

ХАРАКТЕРИСТИКА ИНВАРИАНТНО ПОРЯДКОВО ОГРАНИЧЕННЫХ
МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L^p(\Omega, \mu)$.

0. Введение. В работе [1] В.Н.Судаков доказал, что подмножество B пространства L^2 остается порядково ограниченным под действием любых унитарных преобразований в том и только том случае, когда оно содержится в некотором эллипсоиде Гильберта-Шмидта. При этом существует такая константа C , что $\|\sup U(B)\| \leq C$ для любого унитарного оператора U . Другим путем эти утверждения получены в [3], [4]. Позже (см. [2]) В.Н.Судаков дополнил свои результаты следующим предложением: если абсолютно выпуклое множество $B \subset L^2(0,1)$ не содержится ни в каком эллипсоиде Гильберта-Шмидта, то существует такой унитарный оператор U , что $\sup U(B) = +\infty$ п.в.

Наша заметка посвящена доказательству аналогичных фактов для пространства L^p при $1 < p < +\infty$. Весьма существенным для нас будет понятие p -абсолютно суммирующего оператора (см. [5], [6]), впервые примененное в этом круге вопросов в [3].

I. Основные определения и обозначения. Под оператором (отображением) везде ниже понимается линейное непрерывное отображение одного B -пространства в другое. Символом $L(X, Y)$ ($L(X)$) обозначается пространство всех отображений пространства X в пространство Y (соответственно, в себя). Оператор $U \in L(X, Y)$ называется ε -изометрией, если он обратим и $\|U\| \cdot \|U^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$. Если $p \in [1, +\infty)$, то под p везде ниже понимается число $\frac{p}{p-1}$, когда $p > 1$ и ∞ , когда $p = 1$.

Оператор $U \in L(X, Y)$ называется **абсолютно суммирующим**, если существует такое число C , что для любого конечного набора векторов $\{x_k\}_{k=1}^N \subset X$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^N \|Ux_k\|^p \leq C^p \cdot \sup \left\{ \sum_{k=1}^N |\langle x_k, x' \rangle|^p : x' \in X^*, \|x'\| \leq 1 \right\}.$$

Пусть $p \in [1, +\infty)$, X - B -пространство, $y_k \in X (k=1, 2, \dots)$,
 $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^p < +\infty$. Множество

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(\{y_k\}_{k=1}^{\infty}) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t_k y_k : \sum_{k=1}^{\infty} |t_k|^{p'} \leq 1 \right\}$$

будем называть ρ -эллипсоидом ^{*)} в X .

Ясно, что ρ -эллипсоид есть компактное множество. Как нетрудно убедиться, подмножество гильбертова пространства является \mathcal{L} -эллипсоидом тогда и только тогда, когда оно есть эллипсоид Гильберта-Шмидта, т.е. \mathcal{L} -эллипсоид, построенный с помощью ортогональной системы векторов $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Нам понадобятся некоторые факты из теории частично упорядоченных пространств. Используемая нами терминология соответствует принятой в монографии [8]. Пусть $X - KB$ - линейал. Множество $B \subset X$ мы будем называть инвариантно порядково ограниченным (и.п.о.) множеством, если его образ при любом отображении из X в X остается порядково ограниченным в X .

Легко убедиться, что мы получим равносильное определение и.п.о. множества, если вместо всевозможных отображений пространства X в себя будем рассматривать только ε -изометрии при произвольном фиксированном $\varepsilon > 0$. Если $X = L^2(\Omega, \mu)$, то, как фактически установлено в [1] и [3], в определении и.п.о. множества можно ограничиться унитарными операторами.

Если $X - B$ - пространство, а $Y - KB$ - линейал, то оператор $U \in L(X, Y)$ называется правильным (см. [10]), если образ $U(\mathcal{D})$ единичного шара $\mathcal{D}_1 \subset X$ порядково ограничен в Y . В случае, когда $Y = L^p(\Omega, \mu)$, понятие правильного оператора равносильно понятию $(b-0)$ -линейного оператора (см. [8], [9]). Если $p \in (1, +\infty)$, то оператор $U \in L(L^p(\Omega, \mu), L^p(\tilde{\Omega}, \mu))$ правилен тогда и только тогда, когда правилен оператор U^* (см. [7], теорема 3; [9], гл. УШ, п^o 6.33).

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $X - KB$ - линейал, B - и.п.о. множество в X . Определим на $L(X)$ функцию ρ равенством

$$\rho(U) = \sup \{ \| \|Ux_1\| \vee \|Ux_2\| \vee \dots \vee \|Ux_n\| \| : \{x_k\}_{k=1}^n \subset B, n=1,2,\dots \} \quad (U \in L(X)).$$

Предложение I. Функция ρ есть непрерывная полунорма в $L(X)$ (и, следовательно, существует такая константа C , что $\rho(U) \leq C \|U\|$ ($U \in L(X)$)).

Доказательство. То, что ρ - полунорма, тривиально. Чтобы доказать непрерывность, достаточно убедиться, что множество $\{U \in L(X) : \rho(U) \leq 1\}$ замкнуто в $L(X)$. Это немедленно следует из непрерывности структурных операций в X .

^{*)} Легко видеть, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t_k y_k$ безусловно сходится (см. [11], лемма 2).

Следствие. Пусть X - KB - пространство, B - и.п.о. множество в X . Существует такая константа C , что

$$\|\sup\{\|Ux\| : x \in B\}\| \leq C \|U\| \quad (U \in L(X)).$$

Действительно, так как X - KB - пространство, то (см. [8], гл. УП, § 6)

$$\|\sup\{\|Ux\| : x \in B\}\| = \rho(U).$$

Лемма. Пусть $p \in (1, +\infty)$, X - B -пространство $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ произвольное не более чем счетное семейство векторов пространства X , удовлетворяющее условию:

$$\sum_\alpha |\langle x_\alpha, x' \rangle|^p < +\infty \quad (x' \in X^*).$$

Пусть, далее, (Ω, μ) - пространство с мерой, $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - семейство попарно не пересекающихся подмножеств множества Ω таких, что $0 < \mu e_\alpha < +\infty$ ($\alpha \in A$)

Тогда существует оператор

$V \in L(L^p(\Omega, \mu), X)$, удовлетворяющий условиям *)

$$1) \quad V(\chi_{e_\alpha}) = (\mu e_\alpha)^{\frac{1}{p}} x_\alpha \quad (\alpha \in A);$$

$$2) \quad \|V\| \leq \sup\{(\sum |\langle x_\alpha, x' \rangle|^p)^{\frac{1}{p}} : x' \in X^*, \|x'\| \leq 1\}.$$

Доказательство. Рассмотрим подпространство $L \subset L^p(\Omega, \mu)$ состоящее из функций вида $\sum_\alpha \lambda_\alpha \chi_{e_\alpha}$, $\sum_\alpha |\lambda_\alpha|^p \mu e_\alpha < +\infty$. Очевидно, что отображение Q , определяемое равенством

$$Qx = \sum_\alpha (\mu e_\alpha)^{-1} \left(\int_{e_\alpha} x d\mu \right) \cdot \chi_{e_\alpha} \quad (x \in L^p(\Omega, \mu))$$

есть проектирование $L^p(\Omega, \mu)$ на L и $\|Q\| = 1$. Поэтому искомым оператором V достаточно задать лишь на L . Для $x \in L$, $x =$

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \chi_{e_\alpha} \quad \text{мы полагаем}$$

*) Символом χ_E мы обозначаем характеристическую функцию множества E . Везде далее мы отождествляем измеримую функцию и соответствующий ей класс эквивалентности.

$$Vx = \sum_x \lambda_x (\mu e_x)^{\frac{1}{p'}} x_x.$$

(Заметим, что ряд $\sum_x \lambda_x (\mu e_x)^{\frac{1}{p'}} \cdot x_x$ безусловно сходится в X). Ясно, что оператор V линеен и удовлетворяет условию I). Если $x' \in X^*$, то

$$\begin{aligned} \langle Vx, x' \rangle &= \sum_x \lambda_x (\mu e_x)^{\frac{1}{p'}} \langle x_x, x' \rangle \leq \\ &\leq \left(\sum_x |\lambda_x|^{p'} \mu e_x \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_x |\langle x_x, x' \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_x |\langle x_x, x' \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|x\|. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает требуемая оценка для $\|V\|$. Лемма доказана.

3. Основной результат. Теперь мы в состоянии получить теорему, являющуюся нашей главной целью.

Теорема. Пусть $p \in (1, +\infty)$, $B \subset L^p(\Omega, \mu)$. Эквивалентны утверждения

- 1) B - и.п.о. множество в $L^p(\Omega, \mu)$;
- 2) существуют компактное пространство K , конечная мера Радона ν на нем и правильный оператор $T \in L(L^p(K, \nu), L^p(\Omega, \mu))$ такие, что $B \subset T(D_1)$, где D_1 - замкнутый единичный шар в $L^p(K, \nu)$;

3) существует p -эллипсоид $\mathcal{E}_p \subset L^p(\Omega, \mu)$, содержащий множество B .

Замечание 1. Как известно, и.п.о. множества в $L^1(\Omega, \mu)$ совпадают с порядково ограниченными множествами (см. [8], теорема УШ.7.2). Поэтому при $p=1$ утверждения 1) и 2) теоремы остаются равносильными. Верна, очевидно, также импликация 3) \Rightarrow 1). Обратная импликация не верна.

Замечание 2. Можно доказать, что при $p \in (1, +\infty)$, $p \neq 2$ из инвариантной порядковой ограниченности множества B в $L^p(\Omega, \mu)$ не следует порядковая ограниченность в пространстве $L^1(\tilde{\Omega}, \tilde{\mu})$ множества $V(B)$, где $V \in L(L^p(\Omega, \mu), L^1(\tilde{\Omega}, \tilde{\mu}))$. Соответствующий пример при $p < 2$ мы получаем, рассматривая построенное в [12] изоморфное вложение W пространства l^p в $L^1(0, 1)$. Если \mathcal{E}_p - эллипсоид в l^p , построенный с помощью последовательности векторов $\{\alpha_k e_k\}_{k=1}^{\infty}$, где e_k - канонические орты в l^p , $\alpha_k > 0$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^r \ln \alpha_k = \infty$, то используя теорему XXVI.2.3 из [13], мы видим, что $\sup W(\mathcal{E}_p) = +\infty$ п.в. Вме-

сте с тем легко убедиться, что при любом отображении из $L^2(\Omega, \mu)$ в произвольное КВ-пространство X образ эллипсоида Гильберта-Шмидта порядково ограничен в X .

Доказательство теоремы. Мы проведем доказательство по схеме: 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1).

1) \Rightarrow 2). Не умаляя общности можно считать, что и.п.о. множество B абсолютно выпукло и замкнуто. Пусть X_B - банахово пространство, получающееся, если в линейной оболочке множества B ввести норму с помощью функционала Минковского, построенного по B , и пусть i - тождественное вложение X_B в $L^p(\Omega, \mu)$. Наша ближайшая цель - доказать, что оператор i^* - p -абсолютно суммирующий.

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^N$ - произвольное конечное семейство векторов в $L^p(\Omega, \mu)$. Рассмотрим семейство $\{e_k\}_{k=1}^N$ ($e_k \subset \Omega$) попарно дизъюнктивных множеств конечной положительной меры и зафиксируем оператор $V \in L(L^p(\Omega, \mu))$, удовлетворяющий условиям:

$$1) V(\chi_{e_k}) = (\mu e_k)^{\frac{1}{p}} x_k \quad (k=1, 2, \dots, N),$$

$$2) \|V\| \leq \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^N |\langle x_k, x' \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} : x' \in L^p(\Omega, \mu), \|x'\| \leq 1 \right\}.$$

Существование такого оператора гарантируется леммой. Пусть $Z_0 = \text{supp } V^*(B)$. По условию $Z_0 \in L^p(\Omega, \mu)$ и, по следствию к предложению I, существует такое число $C = C_B$ (не зависящее от V), что $\|Z_0\| \leq C \|V^*\|$. Займемся теперь оценкой суммы

$\sum_{k=1}^N \|i^* x_k\|^p$. Зафиксируем такие векторы $z_k \in X_B$ ($k=1, 2, \dots, N$), что $\|z_k\| \leq 1$ (т.е. $z_k \in B$) и $\|i^* x_k\| \leq 2 |\langle i^* x_k, z_k \rangle|$. Далее имеем:

$$\sum_{k=1}^N \|i^* x_k\|^p \leq 2^p \sum_{k=1}^N |\langle i^* x_k, z_k \rangle|^p =$$

$$= 2^p \sum_{k=1}^N |\langle i^* V(\mu e_k)^{-\frac{1}{p}} \chi_{e_k}, z_k \rangle|^p =$$

$$= 2^p \sum_{k=1}^N (\mu e_k)^{-\frac{p}{p'}} |\langle \chi_{e_k}, V^* i z_k \rangle|^p \leq$$

$$\leq 2^p \sum_{k=1}^N (\mu e_k)^{-\frac{p}{p'}} |\langle \chi_{e_k}, z_0 \rangle|^p =$$

$$= 2^p \sum_{k=1}^N (\mu e_k)^{-\frac{p}{p'}} \left(\int_{e_k} z_0 d\mu \right)^p \leq 2^p \|z_0\|^p \leq$$

$$\leq 2^p C^p \|V\|^p \leq 2^p C^p \sup \left\{ \sum_{k=1}^N |\langle x_k, x' \rangle|^p : x' \in L^p(\Omega, \mu), \|x'\| \leq 1 \right\}.$$

Полученная для $\sum_{k=1}^N \|i^* x_k\|^p$ оценка показывает, что i^* - p -абсолютно суммирующий оператор. Вследствие этого оператор i^* можно включить в коммутативную диаграмму (см. [5], теорема 3):

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega, \mu) & \xrightarrow{i^*} & X_B^* \\ \pi \downarrow & & \searrow j \\ C(K) & \xrightarrow{id} & L^p(K, \nu) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \nearrow s \\ \end{array} \rightarrow Z$$

Здесь Z - некоторое B -пространство, K - компакт, ν - конечная мера Радона на K , id - тождественное вложение, j - изометрическое вложение, π , s - непрерывные операторы. Пусть $R = id \cdot \pi$. Ясно, что оператор R правильный. Переходя к сопряженным операторам получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega, \mu) & \xleftarrow{i^{**}} & X_B^{**} \\ R^* \uparrow & & \uparrow j^* \\ L^p(K, \nu) & \xleftarrow{s^*} & Z^* \end{array}$$

Так как j^* есть открытое отображение Z^* на X_B^{**} , то образ некоторого шара $\mathcal{D} \subset Z^*$ содержит единичный шар B^{**} пространства X_B^{**} . Ясно также, что при достаточно большом $\lambda > 0$ имеет место включение $S^*(\mathcal{D}) \subset \lambda \mathcal{D}_1$, где \mathcal{D}_1 - единичный шар пространства $L^p(K, \nu)$. Подытоживая, получаем:

$$B \subset i^{**}(B^{**}) \subset i^{**}(j^*(\mathcal{D})) = R^*(S^*(\mathcal{D})) \subset \lambda R^*(\mathcal{D}_1).$$

Так как вместе с оператором R оператор R^* также правилен, то искомым оператором T мы получим, положив $T = \lambda R^*$.

2) \Rightarrow 3). Правильный оператор $T \in L(L^p(K, \nu), L^p(\Omega, \mu))$ представим в виде (см. [7], теоремы 2, 3)

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k \otimes y_k \quad , \text{ где } x'_k \in L^p(K, \nu), y_k \in L^p(\Omega, \mu),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x'_k, x \rangle|^{p'} < +\infty \quad (x \in L^p(K, \nu)), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^p < +\infty$$

Не умаляя общности, можно считать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x'_k \rangle|^{p'} \leq \|x\|^{p'} \quad (x \in L^p(K, \nu)).$$

Тогда эллипсоид $\mathcal{E}_p = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t_k y_k : \sum_{k=1}^{\infty} |t_k|^p \leq 1 \right\}$ - искомый.

3) \Rightarrow 1). Достаточно доказать, что всякий p -эллипсоид $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(\{y_k\}_{k=1}^{\infty})$ есть и.п.о. множество в $L^p(\Omega, \mu)$. Пусть $z = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Так как $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^p < +\infty$, то $z \in L^p(\Omega, \mu)$

и $|x| \leq z$ для любого $x \in \mathcal{E}_p$. Следовательно, p -эллипсоид является порядково ограниченным множеством в $L^p(\Omega, \mu)$. Так как образ p -эллипсоида при любом отображении, очевидно, снова есть p -эллипсоид, то \mathcal{E}_p - и.п.о. множество в $L^p(\Omega, \mu)$. Теорема доказана.

В заключение приведем без доказательства два предложения, показывающие, что не и.п.о. множество в пространстве $L^p(0,1)$ может быть "повернуто" так, что его образ не будет порядково ограничен даже в пространстве всех измеримых почти везде конечных функций.

Предложение 2. Пусть $p \in [1, +\infty)$, $\varepsilon \in (0,1)$, B - абсолютно выпуклое подмножество пространства $L^p(0,1)$, φ - произвольная невозрастающая определенная на $(0,1)$ функция. Если $\text{supr } B \notin L^p(0,1)$, то существует такая изометрия U_0 пространства $L^p(0,1)$, что $\text{supr } U_0(B) \geq \varphi$ п.в. на $(0,1-\varepsilon)$.

Предложение 3. Пусть $p \in [1, +\infty)$, $\varepsilon \in (0,1)$, B - абсолютно выпуклое подмножество пространства $L^p(0,1)$. Если B - не и.п.о. множество в $L^p(0,1)$, то существует такое ε -изометрическое отображение U_0 пространства $L^p(0,1)$ на себя, что $\text{supr } U_0(B) = +\infty$ п.в. на $(0,1)$.

Замечание. В работе [2] для случая $p=2$ получен более сильный результат: найдется унитарный оператор U_0 такой, что $\text{supr } U_0(B) = +\infty$ п.в. на $(0,1)$. При $p \neq 2$ нельзя отказаться от рассмотрения ε -изометрий, так как изометрии пространства $L^p(0,1)$ преобразуют всякое порядково ограниченное подмножество пространства $L^p(0,1)$ снова в порядково ограниченное подмножество. Это немедленно вытекает из общего вида изометрий пространства $L^p(0,1)$ при $p \neq 2$ (см. [14], стр.151).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Судаков В.Н. Об одном классе компактов гильбертова пространства. Успехи матем. наук, 1963, № 18, I(109), 182-187.
 [2] Судаков В.Н. Диссертация. Л.Г.У. 1972.

- [3] Slowikowski W. Absolut 2-summing Mappings from and to Hilbert Spaces and a Sudakov Theorem. Bull. Acad. Polon. Sc. ser. Math., 1969, XVII, 381-386.
- [4] Dudley R. Small operators between Banach and Hilbert spaces. Studia Math. 1970, v. 38, 35-41.
- [5] Pietsch A. Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen. Studia Math. 1967, t. 28, 333-353.
- [6] Persson A., Pietsch A. p -nukleare und p -integrale Abbildungen in Banachräumen. Studia Math., 1969, t. 33, 19-62.
- [7] Persson A. On some properties of p -nuclear und p -integral operators. Studia Math. 1969, t. 33, 213-222.
- [8] Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., Физматгиз, 1961.
- [9] Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.Л., Гостехиздат, 1950.
- [10] Левин В.Л. О двух классах линейных отображений, действующих между банаховыми пространствами и банаховыми решетками. Сиб.Мат.ж., 1969, т. X, № 4, 903-910.
- [11] Bessaga C., Pelczynski A. On basis and unconditional convergence of series in Banach spaces. Studia Math. 1958, t. XVII, 151-164.
- [12] Кадец М.И. О линейной размерности пространств L_p и ℓ_p . Успехи матем. наук, 1958, № 13, 6(84), 95-98.
- [13] Schwartz L. Seminaire 1969-1970 Applications radionifiantes. Expose XXVI.
- [14] Банах С. Курс функционального анализа. Радянська школа. Київ, 1948.