И. И. Пятецкий-Шапиро, И. Р. Шафаревич, Арифметика поверхностей типа К3,
Тр. МИАН СССР, 1973, том 132, 44–54

Труды Международной конференции по теории чисел
Москва, 14—18 сентября 1971

Proceedings of the International Conference on Number Theory
Moscow, 14—18 September 1971

АРИФМЕТИКА ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА К3

И. И. Пятецкий-Шапиро, И. Р. Шафаревич

(Москва)

§ 1. Основные результаты

Полная алгебраическая поверхность X называется поверхностью типа К3, если $H^1(X, O_X)=0$ и канонический класс K_X этой поверхности равен 0.

Как известно [1, гл. VIII], условию $K_X=0$ удовлетворяют, кроме поверхностей типа К3, еще двумерные абелевы многообразия. Над полем комплексных чисел C двумерное абелево многообразие однозначно определено периодами своих голоморфных одномерных дифференциальных форм. Отсюда вытекает, что оно определяется и периодами двумерной голоморфной дифференциальной формы. На поверхности типа К3 нет одномерных голоморфных форм, но есть двумерная голоморфная форма — единственная с точностью до постоянного множителя. Возникает вопрос: в какой мере ее периоды определяют поверхность? Для ответа на него надо ввести некоторые понятия.

Видно, что для всех поверхностей X типа К3 группы гомологий $H_2(X, \mathbf{Z})$ вместе со скалярным произведением, определенным индексом пересечения, изоморфны. Фиксируем одну такую евклидову решетку L и вектор $l \in L$. Отмеченной поверхностью тип К3 назовем тройку $\tilde{X} \approx (X, \xi, \varphi)$, где X — поверхность типа К3, $\xi \in H_2(X, Z)$ — класс гомологий гиперплоского сечения при некотором ее проективном вложении и $\varphi: H_2(X, Z) \to L$ — такой изоморфизм евклидовых решеток, что $\varphi(\xi)=l$.

В пространстве $\Omega = \mathrm{Hom}(L, \mathbf{C})$ определим билинейное скалярное произведение, продолжающее то, которое задано в L. Условия

$$\omega^2 = 0, \qquad \omega\bar{\omega} > 0$$

определяют область Ω в проективном пространстве, соответствующем векторному пространству $\tilde{\Omega}$. Через $\Omega(l)$ обозначим ее связную компоненту сечения, определенную условием $\omega l=0$. Это однородная симметрическая область, на которой действует группа $G(R)$, где G — подгруппа ортогональной группы решетки L, не меняющая вектор l. Для формы $\Gamma(X, \Omega_X^2)$ и $\gamma \in H_2(X, \mathbf{Z})$ положим

$$f(\gamma) = \int_\gamma \eta.$$

Очевидно, $f \in \mathrm{Hom}\,(H_2\,(X,\,Z),\,\mathbf{C})$, и видно, что φf определяет точку в $\Omega\,(l)$. Эту точку мы обозначим через $\tau\,(\tilde{X})$.

Теорема 1 (теорема Торелли для поверхностей типа К3). *Отмеченная поверхность $\tilde{X}$ типа К3 однозначно определяется точкой $\tau\,(\tilde{X}) \in \Omega\,(l)$.*

Доказательство этой теоремы приведено в работе [2]. Здесь мы изложим некоторые ее применения. Нас будут интересовать в основном арифметические применения, но ввиду того, что метод использует аналитически-геометрическую теорему 1, их нельзя рассмотреть изолированно от некоторых геометрических результатов.

Поверхности типа К3 обладают целозначным инвариантом, который аналогичен роду кривых, — это наименьшее значение числа $^1/_2\,(D^2)$, где D — неприводимая кривая на поверхности и $(D^2) > 0$. Мы назовем его классом поверхности. Как доказано в [1, гл. VIII], дивизор $2D$ всегда очень обилен. Поэтому все поверхности одного класса определяют открытое множество S' в некоторой схеме Гильберта.

В [2] доказано, что схема S'—гладкая. На ней определено универсальное семейство $X' \to S'$ поверхностей типа К3 заданного класса. В [2] построено семейство $X'' \to S''$ отмеченных поверхностей типа К3 заданного класса. Его база S'' является комплексным многообразием, неразветвленно накрывающим S', причем группа Галуа накрытия $f: S'' \to S'$ изоморфна дискретной группе $G\,(\mathbf{Z})$, точка слоя $f^{-1}\,(S')$ соответствует всем способам введения структуры отмеченной поверхности на поляризованной поверхности типа К3 $X'_{S'}$. Отображение периодов определяет голоморфное отображение $\tau: S'' \to \Omega\,(l)$. В [2] показано, что группа $Pl\,(n)$ проективных преобразований того проективного пространства $\mathbf{P}^n$, в которое вложены поверхности $X'_{s'}$, $s' \in S'$, естественно действует на S' и на S'', причем τ пропускается через проекцию

$$p: S'' \to S''/PL\,(n), \qquad \tau = hp,$$

а теорема 1 как раз и следует из того, что $h: S''/PL\,(n) \to \Omega\,(l)$ является открытым вложением.

Теорема 2. *Многообразие S'' связно.*

Рассмотрим нормальный делитель $\Gamma \subset G\,(\mathbf{Z})$, являющийся конгруэнц-подгруппой и не содержащий отличных от единицы элементов конечного порядка. Многообразие $S = S''/\Gamma$ является конечнолистным накрытием многообразия S' с группой Галуа $G\,(\mathbf{Z})/\Gamma$ и согласно общей теореме — алгебраическим многообразием. Отображение периодов определяет голоморфное отображение $\pi: S \to \Omega\,(l)/\Gamma$. Так как Γ действует в $\Omega\,(l)$ без неподвижных точек, то к π применима теорема, доказанная независимо Борелем и Кобаяши [3], которая показывает, что π является морфизмом алгебраических многообразий. Вместе с теоремой 1 это дает, что $\Omega\,(l)$— $-\tau(S'')$ содержится в собственном комплексном подмногообразии и, значит, $\tau\,(S'')$ связно. Отсюда следует, что гомеоморфное ему многообразие $S''/PL\,(n)$ связно, а, значит, связно и S''.

Этот результат имеет два применения.

Следствие 1. *Многообразие S' всех поверхностей типа К3 заданного класса связно.*

Это очевидно, так как оно является образом S''.

Следствие 2. *Образ фундаментальной группы* $\pi(S', s_0')$ *в* $\mathrm{Aut}\, H^2(X'_{s_0'}, \mathbf{Z})$, *который определяется действием на когомологии слоя, совпадает с* $G(\mathbf{Z})$.

Действительно, если $H \subset G(\mathbf{Z})$ — это образ $\pi(S', s_0')$, s_0'' — точка, лежащая над s_0', то, накрывая все отображения отрезка $f: I \to S'$, $f(0) = s_0'$, мы получим для накрывающих отображений g $g(0) = s_0''$ в качестве $g(1)$ точки некоторой компоненты многообразия S'', в которой будут содержаться лишь точки $H \cdot s_0''$ из числа точек, лежащих над s_0'. Так как слой над s_0' имеет вид $G(\mathbf{Z}) s_0'$, а S'' связно, то $G(\mathbf{Z}) = H$.

Например, деформируя любым способом неособую поверхность 4-й степени в $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, мы можем получить в качестве автоморфизма ее когомологий любой автоморфизм соответствующей целочисленной квадратичной формы сигнатуры (2, 19).

Перейдем к формулировке арифметических приложений.

Теорема 3. *Для поверхности типа К3 над конечным полем верна гипотеза Римана.*

Метод, основанный на применении теоремы 1, использует подъем поверхности X, определенной над конечным полем, в поверхность, определенную над полем характеристики 0. Это значит, что X вкладывается как замкнутый слой в схему $Y \to B$, структурный морфизм которой гладкий, а общий слой — поверхность типа К3 над полем характеристики 0. Мы будем предполагать существование такого поднятия, хотя из определения поверхности типа К3 следует, что для нее $H^2(X, \Theta) = 0$ и, значит, все препятствия к подъему обращаются в 0. Пусть X — гладкое проективное многообразие над $\mathbf{C}$. Обозначим через X^n произведение его на себя n раз. Группой Ходжа многообразия X мы будем называть алгебраическую подгруппу группы всех автоморфизмов $H^*(X, \mathbf{Q})$, выделенную условием тривиального действия на все подпространства $H^{p,p} \cap H^{2p}(X^n, \mathbf{Q})$ (n, p — любые). Для абелевых многообразий группа Ходжа была введена и исследована в [4]. Мы будем называть гладкое проективное многообразие X многообразием СМ-типа, если его группа Ходжа коммутативна.

Гипотеза. *Любое многообразие СМ-типа определено над полем алгебраических чисел, и его дзета-функция выражается через L-функции одномерных характеров конечного расширения поля определения многообразия.*

Прекрасная книга Шимуры и Таниямы [5] содержит доказательство этой гипотезы для абелевых многообразий. В настоящей статье это доказывается для поверхностей К3.

Теорема 4. *Поверхность К3 СМ-типа определена над числовым полем, и ее дзета-функция выражается через L-функции одномерных характеров конечного расширения поля определения.*

Теорема 3 была независимо доказана П. Делинем, который любезно прислал нам свою рукопись. Так как наше доказательство несколько отличается от доказательства Делиня (использование теоремы Торелли вносит заметное упрощение), то мы решили воспроизвести его здесь.

§ 2. Когомологии слоев как модули Галуа

Пусть X и S — неприводимые алгебраические многообразия, определенные над полем k-конечным расширением поля рациональных чисел Q, $f: X \to S'$ — собственный гладкий морфизм над k. Группа Галуа $\mathrm{Gal}\,(\overline{k(S)}/k(S'))$ алгебраического замыкания $\overline{k(S)}$ поля $k(S)$ действует на l-адических этальных когомологиях $H^*(F,\ Q_l)$ общего слоя расслоения $f: X \to S$ и тем определяется гомоморфизм

$$\mathrm{Gal}\,(\overline{k(S)}/k(S)) \to \mathrm{Aut}\, H^*(F,\ Q_l)$$

в группу автоморфизмов алгебры когомологий. Обозначим через $k\,(S)_l$ подполе поля $\overline{k(S)}$, принадлежащее ядру этого гомоморфизма. Если надо почеркнуть его зависимость от расслоения f, мы будем обозначать его $k\,(S)_{f,l}$. Пусть k' — расширение k, получающееся присоединением к k всех корней степеней l^n из 1. Из существования умножения Вердье в когомологиях следует, что $k\,(S)_l$ содержит подполе, над которым k' имеет конечную степень.

Расслоение $f: X \to S$ называется строго непостоянным, если алгебраическое замыкание k в $k\,(S)_l$ имеет конечную степень над его пересечением с k'. Тогда конечным расширением поля k можно добиться того, чтобы k' было алгебрически замкнутым в $(k\,(S))_l$.

Л е м м а. 1. *Расслоения $f: X \to S$ тогда и только тогда строго непостоянно, когда группа* $\mathrm{Gal}\ (K\,(S)_l/K'\,(S))$ *имеет конечный индекс в* $\mathrm{Gal}\ (k\,(S)_l/k'\,(S))$ *для любого расширения K поля k.*

Аналогично полю $k\,(S)_l$ рассмотрим поля $k\,(S)_{l,n}$, для которых группы $\mathrm{Gal}\,(k\,(S)_{l,n}/k\,(S))$ вкладываются в $\mathrm{Aut}\, H^*\,(F, \mathbf{Z}/l^n\,\mathbf{Z})$. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}\,(K'(S)_{l,n}/K'(S)) \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr] & & \mathrm{Gal}\,(k'(s)_{l,n}/k'(s)) \arrow[dl] \\
& \mathrm{Aut}\, H^*\,(F, \mathbf{Z}/l^n), &
\end{tikzcd}$$

в которой косые стрелки являются вложениями, а поэтому вложением будет и гомоморфизм φ_n. Его ядру соответствует подполе $k'\,(s)_{l,n} \cdot K'\,(S)$, и, значит,

$$K'\,(S)_{l,\,n} = k'\,(s)_{l,\,n} \cdot K'. \tag{1}$$

Пусть расслоение $f: X \to s$ строго непостоянно и k' алгебраически замкнуто в $k'\,(s)_l$. Тогда $k'\,(s)_{l,n}$ — регулярное расширение поля k'. Поэтому ввиду известных свойств регулярных расширений

$$[k'\,(s')_{l,\,n} \cdot K' : K'\,(S)] = [k'\,(s)_{l,\,n} : k'\,(s)].$$

Вместе с (1) это доказывает, что φ_n, а значит, и φ — изоморфизм. Обратное утверждение получается обращением этих рассуждений.

В приложениях, которые нам встретятся, поле K будет полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Рассмотрим вложение поля k, над которым определены S, X и f в $\mathbf{C}$, и будем считать, что $k \subset \mathbf{C}$. Обозначим через $S_{\mathbf{C}}$ многообразие комплексных точек S. Фундаментальная группа $\pi\,(S_{\mathbf{C}},\ s_0)$ действует на комплексные когомологии $H^*\,(F_{s_0},\ \mathbf{Z})$ слоя расслоения. При этом, конечно, образ элементов из $\pi\,(S_{\mathbf{C}},\ s_0)$ содержится в группе $\mathrm{Aut}\, H^*\,(F_{s_0},\ \mathbf{Z})$.

§ 3. Многообразия Куга—Сатаке

Конструкция абелевых многообразий, соответствующих поверхностям К3, указана М. Куга и И. Сатаке. Эта конструкция состоит в следующем. Пусть X — поверхности типа К3 и $l \in H^2(X, \mathbf{Z})$ — класс когомологий, соответствующий гиперплоскому сечению.

Обозначим через $H^2(X, \mathbf{Z})^l = V \subset H^2(X, \mathbf{Z})$ ортогональное дополнение к l. Сигнатура формы-индекса пересечения на V равна (2, 19).

Пусть $C^+ = C^+(V)$ будет четная клиффордова алгебра, ассоциированная с V. Мы определим сейчас в End $(C^+ \otimes \mathbf{R})$ оператор комплексной структуры j.

Пусть $V_+ = (H^{2,0} + H^{0,2}) \cap V \otimes \mathbf{R}$, e_1, e_2 — любой ортонормированный базис в V. Положим $e_+ = e_1 e_2$ и определим в V комплексную структуру

$$jx = e_+ x, \qquad x \in C^+. \tag{2}$$

Как показано в [6], на $C^+ \otimes \mathbf{R}$ существует кососимметрическая форма $\alpha(x, y)$, целочисленная на C^+ и такая, что форма $\alpha(jx, y)$ симметрична и положительно определена. Следовательно, $(C^+ \otimes \mathbf{R})/C^+$ представляет собой абелево многообразие. Оно будет обозначаться J_X. В работе [4] дана конструкция ходжевых семейств абелевых многообразий. Из результатов работ [4, 7] вытекает, что на $\Omega(l)/\Gamma$, где Γ — любая конгруэнцподгруппа спинорной группы, есть ходжево семейство абелевых многообразий, соответствующее спинорной группе. Канонический гомоморфизм $\pi_1(\Omega(l)/\Gamma)$ в Aut $H^1(J_X, \mathbf{Z})$ совпадает с естественным вложением Γ в спинорную группу. Известно [4], что $\Omega(l)/\Gamma$ определено над конечным расширением поля $\mathbf{Q}$, причем рациональные функции на $\Omega(l)/\Gamma$ обладают следующим свойством: во всех точках, соответствующих абелевым многообразиям CM-типа, их значения принадлежат $\overline{\mathbf{Q}}$.

Лемма 2. *Семейство абелевых многообразий, соответствующее $\Omega(l)/\Gamma$, строго непостоянно.*

Доказательство. В работе [8] показано, что для любого абелева многообразия A подгруппа конечного индекса в образе группы Галуа в Aut $H^1(A, \mathbf{Q}_l)$ содержится в группе Ходжа абелева многообразия. Для определенного нами семейства группа Ходжа совпадает со спинорной группой. С другой стороны, по конструкции семейства фундаментальная группа базы его есть конгруэнцподгруппа спинорной группы.

Лемма 3. *Если группа Ходжа поверхности X коммутативна, то соответствующее абелево многообразие J_X — типа CM.*

Доказательство. Из конструкции J_X вытекает существование вложения

$$V = H^2(X, \mathbf{Q})^l \to H^2(J_X, \mathbf{Q}) \tag{3}$$

с сохранением структуры Ходжа. Из определения группы Ходжа следует для любого абелева многообразия A, что эта группа переводит в себя любое подпространство $V \subset H^k(A, \mathbf{Q})$ со следующим свойством:

$$V \otimes \mathbf{C} = \sum_{p+q=k} (V \otimes \mathbf{C}) \cap H^{p,q}. \tag{4}$$

Отсюда и из (3) вытекает существование гомоморфизма

$$\bar{\rho}: \mathrm{Hg}(J_X) \to \mathrm{Aut}\, H^2(X, \mathbf{Q})^l. \tag{5}$$

В общей точке этот гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом спинорной группы в ортогональную группу. Следовательно, его ядро — группа второго порядка. Это же имеет место для любого X. Пусть теперь группа Ходжа X коммутативна. Следовательно, группа Ходжа J_X — расширение коммутативной группы с помощью группы второго порядка. Известно, что группа Ходжа любого абелева многообразия редуктивна, из чего и следует, что она должна быть коммутативна, если ее фактор по подгруппе второго порядка коммутативен. Как известно [4], коммутативность группы Ходжа абелева многообразия эквивалентна тому, что это многообразие является многообразием СМ-типа.

Следствие. *Если X—сингулярная поверхность* К3, *то абелево многообразие J_X—СМ-типа.*

Достаточно проверить, что группа Ходжа X коммутативна. Это следует из того, что $\mathrm{Hg}X$ должна тривиально действовать на $H^{1,1}(X, \mathbf{Q})=S_X$. Следовательно, она переводит в себя T_X — ортогональное дополнение к S_X, причем индекс пересечения сохраняет форму. Остается учесть, что группа автоморфизмов двумерного модуля, снабженного скалярным произведением, коммутативна. Мы приведем сейчас пример поверхности К3 СМ-типа.

Предварительно мы докажем следующее свойство группы Ходжа.

Лемма. 4. *Пусть X — любое гладкое проективное многообразие. Алгебра $\mathfrak{A}_X$ всех эндоморфизмов $H^*(X, \mathbf{Q})$, сохраняющих биградуировку Ходжа, перестановочна с* $\mathrm{Hg}X$.

Доказательство. Все такие эндоморфизмы можно стандартным образом интерпретировать как рациональные классы когомологий типа (n, n) на $X\times X$, где n — размерность X. По определению, группа Ходжа сохраняет такие классы, что и дает утверждение леммы.

Следствие. *Пусть X — поверхность К3. Если алгебра эндоморфизмов $H^2(X, \mathbf{Q})$, сохраняющих биградуировку Ходжа, имеет размерность 22, то X — поверхность СМ-типа.*

Приведем пример поверхностей К3 СМ-типа. Пусть K — поле СМ-типа, т. е. поле вида $F(\sqrt{-\delta})$, где F — тотально вещественное поле, δ — тотально положительно, т. е. положительно при любом вложении $F \to \mathbf{R}$. Рассмотрим теперь тройку (K, φ_1, λ), где φ_1 — вложение $F \to \mathbf{R}$, $\lambda \in F$, $\varphi_1(\lambda) > 0$, для остальных вложений $\varphi(\lambda) < 0$. Определим для $\alpha, \beta \in K$ следующим образом скалярное произведение

$$(\alpha, \beta) = tr(\alpha\lambda\beta^\sigma),$$

где σ — автоморфизм комплексного сопряжения. Покажем, что $(\alpha, \beta)= =(\beta, \alpha)$ и квадратичная форма на (α, α) имеет сигнатуру $(2, 2n-2)$, где $2n= =K:\mathbf{Q}$. Мы имеем $trx=trx^\sigma$ для любого $x\in k$. Следовательно, $(\alpha, \beta)= =tr\,\alpha\lambda\beta^\sigma=tr\,\beta\lambda\alpha^\sigma =(\beta, \alpha)$ ($\lambda\in F$ и, значит, $\lambda^\sigma=\lambda$).

Для вычисления сигнатуры введем в $K\otimes\mathbf{R}$ удобные координаты. Обозначим через $\psi_1,\ldots, \psi_{2n}$ полную систему вложений $K \to \mathbf{C}$, занумерованную так, чтобы ψ_{2i-1}, ψ_{2i} были сопряжены. Положим $x_{2i-1}={}^1/_2(\psi_{2i-1}(\alpha)+ +\psi_{2i}(\alpha))$, $x_{2i}=1/2i(\psi_{2i-1}(\alpha)-\psi_{2i}(\alpha))$. Мы, очевидно, имеем

$$(\alpha, \alpha)=2\sum\lambda_k(x_{2k-1}^2+x_{2k}^2),$$

где $\lambda_k = \psi_{2k-1}(\lambda) = \psi_{2k}(\lambda)$. Остается достичь того, чтобы форма была представима стандартной формой—индексом пересечения на $H^2(X, \mathbf{Q})$. Согласно теореме Хассе [7] это, во всяком случае, возможно, если $2n \leqslant 16$, так как размерность стандартного модуля 22.

§ 4. Дзета-функции поверхностей типа К3

Наш метод исследования основывается на построении двух расслоений над одной и той же базой, которые будут удовлетворять условиям леммы 6. Одно из них — это универсальное расслоение $f: X \to S$ для поверхностей типа К3 заданного класса. Его база была определена ранее. Другое будет построено, исходя из расслоения на абелевы многообразия над базой $\Omega(l)/\Gamma$, введенного в предшествующем параграфе. Применение леммы 6 позволит перенести классические результаты об абелевых многообразиях на поверхности типа К3.

На многообразии $S = S''/\Gamma$, введенном в § 1, рассмотрим семейство $f': X' \to S'$ — обратный образ семейства $S \to S'$ относительно накрытия $S \to S'$. По критерию Вейля семейство f определено над конечным расширением поля $\mathbf{Q}$.

Л е м м а. 5. *Расслоение $f: X \to S$ строго непостоянно.*

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi: \pi(S_{\mathbf{C}}, s_0) \to \operatorname{Aut} H^2(F_{s_0}, \mathbf{Z})$, который задается действием группы $\pi(S_{\mathbf{C}}, s_0)$ на когомологии слоя. Основой доказательства является соотношение

$$\varphi \cdot \pi(S_{\mathbf{C}}, s_0) = \Gamma,$$

сразу же вытекающее из следствия 2 в § 1.

Заметим, что $H^*(F, \mathbf{Z}) = H^0(F, \mathbf{Z}) \oplus H^2(F, \mathbf{Z}) \oplus H^4(F, \mathbf{Z})$, и поэтому группа $\operatorname{Aut} H^*(F, \mathbf{Z})$ содержит $G(\mathbf{Z})$, где G — ортогональная группа квадратичной формы, определенной умножением когомологий в решетке $H^2(F, \mathbf{Z})^l$. Обозначим через G_l пополнение группы $\varphi\pi(S_{\mathbf{C}}, s_0)$ в топологии, определенной когруэнцподгруппами по модулям l^n в группе $\operatorname{Aut} H^*(F_{s_0}, \mathbf{Z}) \supset G(\mathbf{Z})$. Ввиду того, что для $G(\mathbf{Z})$ верна теорема аппроксимации, пополнение группы $G(\mathbf{Z})$ совпадает с $G(\mathbf{Z}_l)$, а G_l является замыканием Γ в $G(\mathbf{Z}_l)$. По условию $(G(\mathbf{Z}_l): G_l) < \infty$.

Согласно теореме сравнения для этальных когомологий кольца $H^*(F_{S_0}, \mathbf{Z}_l)$ и $H^*(F, \mathbf{Z}_l)$ изоморфны, а группа G_l совпадает с образом группы $\operatorname{Gal}(\mathbf{C}(S)_l/\mathbf{C}(S))$. Так как, очевидно, образ группы $\operatorname{Gal}(k(S)_l/k(S))$ содержится в $G(\mathbf{Z}_l)$, а уже образ $\operatorname{Gal}(\mathbf{C}(S)_l/\mathbf{C}(S))$ имеет в $G(\mathbf{Z}_l)$ конечный индекс, то и

$$(\operatorname{Gal}(k(S)_l/k(S)) : \operatorname{Gal}(\mathbf{C}(S)_l/\mathbf{C}(S)) < \infty.$$

Таким образом, условие, необходимое для того, чтобы f было строго непостоянным расслоением, выполнено при $K = \mathbf{C}$. Так как $\mathbf{C}$ можно принять за универсальную область в смысле А. Вейля, то это условие выполнено для любого K.

Рассмотрим теперь два расслоения $f: X \to S$ и $f': X' \to S$ над одной и той же базой. Рассмотрев их над $\mathbf{C}$, мы свяжем с каждым из них «систему локальных коэффициентов» $H^*(F_S, \mathbf{Q})$, или, что то же самое, пучок $R^*f_*\mathbf{Q}$ на S. Пусть задан локально-тривиальный подпучок A пучка $\operatorname{Aut} R^*f_*\mathbf{Q}$ и гомоморфизм

$$S : A \to \operatorname{Aut} R^*f'_*\mathbf{Q}$$

этих пучков, т. е. система гомоморфизмов

$$S_s : A_S \to \operatorname{Aut} H^*(F'_s,\ \mathbf{Q}),$$

согласованная с действием фундаментальной группы $\pi(S_{\mathbf{C}})$. Тем самым, как мы уже видели, определяется гомоморфизм групп

$$S_{et} : A_\xi \to \operatorname{Aut} H^*(F',\ \mathbf{Q}_l),$$

где ξ — общая точка базы S, а F' — общий слой расслоения f'.

Лемма 6. *Если* F *и* F′ — *строго непостоянные расслоения, то гомоморфизм* ρ_{et} *перестановочен с действием подгрупп конечного индекса в группах* $\operatorname{Gal}(k(S)_{f,\,l}/k'(S))$ *и* $\operatorname{Gal}(k(S)_{f',\,l}/k'(S))$.

Действительно, по построению ρ_{et} перестановочен с действием группы G_l, т. е. группы $\operatorname{Gal}(\mathbf{C}(S)_l/\mathbf{C}(S))$ (эта группа зависит только от базы и, значит, одна и та же для расслоений f и f′). Так как оба расслоения строго непостоянны, то группа $\operatorname{Gal}(\mathbf{C}(S)_l/\mathbf{C}(S))$ содержится, как подгруппа конечного индекса в группах $\operatorname{Gal}(k(S)_{f,\,l}/k'(S))$ и $\operatorname{Gal}(k(S)_{f',\,l}/k'(S))$. Отсюда следует утверждение леммы.

Для построения второго расслоения мы воспользуемся отображением периодов. Легко видеть, что оно определяет голоморфное отображение $\pi : \mathrm{S} \to \Omega/\Gamma$. С другой стороны, напомним, что S и Ω/Γ имеют структуру алгебраического многообразия, определенного над конечным расширением поля рациональных чисел.

Лемма 7. *Голоморфное отображение* π *совпадает с морфизмом алгебраических многообразий, определенным над конечным расширением поля рациональных чисел.*

То, что π представляет собой морфизм многообразий, верно для любого голоморфного отображения алгебраического многообразия S в Ω/Γ. Это является содержанием теоремы Бореля и Кобаяши [3].

Нам остается доказать, что π определено над конечным расширением поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$, или, что то же самое, над $\overline{\mathbf{Q}}$. Для этого напомним, что на S действует группа G проективных преобразований того пространства, в которое вложены все слои семейства f. Рассмотрим такое открытое множество $U \subset S$, что фактор U/G существует. Нам достаточно доказать, что над $\overline{\mathbf{Q}}$ определен морфизм $\pi : U \to \Omega/\Gamma$, а он представляется в виде $\pi = h \cdot p$, где $p : U \to U/G$ — естественная проекция, а $h : U/G \to \Omega/\Gamma$ — некоторый морфизм. Нам достаточно доказать, что h определен над $\overline{\mathbf{Q}}$.

Согласно теореме Торелли, доказанной в работе [2], h является открытым вложением. Докажем, что для функции $r \in \overline{\mathbf{Q}}(\Omega/\Gamma)$ $h^*(r) \in \overline{\mathbf{Q}}(U/G)$. Для этого мы воспользуемся тем, что имеется много точек $x \in \Omega/\Gamma$, про которые известно, что $r(x) \in \overline{\mathbf{Q}}$ для всех $r \in \overline{\mathbf{Q}}(\Omega/\Gamma)$. Такими являются точки, соответствующие сингулярным поверхностям типа CM (см. следствие леммы 4, § 3). В частности, таковы точки, соответствующие сингулярным поверхностям типа К3. Точка $h^{-1}(x)$ определена над $\overline{\mathbf{Q}}$, если точка x соответствует сингулярной поверхности типа К3. Это будет доказано в лемме. Таким образом, точки $h^{-1}(x)$, соответствующие сингулярным поверхностям, образуют всюду плотное множество в U/G и для $r \in \bar{\mathbf{Q}}(\Omega/\Gamma)$, функция $h^*(r)$ принимает в них алгебраические значения. Тогда $h^*(r) \in \bar{\mathbf{Q}}(U/G)$ по лемме 9.

Лемма 8. *Если точка $x \in D/\Gamma$ соответствует сингулярной поверхности типа К3, то точка $h^{-1}(x) \in U/G$ определена над конечным расширением поля* $\mathbf{Q}$.

Нам достаточно доказать, что точка $h^{-1}(x)$ инвариантна относительно подгруппы конечного индекса группы всех автоморфизмов поля $\mathbf{C}$. Так как $h^{-1}(x)$ есть образ G-орбиты на U, то наше утверждение будет доказано, если проверить, что эта орбита сохраняется подгруппой конечного индекса группы $\operatorname{Aut} \mathbf{C}$. Это утверждение равносильно тому, что если X — поляризованная поверхность типа К3, соответствующая точке x (т. е. сингулярная), то среди поляризованных поверхностей X^σ, $\sigma \in \operatorname{Aut} \mathbf{C}$, имеется лишь конечное число неизоморфных.

Последнее утверждение вытекает из классификации сингулярных поверхностей, полученной в работе [2]. Действительно, решетки Нерона—Севери S_X и S_{X^σ} поверхностей X и X^σ изоморфны. Поэтому ортогональные дополнения T_X и T_{X^σ} этих решеток в группе гомологий имеют одинаковые дискриминанты, равные дискриминанту S_X. Но существует только конечное число неизоморфных решеток с заданным дискриминантом, а решетка T_X, как доказано в [2] (теорема в § 8), однозначно определяет поверхность X с точностью до изоморфизма.

Лемма 9. *Пусть M — неприводимое алгебраическое многообразие, определенное над конечным расширением k поля $\mathbf{Q}$. Если $f \in \mathbf{C}(M)$ такова, что для некоторого всюду плотного множества $Z \subset M_{\bar{Q}}$ значения f принадлежат $\bar{\mathbf{Q}}$, то $f \in \bar{\mathbf{Q}}(M)$.*

Доказательство. Из того, что M определено над некоторым конечным расширением k поля $\mathbf{Q}$, следует, что в $k(M)$ существуют такие функции $f_0, f_1, \ldots, f_n$, $n = \dim M$ и такое $m \geqslant 0$, $m \in \mathbf{Z}$, что любая $f \in \mathbf{C}(M)$ может быть однозначно представлена в виде

$$f = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{m} p_k(f_1, \ldots, f_n) f_0^m,$$

где $p_k(f_1, \ldots, f_n)$, $k=0, \ldots, m$, $q(f_1, \ldots, f_n)$ — полиномы с комплексными коэффициентами от $f_1, \ldots, f_n$; $(p_0, \ldots, p_m, q) = 1$.

Очевидно, что если $f=0$ на всюду плотном множестве точек, то $f \equiv 0$. По условию, бесконечная система линейных уравнений относительно коэффициентов полиномов q, p_k, $k=0, \ldots, m$ вида

$$q(f_1(x), \ldots, f_n(x)) f(x) = \sum p_k(f_1(x), \ldots, f_n(x)) f_0^k(x), \quad x \in M$$

имеет ненулевое решение. Эта система линейна, и, значит, если она имеет ненулевое решение в $\mathbf{C}$, то она должна иметь ненулевое решение в поле, порожденном коэффициентами. Отсюда вытекает, что она должна иметь решение в некотором конечном расширении поля $\mathbf{Q}$. Таким образом, существует такая функция

$$\tilde{f} = \frac{1}{\tilde{q}} \sum \tilde{p}_k(f_1, \ldots, f_k) f_0^m,$$

что $\tilde{q}$, $\tilde{p}_k \in \bar{Q}[T_1, \ldots, T_n]$ и $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in Z$. Тогда $\tilde{f} = f$, что и дает утверждение нашей леммы.

Рассмотрим теперь семейство абелевых многообразий A, определенное над $\Omega(l)/\Gamma$ и введенное в предшествующем параграфе. Обозначим через X его обратный образ относительно морфизма $f : S \to \Omega(l)/\Gamma$. Из доказанного ранее следует, что X' определено над конечным расширением поля $\mathbf{Q}$ и что оно строго непостоянно. Гомоморфизм $\bar{\rho}$, введенный в предшествующем параграфе, определяет гомоморфизм $\bar{\rho} : \mathrm{Hg}(A_\xi)(\mathbf{Q}) \to \mathrm{Aut}\, H^*(F_\xi, \mathbf{Q})$, где A_ξ и F_ξ — слои расслоений A и F.

Проверим, что ρ удовлетворяет условиям леммы 2, т. е. перестановочен с действием группы $\pi(S_{\mathbf{C}}, s_0)$. Морфизм $S \to \Omega(l)/\Gamma$ определяет эпиморфизм $\pi(S, s_0) \to \Gamma$, и группа $\pi(S, s_0)$ действует на когомологии слоев расслоения X через этот гомоморфизм. Для расслоения X' это верно по определению. Перестановочность гомоморфизма ρ с действием группы Γ очевидна из инвариантного характера его определения.

Таким образом, проверено, что построенные расслоения X и X' удовлетворяют условиям леммы 2, и мы можем применить эту лемму. Мы получаем подгруппу конечного индекса G в $\mathrm{Gal}\,(k(S)_l/k'(S))$, действия которой на $\mathrm{Aut}\, H^*(F, \mathbf{Q}_l)$ и $\mathrm{Hg}\,(A_S)(\mathbf{Q}_l)$ связаны гомоморфизмом ρ.

Докажем, что в группе $\mathrm{Gal}\,(k(S)_l/k(S))$ есть подгруппа конечного индекса G, обладающая тем же свойством.

Диаграмма

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{Hg}(A_s, Q_l) \arrow[dd, "\rho"] \\ \mathrm{Gal}\,(k(s)_l/k(s)) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\ & \mathrm{Aut}\ H^*(F_s, Q_l), \end{tikzcd}$$

где s — общая точка многообразия S, коммутативна при ограничении на подгруппу Γ. С другой стороны, переходя к детерминантам, мы получим аналогичную коммутативную диаграмму для группы $\mathrm{Gal}\,(k'(s)/k(s))$. Отсюда следует, что элементы $\Psi(g)^{-1}(\rho\varphi)(g)$ коммутируют с $\Psi(G)$. Так как по условию $\Psi(G)$ имеет конечный индекс в группе унимодулярных автоморфизмов алгебры $H^*(F_S, \mathbf{Q}_l)$, а центр последней группы конечен, то функция $\Psi(g)^{-1}(\rho\varphi)(g)$ равна 1 на некоторой окрестности 1, т. е. группе $\tilde{G}$.

Пусть $s_0 \in S$ — точка, определенная над конечным расширением поля $\mathbf{Q}$. В любом конечном расширении Галуа $k(s_l) \supset L \supset k'(S)$, $[L : b'(s)] < \infty$, рассмотрим нормализацию S_L многообразия S. Прообразы точки s_0 в S_L переставляются группой Галуа $L/k'(s)$ и определяют группу разложения и поле классов вычетов. Рассматривая объединение всех таких полей J', мы получим поле классов вычетов $k(s_0)_l$ и группу Галуа, изоморфную группе разложения

$$\mathrm{Gal}\,(k(s_0)_l/k'(s_0)) \subset \mathrm{Gal}\,(k(s)_l/k'(s)). \tag{6}$$

Из функториального характера групп когомологий и из включения (6) следует существование коммутативного треугольника

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & \mathrm{Hg}\,(A_{s_0})\,(\mathbf{Q}_l) \arrow[d, "\rho"] \\ \mathrm{Gal}\,(k(s_0)_l\,/\,k'(s_0)) \arrow[ur] \arrow[r] & \mathrm{Aut}\, H^*(F_{s_0}, \mathbf{Q}_l). \end{tikzcd}$$

В нашем случае

$$H_g\,(A_{s_0})\,(\mathbf{Q}_l) \subset \mathrm{Aut}\,\Lambda^2 H^1\,(F'_{s_0},\ \mathbf{Q}_l)$$

и ρ сохраняет собственные значения автоморфизма Фробениуса.

Так как A_{S_0} — абелево многообразие, то отсюда вытекает теорема 3 ввиду известных результатов Вейля.

Если F_{S_0} — поверхность CM-типа, то, согласно лемме 3, A_{S_0} — абелево многообразие CM-типа. Отсюда вытекает теорема 4 ввиду результатов Шимуры—Таниямы [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебраические поверхности. Труды МИАН СССР, 1965, **75**.
2. *И. И. Пятецкий-Шапиро*, *И. Р. Шафаревич*. Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа К3. — Изв. АН СССР, серия матем., **35**, № 3, 530.
3. *S. Kobayashi*. Preprint.
4. *D. Mumford*. A note on Shimura's paper «Discontinuous groups and Abelian varieties». — Math. Ann., 1969, **181**, N 4, 345.
5. *G. Shimura*, *Y. Tanyiama*. Complex multiplication of Abelian varieties and its applications to number theory. Tokyo, 1961.
6. *Kuga*, *Satake*. Abelian varieties attached to polarized K3-surfaces. — Math. Ann., 1967, **169**, 239.
7. *З. И. Боревич*, *И. Р. Шафаревич*. Теория чисел. М., 1964.
8. *И. И. Пятецкий-Шапиро*. Взаимоотношения между гипотезами Тейта и Ходжа для абелевых многообразий. — Матем. сб., 1971, 85, № 4, 610.