из  $\widehat{S}$ , если  $f(\tilde{\alpha}) \neq 2$ , то  $f(\tilde{\alpha}) = f_2(\tilde{\alpha})$ , в противном случае  $f_2(\tilde{\alpha}) = 1$ .

Таким образом, функция  $f_2$  получается из  $f$  заменой всех двоек на единицы. Из этого следует, что  $f_2(E_3^n) \subset \{0, 1\}$ . Теперь возьмем произвольные два набора  $a$  и  $b$  из  $E_3^n$  такие, что  $a \leq_{O_3} b$ . Функция  $f$  сохраняет порядок  $O_3$ , поэтому

$$f(a) \leq_{O_3} f(b) \implies f_2(a) \leq_{O_3} f_2(b).$$

Из этого следует, что  $f_2(a) \leq_{O_3^0} f_2(b)$ . Лемма доказана.

**Лемма 9.** Существует инъективное отображение  $\mathcal{P}$  из  $\mathcal{F}$  в  $\widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2$ .

*Доказательство.* Положим  $\mathcal{P}(f) = (f_1, f_2)$ , где функции  $f_1$  и  $f_2$  задаются по правилам (6) и (7) соответственно. Функция  $f_1$  принадлежит множеству  $\widehat{\mathcal{F}}_1$  по определению. Функция  $f_2$  принадлежит множеству  $\widehat{\mathcal{F}}_2$  по лемме 8. Таким образом, отображение  $\mathcal{P}$  действует из  $\mathcal{F}$  в  $\widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2$ .

Покажем его инъективность. Действительно, пусть функции  $f'$  и  $f''$  принадлежат классу  $\mathcal{F}$  и отличны друг от друга на наборе  $\tilde{\alpha}$ . Возможны следующие варианты.

Среди значений  $f'(\tilde{\alpha})$ ,  $f''(\tilde{\alpha})$  есть 0. Тогда  $f'_2(\tilde{\alpha}) \neq f''_2(\tilde{\alpha})$ , так как подстановки множества  $\widehat{S}$  переводят в ноль только ноль, поэтому  $\mathcal{P}(f') \neq \mathcal{P}(f'')$ .

Среди значений  $f'(\tilde{\alpha})$ ,  $f''(\tilde{\alpha})$  нет нуля, а значит, есть 2 и 1. Пусть  $A_{\tilde{\alpha}}$  — 2-подкуб, соответствующий набору  $\tilde{\alpha}$ . Тогда, по лемме 7, на этом 2-подкубе одна из функций будет принимать значение 2, а другая не будет. Отсюда следует, что  $f'_1(A_{\tilde{\alpha}}) \neq f''_1(A_{\tilde{\alpha}})$ . Таким образом, и в этом случае  $\mathcal{P}(f') \neq \mathcal{P}(f'')$ . Лемма доказана.

**Лемма 10.** Справедлива оценка

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_1(n))}.$$

где  $\varepsilon_1(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 9 существует инъективное отображение  $\mathcal{P}$ , действующее из  $\mathcal{F}$  в  $\widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2$ . Поэтому

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{P}(\mathcal{F})| \leq |\widehat{\mathcal{F}}_1| |\widehat{\mathcal{F}}_2|.$$

Мощность  $\widehat{\mathcal{F}}_1$ , очевидно, равна  $|\hat{A}|^{|\hat{S}|} = 2^{2^n}$ , а для мощности  $\widehat{\mathcal{F}}_2$  справедлива оценка (см. [2])

$$|\widehat{\mathcal{F}}_2| = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))}, \tag{8}$$

где  $\varepsilon_2(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда получаем, что

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{2^n} 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))} = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))+2^n} = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_1(n))},$$

где  $\varepsilon_1(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Лемма 11.** Существует инъективное отображение  $\mathcal{Q}$  из  $\widehat{\mathcal{F}}_2$  в  $\mathcal{F}$ .



*Доказательство.* Покажем, что достаточно взять тривиальное отображение

$$\mathfrak{Q}(f_2) = f_2$$

для всех  $f_2 \in \widehat{\mathcal{F}}_2$ . Очевидно, что это отображение инъективно. Покажем, что  $\mathfrak{Q}$  действует в  $\mathcal{F}$ . Это утверждение эквивалентно тому, что

$$\widehat{\mathcal{F}}_2 \subset M_3(n) \cap T_{\mathfrak{g}_0,1}(n).$$

Действительно, все функции из  $\widehat{\mathcal{F}}_2$  сохраняют порядок  $O_3$ : если  $f_2(a) \leq_{O_3^2} f_2(b)$  для всех  $a \leq_{O_3} b$ , то  $f_2(a) \leq_{O_3} f_2(b)$ . Они также сохраняют предикат  $R_1$ , так как любая пара значений из множества  $\{0, 1\}$  удовлетворяет этому предикату.

**Лемма 12.** *Справедлива оценка*

$$|\mathcal{F}| \geq 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))},$$

где  $\varepsilon_2(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 11 существует инъективное отображение  $\mathfrak{Q}$ , действующее из  $\widehat{\mathcal{F}}_2$  в  $\mathcal{F}$ . Поэтому в силу (8)

$$|\mathcal{F}| \geq |\widehat{\mathcal{F}}_2| = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))}.$$

Утверждение теоремы следует теперь из лемм 10 и 12.

**Следствие 2.** *Обозначим через  $T_{\mathfrak{g}_2,1}(n)$  класс функций трехзначной логики от  $n$  переменных, сохраняющих предикат*

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\psi_{MT_2}(n)$  — число функций из класса  $M_3(n) \cap T_{\mathfrak{g}_2,1}(n)$ . Тогда справедливо равенство

$$\psi_{MT_2}(n) = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_4(n))},$$

где  $\varepsilon_3(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Для доказательства этого равенства достаточно провести те же самые рассуждения с взаимной заменой констант 2 на 0 и соответствующей перестановкой порядков.

## 5. Класс $M_3(n) \cap M'_3(n)$

**Определение 9.** Классом  $M'_3(n)$  называется множество функций  $\{E_3^n \rightarrow_{O'_3} E_3\}$ .

**Теорема 3.** *Для числа  $\psi_{MM'}(n)$  функций из класса  $M_3(n) \cap M'_3(n)$  справедливо равенство*

$$\psi_{MM'}(n) = 2^{\sqrt{2/(\pi n)}2^n(1+\varepsilon(n))},$$

где  $\varepsilon(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Для сокращения записи обозначим исследуемый класс через  $\mathcal{F}$ . Введем множество  $\hat{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_{2^n}\}$ , состоящее из всех 2-подкубов куба  $E_3^n$ .

**Лемма 13.** Пусть  $f \in \mathcal{F}$ ,  $A$  — произвольный 2-подкуб куба  $E_3^n$ . Тогда  $f$  на  $A$  принимает либо только значение 2, либо только значения 0 и 1.

*Доказательство.* Пусть  $N$  — индекс  $A$ . Предположим, что на наборе  $\tilde{\alpha} \in A$  функция  $f$  принимает значение 2. Для доказательства леммы достаточно показать, что в этом случае на всем 2-подкубе  $A$  принимается значение 2.

Для этого рассмотрим набор  $\tilde{\alpha}_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , где

$$\begin{aligned} \alpha_j = 0 &\iff j \notin N, \\ \alpha_j = 2 &\iff j \in N. \end{aligned}$$

Ясно, что он также принадлежит 2-подкубу  $A$ .

Из определения порядка  $O'_3$  и того, что функция  $f$  сохраняет порядок  $O'_3$ , следует, что

$$\tilde{\alpha} \leq_{O'_3} \tilde{\alpha}_0 \implies 2 = f(\tilde{\alpha}) \leq_{O'_3} f(\tilde{\alpha}_0) \implies f(\tilde{\alpha}_0) = 2.$$

С другой стороны, для произвольного набора  $\tilde{\beta}$  из  $A$

$$\tilde{\alpha}_0 \leq_{O_3} \tilde{\beta} \implies 2 = f(\tilde{\alpha}_0) \leq_{O_3} f(\tilde{\beta}) \implies f(\tilde{\beta}) = 2.$$

Таким образом, на всем множестве  $A$  будет приниматься значение 2.

Лемма доказана.

Теперь для каждой функции  $f \neq 2$  из  $\mathcal{F}$  построим множество  $I(f) \subset \{1, 2, \dots, n\}$  следующим образом:

$$I(f) = \bigcup_{A \in \hat{A}: f(A) \subset \{0,1\}} N(A), \tag{9}$$

где  $N(A)$  — индекс 2-подкуба  $A$ .

Введем обозначение

$$\mathcal{F}(I) = \{f \in \mathcal{F} \mid I(f) = I\}.$$

Заметим, что

$$\mathcal{F} = \left( \biguplus_{I \subset \{1,2,\dots,n\}} \mathcal{F}(I) \right) \cup \{f \equiv 2\}. \tag{10}$$

Переформулируем определение монотонных булевых функций в наших обозначениях.

**Определение 10.** Классом  $M_2(n)$  называется множество функций  $\{E_2^n \rightarrow_{O_3^0} E_2\}$ .

Докажем основную лемму.

**Лемма 14.** Пусть  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ . Тогда

$$|\mathcal{F}(I)| \leq |M_2(I)| |M_2(n - |I|)|.$$

*Доказательство.* Согласно определению 2-подкуба, он однозначно определяется своим индексом. Построим взаимно однозначное соответствие между элементами множества  $E_2^n$  и индексами 2-подкубов и будем считать, что по такому же правилу определяется соответствие между наборами из  $E_2^n$  и 2-подкубами куба  $E_3^n$ .

Пусть  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E_2^n$ . Определим множество  $N_{\tilde{\alpha}} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ , полагая

$$i \in N_{\tilde{\alpha}} \iff \alpha_i = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Пусть  $A_{N_{\tilde{\alpha}}}$  — 2-подкуб с индексом  $N_{\tilde{\alpha}}$ .

Теперь построим для каждой функции  $f$  из  $\mathcal{F}(I)$  функцию  $h_f$ , определенную на множестве  $E_2^n$  и задаваемую для всех  $\tilde{\alpha} \in E_2^n$  формулой

$$h_f(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 1, & f(A_{N_{\tilde{\alpha}}}) = \{2\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (12)$$

Покажем, что все такие функции являются монотонными булевыми функциями.

**Лемма 15.** Пусть  $f \in \mathcal{F}(I)$  и  $h_f$  определяется формулой (12). Тогда  $h_f \in \{E_2^n \rightarrow_{O_3^0} E_2\}$ .

*Доказательство.* По определению  $h_f \in \{E_2^n \rightarrow E_2\}$ . Покажем, что  $h_f$  сохраняет  $O_3^0$ . Фиксируем произвольные наборы  $a, b \in E_2^n$  такие, что  $a \leq_{O_3^0} b$ . Очевидно, что если  $h_f(a) = 0$ , то  $h_f(a) \leq_{O_3^0} h_f(b)$ . Предположим, что  $h_f(a) = 1$ . Согласно определению  $h_f$ , это означает, что  $f(A_{N_a}) = \{2\}$ . Возьмем в 2-подкубе  $A_{N_a}$  набор  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  такой, что

$$\alpha_i = \begin{cases} 2, & \text{если } i \in N_a, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогичным образом возьмем в 2-подкубе  $A_{N_b}$  набор  $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  такой, что

$$\beta_i = \begin{cases} 2, & \text{если } i \in N_b, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку  $a \leq_{O_3^0} b$ , справедливо соотношение (11),  $N_a \subset N_b$ . Отсюда получаем, что  $\tilde{\alpha} \leq_{O_3} \tilde{\beta}$ . Функция  $f$  по определению сохраняет порядок  $O_3$ , поэтому  $2 = f(\tilde{\alpha}) \leq_{O_3} f(\tilde{\beta})$ . Следовательно,  $f(\tilde{\beta}) = 2$ . Согласно лемме 13 это означает, что на всех наборах 2-подкуба  $A_{N_b}$  функция  $f$  принимает только значение 2. По определению функции  $h_f$  это означает, что  $h_f(b) = 1$ . Таким образом,  $h_f(a) \leq_{O_3^0} h_f(b)$ . Лемма доказана.

Введем обозначение

$$H_{\mathcal{F}_I} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}(I)} \{h_f\}.$$

**Лемма 16.** Пусть  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ . Тогда

$$|H_{\mathcal{F}_I}| \leq |M_2(|I|)|.$$

*Доказательство.* В случае, если  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , утверждение леммы является следствием леммы 15.

Рассмотрим случай  $I \neq \{1, 2, \dots, n\}$ . Фиксируем произвольную функцию  $f$  из  $\mathcal{F}(I)$  и произвольное число  $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$ . Фиксируем также произвольный набор  $\tilde{\alpha}$  куба  $E_2^n$ ,  $j$ -я компонента которого равна единице. Рассмотрим соответствующий ему 2-подкуб  $A_{N_{\tilde{\alpha}}}$ . Согласно определению  $N_{\tilde{\alpha}}$ ,  $j \in N_{\tilde{\alpha}}$ . Кроме того,  $j \notin I$ . Согласно определению  $I$  (см. (9)) и лемме 13 на  $A_{N_{\tilde{\alpha}}}$  функция  $f$  будет принимать только значение 2. По определению  $h_f$  это дает равенство  $h_f(\tilde{\alpha}) = 1$ .

Итак, если в наборе из  $E_2^n$  хотя бы одна компонента с номером не из  $I$  равна 1, то значение функции  $h_f$  на этом наборе равно 1. Пусть  $|I| = l$ . Не ограничивая общности рассуждений, положим  $I = \{1, 2, \dots, l\}$ . Тогда получаем, что функцию  $h_f$  можно представить в виде

$$h_f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{l+1} \vee x_{l+2} \vee \dots \vee x_n \vee \hat{h}_f(x_1, x_2, \dots, x_l), \quad (13)$$

где  $\hat{h}_f$  — тоже монотонная функция, то есть  $\hat{h}_f \in \{E_2^l \rightarrow_{O_3} E_2\}$

Число функций вида (13) не превосходит

$$|\{E_2^l \rightarrow_{O_3} E_2\}| = |M_2(l)| = |M_2(|I|)|.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Теперь рассмотрим произвольную функцию  $f$  из класса  $\mathcal{F}(I)$ . Пусть  $D$  — множество наборов куба  $E_3^n$ , на которых функция  $f$  не принимает значение 2.

Пусть мощность  $|I|$  равна  $l$ . Не ограничивая общности рассуждений, положим  $I = \{1, 2, \dots, l\}$ . Пусть  $\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n$  — элементы множества  $\{0, 1\}$ . Введем множество наборов

$$B(\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D \mid a_{l+1} = \alpha_{l+1}, a_{l+2} = \alpha_{l+2}, \dots, a_n = \alpha_n\}.$$

**Лемма 17.** Пусть  $f$  — функция из  $\mathcal{F}(I)$ , а  $\hat{\alpha} = (\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n)$  — набор элементов множества  $\{0, 1\}$ . Пусть  $a$  и  $b$  — наборы из  $E_3^n$  такие, что  $b \in B(\hat{\alpha})$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_l, \hat{\alpha})$  и  $a \leq_{O_3} b$ . Тогда  $a \in B(\hat{\alpha})$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать, что  $a \in D$ . Действительно,  $b \in B(\hat{\alpha})$ , следовательно,  $f(b) \in \{0, 1\}$ . Функция  $f$  сохраняет порядок  $O_3$ , а  $a \leq_{O_3} b$ , поэтому  $f(a) \leq_{O_3} f(b)$ . Отсюда получаем, что  $f(a) \in \{0, 1\}$ , следовательно,  $a \in D$ .

**Лемма 18.** Пусть  $f$  — функция из  $\mathcal{F}(I)$ , а  $\hat{\alpha} = (\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n)$  — набор элементов множества  $\{0, 1\}$ . Пусть  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  — наборы из  $B(\hat{\alpha})$ , причем

$$a_i \neq b_i \iff b_i = 2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда  $f(a) = f(b)$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $a \leq_{O_3} b$  и  $a \leq_{O'_3} b$ . Отсюда следует, что справедливы соотношения  $f(a) \leq_{O_3} f(b)$  и  $f(a) \leq_{O'_3} f(b)$ . Набор  $b$  лежит в  $B(\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n)$ , поэтому  $f(b) \in \{0, 1\}$ . Заметим, что 0 — минимальный элемент порядка  $O_3$ , а 1 — минимальный элемент порядка  $O'_3$ . Из этого следует, что  $f(b)$  является минимальным элементом по одному из порядков. Отсюда получаем, что  $f(a) = f(b)$ .

**Лемма 19.** Пусть  $f$  — функция из  $\mathcal{F}(I)$ , а  $\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n$  — элементы множества  $\{0, 1\}$ . Тогда на множестве  $B(\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n)$  функция  $f$  либо тождественно равна 0, либо тождественно равна 1.

*Доказательство.* Для краткости обозначим  $\hat{\alpha}$  последовательность  $\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n$ . Так как множество  $B(\hat{\alpha})$  является подмножеством  $D$ , функция  $f$  на нем принимает только значения 0 и 1. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что функция  $f$  постоянна на  $B(\hat{\alpha})$ .

Для этого индукцией по  $t$  докажем, что для любого  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}) \in B(\hat{\alpha})$  справедливо равенство

$$f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}) = f(0, \dots, 0, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}), \quad (14)$$

где в правой части равны нулю первые  $t$  аргументов функции  $f$ .

Очевидно, при  $t = 0$  равенство (14) верно.

Предположим, что при всех  $t < t \leq l$  равенство (14) выполнено. Докажем равенство для  $t = t$ .

Фиксируем произвольный набор  $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l, \hat{\alpha})$  из  $B(\hat{\alpha})$ . Рассмотрим следующие случаи.

Пусть  $\beta_t = 0$ . Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned} f(\beta_1, \dots, \beta_{t-1}, \beta_t, \beta_{t+1}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}) &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_{t-1}, \beta_t, \beta_{t+1}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}) \\ &= f(\underbrace{0, \dots, 0, 0}_{t-1}, \beta_{t+1}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}) \\ &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_t, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пусть  $\beta_t = 2$ . Тогда рассмотрим набор  $\tilde{\beta}_0 = (\beta_1, \dots, \beta_{t-1}, 0, \beta_{t+1}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha})$ . Для пары наборов  $\tilde{\beta}_0$  и  $\tilde{\beta}$  верно утверждение леммы 17, поэтому  $\tilde{\beta}_0 \in B(\hat{\alpha})$ . В этом случае для  $\tilde{\beta}_0$  и  $\tilde{\beta}$  верно также утверждение леммы 18, поэтому  $f(\tilde{\beta}) = f(\tilde{\beta}_0)$ . Кроме того, по предположению индукции

$$f(\tilde{\beta}_0) = f(\underbrace{0, \dots, 0}_t, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}),$$

и в этом случае мы также доказали верность индуктивного перехода.

Пусть теперь  $\beta_t = 1$ . Рассмотрим набор  $\tilde{\beta}' = (\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_l, \hat{\alpha})$ , где  $\beta'_i, i = 1, \dots, l$ , определяются по правилу

$$\beta'_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta_i = 2, \\ \beta_i & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (15)$$

Заметим, что для наборов  $\tilde{\beta}$  и  $\tilde{\beta}'$  верно утверждение леммы 17, поэтому  $\tilde{\beta}' \in B(\hat{\alpha})$ . В этом случае для  $\tilde{\beta}$  и  $\tilde{\beta}'$  верно также утверждение леммы 18, поэтому

$$f(\tilde{\beta}) = f(\tilde{\beta}'). \quad (16)$$

Константа  $t$  лежит в множестве  $I$ , что означает, что существует такой 2-подкуб  $A$ , индекс  $N \subset I$  которого содержит  $t$ , причем  $f(A) \subset \{0, 1\}$ . Таким образом, построив набор  $\tilde{\beta}^A = (\beta_1^A, \beta_2^A, \dots, \beta_l^A, \hat{\alpha})$  из этого 2-подкуба такой, что для  $i = 1, \dots, l$

$$\beta_i^A = \begin{cases} 2, & \text{если } i \in N; \\ \beta_i & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

мы получим, что  $\tilde{\beta}^A \in B(\hat{\alpha})$ . Заметим, что для наборов  $\tilde{\beta}'$  и  $\tilde{\beta}^A$  верно утверждение леммы 18, поэтому

$$f(\tilde{\beta}') = f(\tilde{\beta}^A). \quad (17)$$

Построим набор  $\tilde{\beta}'' = (\beta_1'', \beta_2'', \dots, \beta_l'', \hat{\alpha})$ , где  $\beta_i'', i = 1, \dots, l$ , определяются по правилу  $\beta_i'' = 0, \beta_i'' = \beta_i'$ , если  $i \neq t$ .

Так как  $t \in N$  и  $\tilde{\beta}'' \in B(\hat{\alpha})$  (достаточно применить лемму 17), для наборов  $\tilde{\beta}^A$  и  $\tilde{\beta}''$  верно утверждение леммы 18, поэтому

$$f(\tilde{\beta}^A) = f(\tilde{\beta}''). \quad (18)$$

Наконец, построим набор  $\tilde{\beta}''' = (\beta_1''', \beta_2''', \dots, \beta_l''', \hat{\alpha})$ , где  $\beta_i''', i = 1, \dots, l$ , определяются по правилу  $\beta_t''' = 0, \beta_i''' = \beta_i$ , если  $i \neq t$ .

Заметим, что  $\tilde{\beta}''' \leq_{O_3} \tilde{\beta}''$ , поэтому по лемме 17  $\tilde{\beta}''' \in B(\hat{\alpha})$ . В силу (15) получаем, что для наборов  $\tilde{\beta}''$  и  $\tilde{\beta}'''$  верно утверждение леммы 18, поэтому

$$f(\tilde{\beta}'') = f(\tilde{\beta}'''). \quad (19)$$

По построению

$$f(\tilde{\beta}''') = f(\beta_1, \dots, \beta_{t-1}, 0, \beta_{t+1}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}).$$

В то же время по предположению индукции

$$\begin{aligned} f(\tilde{\beta}''') &= f(\beta_1, \dots, \beta_{t-1}, 0, \beta_{t+1}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}) \\ &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_{t-1}, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}) \\ &= f(\underbrace{0, \dots, 0}_t, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}). \end{aligned} \quad (20)$$

Объединяя равенства (16), (17), (18), (19) и (20), получим, что

$$f(\tilde{\beta}) = f(\beta_1, \dots, \beta_{t-1}, \beta_t, \beta_{t+1}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}) = f(\underbrace{0, \dots, 0}_t, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}).$$

Таким образом, и в последнем случае индуктивный переход имеет место.

Этим завершается доказательство индуктивного перехода. Вспомогательное утверждение доказано. Взяв  $m = l$ , получим, что для всех  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}) \in B(\hat{\alpha})$

$$f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l, \hat{\alpha}) = f(\underbrace{0, \dots, 0}_l, \hat{\alpha}),$$

что и дает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Пусть  $f \in \mathcal{F}(I)$ . Определим функцию  $s_f$ , действующую на множестве  $E_2^{n-1}$ , по правилу

$$s_f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) = f(\underbrace{0, \dots, 0}_l, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}). \quad (21)$$

Введем функциональное множество

$$S_{\mathcal{F}_3} = \{E_2^{n-1} \rightarrow_{O_3^0} E_2\}.$$

**Лемма 20.** Пусть  $f \in \mathcal{F}(I)$ ,  $s_f$  определяется по правилу (21). Тогда  $s_f \in S_{\mathcal{F}_3}$ .

*Доказательство.* Сначала покажем, что  $s_f$  действует в  $E_2$ . Фиксируем произвольный набор  $\tilde{\beta} \in E_2^{n-l}$ .

По определению  $I$  и  $\mathcal{F}(I)$ , функция  $f$  тождественно не равна 2, следовательно, существует набор  $\tilde{\alpha} \in E_3^n$  такой, что  $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$ . Заметим, что  $\tilde{\alpha}_0 \leq_{O_3} \tilde{\alpha}$ . Функция  $f$  принадлежит классу  $M_3(n)$ , поэтому  $f(\tilde{\alpha}_0) \leq_{O_3} f(\tilde{\alpha})$ . Отсюда получаем, что  $f(\tilde{\alpha}_0) \in \{0, 1\}$ . Набор  $\tilde{\alpha}_0$  находится в одном 2-подкубе с набором  $(0, \dots, 0, \tilde{\beta})$  размерности  $n$  и по лемме 13  $f(0, \dots, 0, \tilde{\beta})$  также лежит во множестве  $\{0, 1\}$ . Следовательно,  $s_f(\tilde{\beta}) \in \{0, 1\} = E_2$ .

Покажем, что построенная функция  $s_f$  сохраняет порядок  $O_3^0$ . Пусть

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-l}), (b_1, b_2, \dots, b_{n-l}) \in E_2^{n-l},$$

причем

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-l}) \leq_{O_3^0} (b_1, b_2, \dots, b_{n-l}).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_{n-l}) \leq_{O_3} (b_1, b_2, \dots, b_{n-l}) &\implies \\ \underbrace{(0, \dots, 0, a_1, a_2, \dots, a_{n-l})}_I \leq_{O_3} \underbrace{(0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_{n-l})}_I &\implies \\ f(\underbrace{0, \dots, 0}_I, a_1, a_2, \dots, a_{n-l}) \leq_{O_3} f(\underbrace{0, \dots, 0}_I, b_1, b_2, \dots, b_{n-l}) &\implies \\ s_f(a_1, a_2, \dots, a_{n-l}) \leq_{O_3} s_f(b_1, b_2, \dots, b_{n-l}) &\implies \\ s_f(a_1, a_2, \dots, a_{n-l}) \leq_{O_3^0} s_f(b_1, b_2, \dots, b_{n-l}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Таким образом, определив отображение  $\mathcal{P}$  на множестве  $\mathcal{F}(I)$  по правилу  $\mathcal{P}(f) = h_f \times s_f$ , получим, что  $\mathcal{P}$  действует из  $\mathcal{F}(I)$  в  $H_{\mathcal{F}_3} \times S_{\mathcal{F}_1}$ .

**Лемма 21.** Существует инъективное отображение  $\mathcal{P}$  из  $\mathcal{F}(I)$  в  $H_{\mathcal{F}_3} \times S_{\mathcal{F}_1}$ .

*Доказательство.* Для произвольной функции  $f$  из  $\mathcal{F}(I)$  положим

$$\mathcal{P}(f) = (h_f, s_f),$$

где  $h_f$  определяется по правилу (12), а  $s_f$  по правилу (21). Согласно определению  $H_{\mathcal{F}_3}$  и лемме 20, это отображение действует в  $H_{\mathcal{F}_3} \times S_{\mathcal{F}_1}$ . Покажем его инъективность.

Действительно, возьмем две любые различные функции  $f'$  и  $f''$  из  $\mathcal{F}(I)$ . Пусть набор  $\tilde{\alpha}$  их различает. Возможны следующие варианты.

Среди значений  $f'(\tilde{\alpha})$ ,  $f''(\tilde{\alpha})$  есть двойка. Пусть  $A_{\tilde{\alpha}}$  — 2-подкуб, соответствующий набору  $\tilde{\alpha}$ . По лемме 13, одна из функций  $f'$ ,  $f''$  будет принимать на нем только значение 2, а другая только значения 0 и 1. Определим набор  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  из множества  $E_2^n$  по правилу

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in N(A_{\tilde{\alpha}}), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В этом случае  $A_{N_a} = A_{\tilde{\alpha}}$ . Согласно определению, одна из функций  $h_{f'}$ ,  $h_{f''}$  на  $a$  принимает значение 1, а другая значение 0, поэтому  $h_{f'} \neq h_{f''}$ . В этом случае  $\mathcal{P}(f') \neq \mathcal{P}(f'')$ .

Среди значений  $f'(\tilde{\alpha}), f''(\tilde{\alpha})$  нет двойки, следовательно, есть 0 и 1. Пусть

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \tilde{\alpha}_0 = (\underbrace{0, \dots, 0}_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_n).$$

В этом случае  $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}_0 \in B(\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n)$ . Согласно лемме 19

$$f'(\tilde{\alpha}_0) = f'(\tilde{\alpha}), \quad f''(\tilde{\alpha}_0) = f''(\tilde{\alpha}).$$

По определению функции  $s_f$

$$s_{f'}(\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n) = f'(\tilde{\alpha}_0), \quad s_{f''}(\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n) = f''(\tilde{\alpha}_0),$$

откуда следует, что  $s_{f'} \neq s_{f''}$ . Таким образом, и в этом случае  $\mathcal{P}(f') \neq \mathcal{P}(f'')$ . Лемма доказана.

Из лемм 21 и 16 следует, что для  $\mathcal{F}(I)$  справедлива оценка

$$|\mathcal{F}(I)| \leq |H_{\mathcal{F}_s}| |S_{\mathcal{F}_s}| \leq \{M_2(n-l) = S_{\mathcal{F}_s}\} \leq |M_2(l)| |M_2(n-l)| = |M_2(|I|)| |M_2(n-|I|)|.$$

Основная лемма доказана.

**Лемма 22.** Справедлива оценка

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{\sqrt{2/(\pi n)} 2^n (1+\varepsilon_1(n))},$$

где  $\varepsilon_1(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Согласно основной лемме и равенству (10) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}| &\leq 1 + \sum_{k=0}^n \sum_{|I|=k} |\mathcal{F}(I)| \leq 1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |M_2(k)| |M_2(n-k)| \\ &\leq 2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} |M_2(k)| |M_2(n-k)| \leq n \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} |M_2(\lfloor n/2 \rfloor)| |M_2(n)|. \end{aligned}$$

Согласно [3] для  $|M_2(n)|$  справедлива оценка

$$|M_2(n)| = 2^{\sqrt{2/(\pi n)} 2^n (1+\varepsilon_2(n))}, \tag{22}$$

где  $\varepsilon_2(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}| &\leq n \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} |M_2(\lfloor n/2 \rfloor)| |M_2(n)| \\ &\leq 2^{n + \log_2 n + \sqrt{2/(\pi n/2)} 2^{n/2} (1+\varepsilon_2(n)) + \sqrt{2/(\pi n)} 2^n (1+\varepsilon_2(n))} = 2^{\sqrt{2/(\pi n)} 2^n (1+\varepsilon_1(n))}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_1(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Лемма доказана.

**Лемма 23.** Существует инъективное отображение  $\mathcal{Q}$  из  $S_{\mathcal{F}_\emptyset}$  в  $\mathcal{F}(\emptyset)$ .



*Доказательство.* Напомним, что по определению

$$S_{\mathcal{F}\emptyset} = \{E_2^n \rightarrow_{O_3^0} E_2\}.$$

Построим для произвольной функции  $f \in S_{\mathcal{F}\emptyset}$  функцию  $f' = \mathcal{Q}[f]$ , действующую на  $E_3^n$ , по следующему правилу: для любого  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in E_3^n$

$$f'(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 2, & \text{если существует } i \text{ такое, что } \alpha_i = 2, \\ f(\tilde{\alpha}) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что все построенные таким образом функции различны. Покажем, что все они принадлежат классу  $\mathcal{F}(\emptyset)$ . По определению  $\mathcal{F}(\emptyset)$  в этот класс входят все функции класса  $\mathcal{F}$ , отличные от двойки только на 2-подкубе с параметром  $N = \emptyset$ .

Так как построенные функции отличны от 2 только на 2-подкубе с параметром  $N = \emptyset$  (обозначим его  $A_0$ ), достаточно показать, что все они сохраняют порядки  $O_3$  и  $O_3^0$ . Фиксируем два произвольных набора  $a \leq_{O_3} b$  и функцию  $f \in S_{\mathcal{F}\emptyset}$ . Возможны следующие варианты.

(1)  $a \in A_0, b \notin A_0$ . Тогда  $f'(a) = f(a) \in \{0, 1\}$  и

$$f'(b) = 2 \implies f'(a) \leq_{O_3} f'(b).$$

(2)  $a \notin A_0, b \notin A_0$ . Тогда

$$f'(a) = f'(b) = 2 \implies f'(a) \leq_{O_3} f'(b).$$

(3)  $a \in A_0, b \in A_0$ . Тогда  $f'(a) = f(a), f'(b) = f(b)$ . Так как  $f$  сохраняет порядок  $O_3^0$ , а  $a \leq_{O_3} b \implies a \leq_{O_3^0} b$ , справедливы соотношения

$$f(a) \leq_{O_3^0} f(b) \implies f(a) \leq_{O_3} f(b) \implies f'(a) \leq_{O_3} f'(b).$$

(4)  $a \notin A_0, b \in A_0$ . Это означает, что некоторая (скажем,  $i$ -я) компонента набора  $a$  равна 2. Но  $a \leq_{O_3} b$ , поэтому  $i$ -я компонента набора  $b$  также должна быть равна 2, что противоречит тому, что  $b \in A_0$ . Поэтому такой случай невозможен.

Теперь фиксируем произвольные наборы  $a \leq_{O_3^0} b$ . Рассмотрим те же варианты.

(1')  $a \in A_0, b \notin A_0$ . Тогда  $f'(a) = f(a) \in \{0, 1\}$  и

$$f'(b) = 2 \implies f'(a) \leq_{O_3^0} f'(b).$$

(2')  $a \notin A_0, b \notin A_0$ . Тогда

$$f'(a) = f'(b) = 2 \implies f'(a) \leq_{O_3^0} f'(b).$$

(3')  $a \in A_0, b \in A_0$ . Тогда  $f'(a) = f(a), f'(b) = f(b)$ . Так как  $f$  сохраняет порядок  $O_3^0$ , а  $a \leq_{O_3^0} b \implies b \leq_{O_3^0} a$ , справедливы соотношения

$$f(b) \leq_{O_3^0} f(a) \implies f(a) \leq_{O_3^0} f(b) \implies f'(a) \leq_{O_3^0} f'(b).$$

(4')  $a \notin A_0, b \in A_0$ . Это означает, что некоторая (скажем,  $i$ -я) компонента набора  $a$  равна 2. Но  $a \leq_{O_3} b$ , поэтому  $i$ -я компонента набора  $b$  также должна быть равна 2, что противоречит тому, что  $b \in A_0$ . Поэтому такой случай невозможен.

Лемма доказана.

**Лемма 24.** *Справедлива оценка*

$$|\mathcal{F}| \geq 2^{\sqrt{2/(\pi n)} \cdot 2^n (1 + \varepsilon_2(n))},$$

где  $\varepsilon_2(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 23, существует инъективное отображение  $\mathcal{Q}$ , действующее из  $S_{\mathcal{F}\emptyset}$  в  $\mathcal{F}(\emptyset)$ . Поэтому согласно (22)

$$|\mathcal{F}| \geq |\mathcal{F}(\emptyset)| \geq |S_{\mathcal{F}\emptyset}| = |M_2(n)| = 2^{\sqrt{2/(\pi n)} 2^n (1 + \varepsilon_2(n))},$$

где  $\varepsilon_2(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда получаем, что

$$|\mathcal{F}| \geq 2^{\sqrt{2/(\pi n)} 2^n (1 + \varepsilon_2(n))},$$

где  $\varepsilon_2(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Лемма доказана.

Из лемм 24 и 22 получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Аналогичный результат верен для всех классов, являющихся пересечением двух предполных классов монотонных функций.

## Список литературы

1. Яблонский С. В., Функциональные построения в  $k$ -значной логике. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР* (1958) **51**, 5–142.
2. Алексеев В. Б., О числе монотонных  $k$ -значных функций. *Проблемы кибернетики* (1974) **28**, 5–24.
3. Клейтмен Д., О проблеме Дедекинда: число монотонных булевых функций. *Киберн. сб.* (1970) **7**, 43–52.

Статья поступила 28.05.2005.