R. N. Karasev, On transversals of the family of translates of two-dimensional convex compact, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1998, Volume 252, 67–77

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

Р. Н. Карасёв

О ТРАНСВЕРСАЛЯХ СЕМЕЙСТВ ТРАНСЛЯТОВ ДВУМЕРНОГО ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

В известном обзоре [1] (см. [2, 3], а также [4], гл. 2.1, стр.407, гипотеза 6.2), Грюнбаумом была поставлена следующая задача: существует ли для семейства транслятов выпуклого компакта на двумерной плоскости, в котором любые два множества пересекаются, 3-*трансверсаль*, то есть такие три точки, что каждое множество семейства содержит хоть одну из них. В литературе приведены частичные решения в случае евклидовых кругов [5, 6], треугольников [7], центрально-симметричных множеств [8] или множеств постоянной ширины [9]. В настоящей работе дается полное решение этой задачи (результат анонсирован в [13]):

Теорема 1. *Для любого семейства $F = \{K + x : x \in X\}$ транслятов выпуклого компакта K в $\mathbb{R}^2$, в котором любые два множества пересекаются, существует 3-трансверсаль.*

В [4] содержится также информация по поводу аналогичных утверждений в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, а именно: об оценке порядка трансверсали семейства транслятов выпуклого компакта, в котором любые два множества семейства пересекаются. Далее из формулировки теоремы 2 будет видно, что эта задача аналогична вопросу о разрезании фигур на меньшие части (задача Борсука), а также задаче о покрытии фигуры ее уменьшенными копиями (задача Хадвигера).

Сначала переформулируем утверждение теоремы 1. Для двух множеств A и B положим $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$.

Теорема 2. *Если $X - X \subseteq K - K$ для множества $X \in \mathbb{R}^2$ и выпуклого компакта K, то X можно покрыть тремя транслятами компакта $-K$.*

Так как $K - K$ – центрально-симметрично, то условие $X - X \subseteq K - K$ не меняется при замене K на $-K$, так что далее, при

При работе над данной статьей авторы Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 96-01-01054.

доказательстве теоремы 2, мы будем устанавливать покрытие X тремя транслятами K.

Лемма 1. *Теоремы 1 и 2 эквиавлентны.*

Доказательство. Покажем, что теорема 1 следует из теоремы 2. Так как $K + x_1 \cap K + x_1 \neq \varnothing$, для любых x_1, $x_2 \in X$ найдется такая точка p, что $p = x_1 + y_1$ и $p = x_2 + y_2$, где y_1, $y_2 \in K$ или, иначе $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$, что и означает $X - X \subseteq K - K$.

По теореме 2 существуют такие точки x_1, x_2, x_3, что для любой точки $x \in X$ найдется такое $i = 1, 2, 3$ и $y \in K$, что $x = x_i - y$ или, иначе говоря, для $x_i \in x + K$, что и требуется в теореме 1.

В обратную сторону утверждение доказывается теми же рассуждениями в обратном порядке.

Определение. *Для ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}^n$* шириной *$w(X, K, e)$* в направлении *$e \in S^{n-1}$ (S^{n-1} – единичная сфера) относительно выпуклого компакта K будем называть отношение расстояний между параллельными опорными гиперплоскосятми к X и K, с направляющим вектором e. Выпуклый компакт X будем называть* телом постоянной ширины относительно *K, если $w(X, K, e) = \mathrm{const}$. Очевидно, что $w(X, K, e) = 2w(X, K - K, e)$, $w(X - X, K, e) = 2w(X, K, e)$, $w(X, K, e) = w(X - X, K - K, e)$ и что $w(X, K, e)$ равно расстоянию между параллельными опорными гиперплоскостями X и K, с направляющим вектором e, в банаховой метрике $d_B(x, y)$, задаваемой единичным шаром $B_1 = K - K$.*

Простая лемма 2 объясняет геометрический смысл включения $X - X \subseteq K - K$.

Лемма 2. *Следующие утверждения равносильны:*
(1) $X - X \subseteq K - K$.
(2) *X имеет диаметр $\operatorname{diam} X \leqslant 1$, в метрике $d_B(x, y)$, $B_1 = K - K$.*
(3) $w(X, K, e) \leqslant 1$.

Доказательство. (1)$\Leftrightarrow$(2). Очевидно.

(2)$\Rightarrow$(3). Имеем, $w(X, K, e) = w(X - X, K - K, e)$ и так как $X - X \subseteq K - K$, то $w(X, K, e) = w(X - X, K - K, e) \leqslant 1$.

(3)$\Rightarrow$(1). Так как $w(X, K, e) = w(X - X, K - K, e) \leqslant 1$. Множества $K - K$ и $X - X$ центрально-симметричны с центром в 0, а $K - K$ – выпукло и поэтому является пересечением центрально симметричных полос с центром в 0. Так как $w(X, K, e) =$

$w(X-X, K-K, e) \leqslant 1$, то выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(X-X) \subseteq K-K$ и $X-X \subseteq K-K$.

Из леммы 2 следует, что множество X в теореме 2 можно считать выпуклым, так как условие (3) леммы 2 не меняется при замене X на $\operatorname{conv} X$.

Лемма 3. *Если B двумерное банахово пространство с единичным шаром B_1, множество $X \subset B$, $\operatorname{diam} X \leqslant 1$, то существует такое F, что $X \subseteq F$ и $w(F, B_1, e) = 1/2$ для всех $e \in S^1$.*

Замечание. Лемма 3 является известным утверждением, однако оказалось затруднительно найти место, где приведено доказательство. Приведем ее доказательство, совершенно аналогичное доказательству теоремы о том, что множество диаметра 1 в евклидовом пространстве можно поместить в тело постоянной ширины 1 (см. [10], п. 64, а также [11, 12]).

Ясно, что множества в лемме 3 можно считать выпуклыми компактами, так как переход к замыканию выпуклой оболочки не меняет диаметров и ширин множеств. Теперь лемма 3 может быть выведена из следующей леммы 4 с использованием леммы Цорна, но мы обойдемся без последней (как это сделано в [8], при доказательстве частного случая леммы 3).

Лемма 4. *Если $X \subset B$ – такое замкнутое выпуклое множество в двумерном банаховом пространстве B, что $\operatorname{diam} X \leqslant 1$ и $w(X, B_1, e) < 1/2$ для некоторого $e \in S^1$, то X можно заключить в такое X_0, $X \neq X_0$, что $\operatorname{diam} X_0 \leqslant 1$.*

Доказательство леммы 4. Пусть e такое, что $w(X, B_1, e) < 1/2$. Предположим противное, что $w(X \cup \{p\}, B_1, e_0) > 1/2$ для любой точки $p \in B$ и некоторого e_0 – то есть существуют две опорные прямые к $\operatorname{conv}(X \cup \{p\})$ с направляющим вектором e_0 с расстоянием между ними > 1. Так как $\operatorname{diam} X \leqslant 1$, то $w(X, B_1, e)) \leqslant 1/2$ для всех e. Поэтому эти две прямые не могут быть опорными к X – то есть одна из них проходит через p.

Итак, пусть $w(X, B_1, e_0) = 1/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ для некоторого e_0. Так как ширина $w(X, B_1, e)$ зависит от $e \in S^1$ непрерывно, то существуют такие e_1 и e_2 – ближайшие к e_0 против и по часовой стрелке, что $w(X, B_1, e_0) = w(X, B_1, e_0) = 1/2 - \varepsilon/2$. В самом деле, тогда $\operatorname{diam} X \leqslant 1 - \varepsilon$, и если взять такую точку $p \notin X$, что $d_B(p, X) \leqslant \varepsilon$, то $\operatorname{diam} X \cup \{p\} = 2w(X \cup \{p\}, B_1, e_0) \leqslant 1$. Противоречие.

Возьмем опорные к X прямые в направлениях e_1 и e_2 и пусть P – параллелограмм, ими образованный. Пусть опорные прямые к P в направлении e пересекают его в вершинах p_1 и p_2. Докажем, что $w(P, B_1, e_0) > 1/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Предположим противное и рассмотрим параллелограмм P', образованный опорными прямыми к B_1 в направлениях e_1 и e_2. Очевидно, что P' подобен P с коэффициентом $1/(1-\varepsilon/2)$, следовательно

$$w(P', B_1, e_0) \leqslant \frac{1/2 - \varepsilon}{1/2 - \varepsilon/2} < 1.$$

Но это невозможно, так как P' содержит B_1.

Отсюда следует, что либо $p_1 \notin X$, либо $p_2 \notin X$. Пусть это, например, p_1. Уголок параллелограмма около p_1 не принадлежит X, и в нем можно взять такую точку p, что $d_B(p, X) = \varepsilon/2$.

Докажем, что множество $w(X \cup \{p\}, B_1, e) \leqslant 1/2$ для всех $e \in S^1$. Предположим противное, что $w(X \cup \{p\}, B_1, e) \leqslant 1/2$ для некоторого $e \in S^1$. Так как одна из опорных к $X \cup \{p\}$ прямых в направлении e проходит через p, то легко видеть (см. рис. 1), что вектор e лежит между e_1 и e_2 на той же дуге, что и e_0, а для всех e на этой дуге $w(X, B_1, e) \leqslant 1/2 - \varepsilon$ там ширина X не больше $1 - \varepsilon/2$, но расстояние от p до X не больше $\varepsilon/2$, то есть ширина $X \cup \{p\}$ в этом направлении не более 1 – значит $X \cup \{p\}$ все таки подходит.

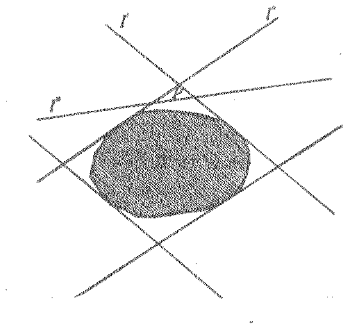

Рис. 1.

Доказательство леммы 3. Пусть X – множество в формулировке леммы. Определим последовательность выпуклых компактов

$\{X_n\}_{n\geqslant 0}$. Пусть $X_0 = \overline{\operatorname{conv} X}$, а считая определенным X_n определим X_{n+1} следующим образом: рассмотрим все выпуклые компактные множества диаметра, не большего единицы, содержащие X_n, так как их площадь ограничена сверху (например, площадью единичного круга), то среди этих множеств найдется некоторое множество – обозначим его X_{n+1} – такое, что выпуклое множество, содержащее X_n, имеет площадь, превышающую площадь X_{n+1} не более чем на 10^{-n}. Пусть $X = \overline{\bigcup X_n}$, тогда X имеет диаметр, не больший 1. Докажем, что ширина X в любом направлении равна 1. В противном случае по лемме 3 нашлось бы выпуклое и компактное множество X' диаметра, не большего 1, такое, что $X \subset X'$, а, значит, нашлось бы некоторое n такое, что разность между площадями X и X' больше 10^{-n}, но существование такого X' противоречит определению X_{n+1}. Значит, ширина X в любом направлении действительно равна 1.

Таким образом, теперь теорема 2 с помощью леммы 3 может быть выведена из своего частного случая:

Теорема 3. *Если X, $K \subset \mathbb{R}^2$ выпуклые компакты и $X - X = K - K$, то X можно покрыть тремя транслятами компакта K.*

Замечание. Условие $X - X = K - K$ равносильно тому, что X и K имеют одинаковую ширину в любом направлении (см. лемму 2).

Теперь сформулируем лемму, которая будет играть основную роль в доказательстве теоремы 3:

Лемма 5. *Пусть $\Delta A_1B_1C_1$ составлен из середин сторон ΔABC. Если прямая l не пересекает $\Delta A_1B_1C_1$, то l образует с некоторыми двумя сторонами треугольника ABC треугольник площади, большей, чем площадь треугольника ABC.*

Доказательство леммы 5. Достаточно рассмотреть два существенно различных случая (см. рис. 2 и 3):

1) Прямая l не пересекает ΔABC и точка A наиболее удалена от l. Тогда, очевидно, l образует с прямыми AB и AC треугольник большей площади, чем $S_{\Delta ABC}$.

2) Прямая l пересекает стороны AB и AC и луч BC в точках F, E и D, соответственно. Тогда из условия леммы следует, что $AE < EC$. Легко видеть, что симметричный ΔDEC относительно точки E треугольник содержит ΔAFE, а, следовательно, $S_{\Delta AFE} < S_{\Delta DEC}$. Значит, $S_{\Delta BFD} > S_{\Delta ABC}$.

Остальные случаи сводятся к этим переобозначением вершин треугольника. Для удобства изложения введем некоторые обозначения (см. рис. 4).

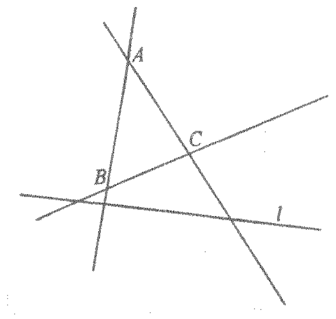

Рис. 2.

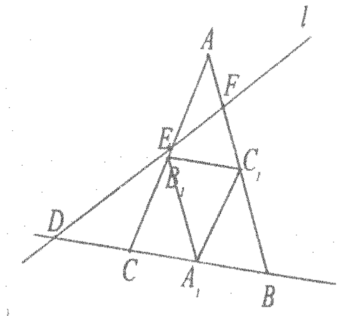

Рис. 3

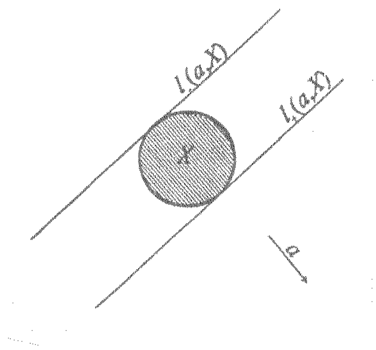

Рис. 4.

Пусть a – вектор на плоскости, а X – некоторый выпуклый компакт. Тогда пусть $l_+(a, X)$ и $l_-(a, X)$ – опорные прямые к X, перпендикулярные a, причем такие, что $(a, (l_+(a, X) - l_-(a, X))) > 0$ (внешние скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$), то есть l_+ лежит от начала 0 дальше чем l_-, если смотреть вдоль a. За $m(a, X)$ обозначим прямую, делящую пополам ширину X в направлении, перпендикулярном a, иначе говоря, $m(a, X) =$

$(l_+(a,X)+l_-(a,X))/2$. Заметим, что сумма или разность двух параллельных прямых – прямая, параллельная им обоим (в смысле $l_1 - l_2 = \{x - X : x \in l_1, X \in l_2\}$).

Доказательство теоремы 3. Сначала мы построим явную конструкцию трех трансляций K, а потом докажем, что получаемые трансляты покрывают X.

Для любого вектора $a \neq 0$ рассмотрим прямую $l(a) = l_+(a,X) - l_+(a,K)$. На самом деле имеют место равенства $l(a) = l_-(a,X) - l_-(a,K) = m(a, X-K)$, которые следуют из того, что множества X и K имеют равные ширины в направлении, перпендикулярном a (см. рис. 5).

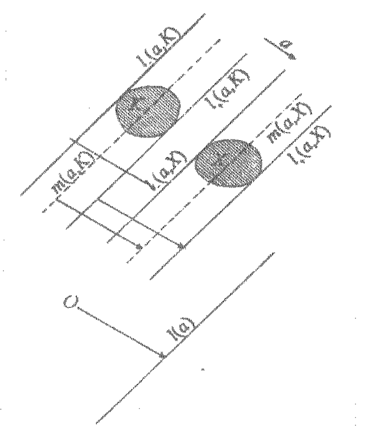

Рис. 5

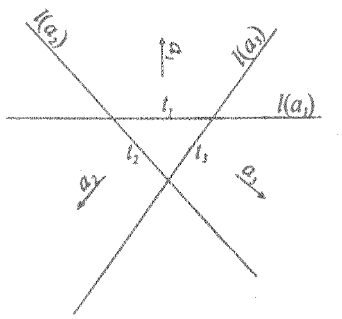

Рис. 6.

Последнее из этих равенств показывает, что при замене вектора a на противоположный $l(a)$ не меняется. Очевидно $l(a)$ – непрерывно зависит от a. Для трех векторов a_1, a_2 и a_3 обозначим площадь треугольника, образованного прямыми $l(a_1)$, $l(a_2)$ и $l(a_3)$ как $S(a_1,a_2,a_3)$. Так как $m(a_1, X-K)$ и $m(a_2, X-K)$ пересекаются внутри $X-K$, то, очевидно, площадь треугольника, образованного $l(a_1)$, $l(a_2)$ и $l(a_3)$ не превосходит величины $\frac{1}{2}D^2\sin\varphi$, где φ – угол между $l(a_1)$ и $l(a_2)$, а D – диаметр $X-K$. Значит

$S(a_1, a_2, a_3)$ стремится к нулю, когда какие-то два из направлений $l(a_1)$, $l(a_2)$, $l(a_3)$ стремятся друг к другу, поэтому ее можно считать непрерывной функцией направлений a_1, a_2 и a_3. При нормировке $\|a_i\| = 1$ площадь S становится функцией на компакте $S^1 \times S^1 \times S^1$ и при некоторых a_1, a_2 и a_3 достигает максимума. Если максимум равен нулю, то это означает, что все $l(a)$ пересекаются в одной точке t. Тогда $K+t$ покрывает X, так как опорные прямые к ним в любом направлении совпадают ($t \in l_+(a, X) - l_+(a, K) \Rightarrow 0 \in l_+(a, K+t) - l_+(a, X) \Rightarrow l_+(a, K+t) = l_+(a, X)$), и утверждение теоремы верно. Иначе пусть t_1, t_2 и t_3 – середины соответствующих сторон треугольника со сторонами на прямых $l(a_1)$, $l(a_2)$ и $l(a_3)$. В качестве искомых трансляций возьмем $K_i = K + t_i$.

Заменой знаков к a_i можно добиться того, что $(a_i, t_i - t_i) > 0$ $(i \neq j)$, что и будет в дальнейшем подразумеваться (см. рис. 6).

Возьмем на границе K точки y_i, принадлежащие $l_-(a_i, K)$. Докажем, что $y_i + t_i - t_j$ лежит в K (это будет означать, что $y_i + t_i \in K_j$, i, $j = 1, 2, 3$, см. рис. 7).

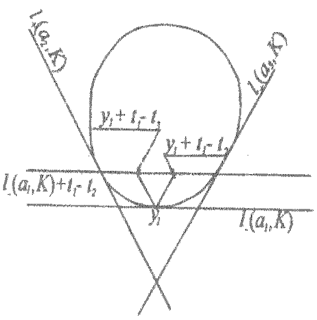

Рис. 7.

Докажем это, например, для $y_1 + t_1 - t_2$ и $y_1 + t_1 - t_3$, так как ситуация не меняется при выборе разных $i = 1, 2, 3$. В таком случае это будет следовать из того, что $l_+(a_2, K)$ или $l_+(a_3, K)$ не может пересекать K строго между $l_-(a_1, K)$ и $l_-(a_1, K) + t_1 - t_2 = l_-(a_1, K) + t_1 - t_3$ (последняя прямая содержит точки $y_1 + t_1 - t_2$ и $y_1 + t_1 - t_3$ – см. рис. 7) – в этом случае выпуклая оболочка точек касания $l_+(a_2, K)$ и $l_+(a_3, K)$ и точки y_1 содержит y_1, $y_1 + t_1 - t_2$

и $y_1 + t_1 - t_3$ и сама содержится в K. Без ограничения общности докажем для одной прямой, что $l_+(a_3, K)$ не может касаться K строго между $l_-(a_1, K)$ и $(l_-(a_1, K) + t_1 - t_2$. Сдвинем все на вектор t_2 и будем рассматривать K_2 вместо K. Тогда нам нужно доказать, что $l_+(a_3, K_2)$ не касается K_2 строго между $l_-(a_1, K_2)$ и $l_-(a_1, K_2) + t_1 - t_2 = l_-(a_1, K) + t_1 = l_-(a_1, X)$ (последнее равенство следует из того, что $t_1 \in l(a_1) = l_-(a_1, X) - l_-(a_1, K)$). Предположим противное и возьмем направление a, немного отличающееся от a_3 в сторону вращения к a_1 – тогда при достаточно малом отличии от a_3 прямые $l_+(a_3, K)$ и $l_+(a, K_2)$ будут пересекаться между $l_-(a_1, K_2)$ и $l_-(a_1, X)$ (см. рис. 8 – $l_+(a_3, K_2)$ касается K_2 строго между $l_-(a_1, K_2)$ и $l_-(a_1, X)$).

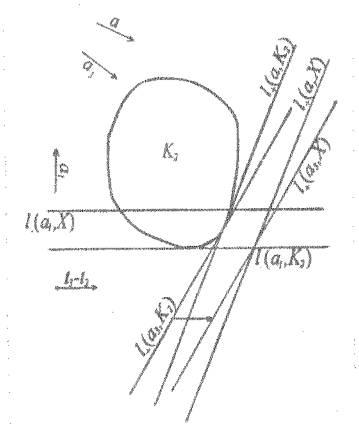

Рис. 8.

Но посмотрим теперь на прямые $l_+(a_3, X)$ и $l_+(a, X)$. Прямая $l_+(a_3, X)$ отличается от $l_+(a_3, K_2)$ сдвигом на вектор $t_3 - t_2$ в сторону a_3 (так как $t_3 \in l_+(a_3, X) - l_+(a_3, K_2)$, то есть $t_3 - t_2 \in l_+(a_3, X) - l_+(a_3, K_2)$). По лемме 5 прямая $l(a)$ пересекает треугольник из t_1, t_2 и t_3, а, в данном случае, обязана пересекать отрезок между t_2 и t_3. Так как $l(a) = l_+(a, X) - l_+(a, K) = l_+(a, X) - l_+(a, K_2) + t_2$, то прямая $l_+(a, X)$ отличается от прямой $l_+(a, K_2)$ сдвигом на вектор, меньший $t_3 - t_2$, в сторону a_3, а это означает, что $l_+(a_3, X)$ и $l_+(a, X)$ пересекаются по другую сторону от прямой $l_-(a_1, X)$ по сравнению с X также, как и прямые $l_+(a_3, K_2)$ и $l_+(a, K_2)$ (см. рис. 8). Из рисунка 8 также видно, что при таком расположении все три прямые $l_+(a, X)$, $l_+(a_3, X)$ и $l_-(a_1, X)$ не могут быть опорными для X – противоречие.

Итак, по доказанному точки y_i+t_i принадлежат всем K_j. Предположим, что K_j не покрывают X. Пусть $C = \operatorname{conv} \bigcup_{i=1,2,3} K_i$. Докажем,что $X \subseteq C$. Рассмотрев прямую, перпендикулярную некоторому направлению a, отделяющую какие-то точки X от C, получим противоречие с леммой 5, так как в этом случае выходит, что прямые $l_+(a, X) - l_+(a, K_i)$ лежат по одну сторону от начала координат, то есть все три точки t_i лежат по одну сторону от $l(a)$ – противоречие с леммой 5.

А так как $y_i + t_i$ принадлежат всем K_j, то C отличается от $\bigcup_{i=1,2,3} K_i$ на объединение множеств, лежащих внутри треугольников T_i, натянутых на точки $y_i + t_j$ $(j = 1, 2, 3$, см. рис. 9).

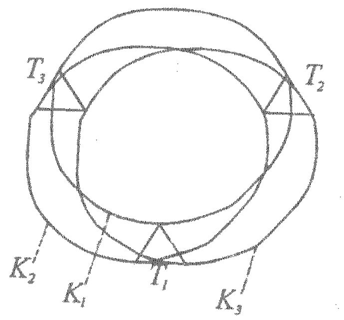

Рис. 9.

Но ΔT_i лежит по другую сторону от $l_-(a_i, X)$ по сравнению с X и, поэтому, не мешает $\bigcup_{i=1,2,3} K_i$ покрывать X.

Теорема 3 доказана.

Литература

1. L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, *Helly's theorem and its relatives.* Convexity, Proc. of Symposia in Pure Math., Am. Math. Soc., Providence, RI, **7**, 101–180 (1963).
2. Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли и ее применение.* Мир, М. (1968).
3. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* Наука, М. (1971).

4. J. Eckhoff, *Helly, Radon and Carathéodory type theorems.* Handbook of Convex Geometry, ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills. Amsterdam, North-Holland (1993).
5. H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee, *Combinatorial geometry in the plane.* Holt, Rinehart and Winston, New York (1964).
6. Г. Хадвигер, Г. Дебруннер, *Комбинаторная геометрия на плоскости.* Наука, М. (1965).
7. G. D. Chakerian, S. K. Stein, *Some intersection properties of convex bodies.* — Proc. Am. Math. Soc. **18** (1967), 109–112.
8. B. Grünbaum, *On intersection of similar sets.* — Portugal Math. **18** (1959), 155–164.
9. G. D. Chakerian, G. T. Sallee, *An intersection theorem for sets of constant width.* — Duke Math. J. **36** (1969), 165–170.
10. T. Bonnesen, W. Fenchel, *Theorie der convexen Körper.* Berlin (1934).
11. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, *Разбиение фигур на меньшие части.* Наука, М. (1971).
12. H. Maehara, *A remark on certain completion of a convex set.* — Math. Jap. **1** (1991), 47–49.
13. Р. Н. Карасев, *О трансверсалях семейства трансляций двумерного выпуклого компакта.* Соврем. пробл. мат. и информат. Ярославский гос. ун-т (1997), 19–21.

Karasev R. N. On transversals of the family of translates of two-dimensional convex compact.

The following theorem gives an affirmative answer to Grünbaum's old equistion. Let $\mathcal{K}$ be the family of translates of a convex compact set $K \subset \mathbb{R}^2$. If every two elements of $\mathcal{K}$ have a common point, then there exist three points A, B, $C \in \mathbb{R}^2$ such that every element of $\mathcal{K}$ contains some of these points.

Московский
физико-технический
институт

Поступило 20 июня 1998 г.