

УДК 517.927.4

## О ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЯХ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ю. А. Клоков

Теория верхних и нижних функций для краевых задач дифференциального уравнения второго порядка разработана достаточно хорошо [1 — 5]. Но уже для дифференциального уравнения третьего порядка теория верхних и нижних функций до сих пор разработана недостаточно. Некоторые результаты по этой проблеме можно найти в работах [6 — 8] и в статьях указанных в этих работах.

1. Для выяснения возникающих здесь трудностей обратимся к некоторым примерам.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''' = f(t, x), \quad (1)$$

$$x(0) = a_0, \quad x'(0) = a_1, \quad x'(\tau) = b_1, \quad (2)$$

где  $x \in R$ ,  $t \in I = [0, \tau]$ ,  $I_0 = (0, \tau)$ ,  $a_0, a_1, b_1 \in R$ ,  $R = (-\infty, +\infty)$ ,  $R_+ = [0, \infty)$ ,  $R_- = (-\infty, 0]$ ,  $f \in C(I \times R)$  и для некоторого ( $H > 0$ ) выполняется условие

$$f(t, x) \geq -H \quad \forall (t, x) \in (I \times R_+), \quad f(t, x) \leq H \quad \forall (t, x) \in (I \times R_-). \quad (A_0)$$

**Теорема 1.** *При выполнении условия  $(A_0)$  решение задачи (1), (2) существует для любых граничных данных.*

Доказательство этого результата легко получается методом стрельбы, изменением параметра  $x''(0) = \gamma$ ,  $\gamma \in R$ , от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Для доказательства существования решения задачи (1), (2) можно использовать также верхние и нижние функции, определенные в работе [6], следующим образом.

Для  $x, y, z \in R$ ,  $x \leq z$ , обозначим через  $\delta(x, y, z)$  непрерывную функцию:

$$\delta(x, y, z) = \begin{cases} z, & y > z, \\ y, & x \leq y \leq z, \\ x, & y < x. \end{cases}$$

Пусть найдутся функции  $\alpha, \beta \in C^3(I)$  такие, что  $\alpha(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$ ,

$$\alpha(0) \leq a_0 \leq \beta(0), \quad \alpha'(0) \leq a_1 \leq \beta'(0), \quad \alpha'(\tau) \leq b_1 \leq \beta'(\tau),$$

$$\beta'''(t) \leq f(t, \delta(\alpha(t), u(t), \beta(t))) \quad \forall t \in I, \quad \alpha'''(t) \geq f(t, \delta(\alpha(t), u(t), \beta(t))) \quad \forall t \in I, \quad (3)$$

причем неравенства (3) должны выполняться для любой функции  $u \in C(I)$ . Тогда решение задачи (1), (2) существует. Уравнение

$$x''' = \sigma x \quad (4)$$

с условиями  $x(0) = x'(0) = x'(\tau) = 0$ ,  $\sigma \geq 0$  имеет единственное решение  $x(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$ . Для этой задачи из (3) находим, что

$$\beta'''(t) \leq \sigma \delta(\alpha(t), u(t), \beta(t)), \quad \alpha'''(t) \geq \sigma \delta(\alpha(t), u(t), \beta(t)). \quad (5)$$

Полагая в (5)  $u(t) \equiv \beta(t) \geq 0$ , получаем, что

$$\beta''' = \sigma\beta - \varepsilon_1(t), \quad (6)$$

$$\alpha''' = \sigma\beta + \varepsilon_2(t). \quad (7)$$

Аналогично полагая  $u(t) \equiv \alpha(t) \leq 0$ , имеем

$$\beta''' = \sigma\alpha - \varepsilon_3(t), \quad (8)$$

$$\alpha''' = \sigma\beta + \varepsilon_4(t). \quad (9)$$

(Здесь и далее через  $\varepsilon_i(t) \geq 0 \quad \forall t \in I \quad (i = \overline{1, 12})$  будут обозначены некоторые непрерывные функции.) Из (8), (7), обозначая  $\beta - \alpha = z$ , найдем

$$z''' = -\sigma z - \varepsilon_5(t), \quad z(0) \geq 0, \quad z'(0) \geq 0, \quad z'(\tau) \geq 0. \quad (10)$$

Однако если  $\sigma > 0$  — собственное значение задачи  $z''' = -\sigma z$ ,  $z(0) = z'(0) = z'(\tau) = 0$  ( $\sigma\tau^3 = s_1^3$ , где  $s_1 > 0$  — первый положительный корень уравнения  $2 \sin(\sqrt{3}s/2 + \pi/6) = \exp(-3s/2)$ ), то задача (10), вообще говоря, решения не имеет. В нашем же случае можно утверждать, что если  $\sigma$  больше первого собственного значения, то из уравнений (6) — (10) необходимо следует  $z(t) \equiv 0$ ,  $\alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv x(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$ . (Здесь эти элементарные рассуждения не приводим.) Другими словами, если в задаче (4), (2)  $\sigma > 0$  достаточно мало, то верхние и нижние функции построить можно. Если же  $\sigma$  больше первого собственного значения, то ничего доказать нельзя, хотя решение задачи (4), (2) существует для любых  $\sigma, \tau > 0$ . (Заметим, что функция  $f = \sigma x$ ,  $\sigma \geq 0$ , удовлетворяет условию  $(A_0)$ .) Если для произвольной непрерывной функции  $f$  условия (3) записать в виде

$$\beta'''(t) \leq f(\beta(t)) \quad \forall t \in I, \quad (11)$$

$$\alpha'''(t) \geq f(t, \alpha(t)) \quad \forall t \in I, \quad (12)$$

т.е. так, как они пишутся в краевых задачах для уравнения второго порядка, то можно построить примеры краевых задач вида (1), (2), которые заведомо решения не имеют, но для которых существуют  $\alpha, \beta$ , удовлетворяющие неравенствам (11), (12), либо решение существует, но не удовлетворяет оценкам  $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$ . Эти примеры достаточно сложны и здесь мы их не приводим.

Аналогичная ситуация имеет место и в том случае, когда в (2) вместо условия  $x'(\tau) = b_1$  будет условие  $x(\tau) = b_0$  или условие  $x''(\tau) = b_2$ .

2. В этом пункте будем изучать задачу  $x(0) = a_0$ ,  $x'(0) = a_1$ ,  $x(\tau) = b_0$  для уравнения (1). Отметим, что с помощью замены  $x = l(t) + z$  где  $z$  — новая искомая функция и

$$l(t) = a_0(1 - t/\tau + t(\tau - t)/\tau^2) + a_1 t(\tau - t)/\tau + b_0(t/\tau - t(\tau - t)/\tau^2), \quad (13)$$

получим для  $z$  задачу  $z''' = f_0(t, z)$ ,  $z(0) = z'(0) = z(\tau) = 0$ , где  $f_0(t, z) = f(t, z + l(t))$ , и если, например, функция  $f$  удовлетворяла условию  $(A_0)$ , то функция  $f_0$  также будет удовлетворять условию  $(A_0)$  но лишь с другой постоянной  $H$ . Поэтому в дальнейшем будем изучать для уравнения (1) задачу

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad x(\tau) = 0. \quad (14)$$

Задача (1), (14) может быть записана в виде интегрального уравнения

$$x(t) = \int_0^\tau G_0(t, s) f(s, x(s)) ds, \quad (15)$$

где  $G_0(t, s) < 0$ ,  $t, s \in (0, \tau)$ , — функция Грина для уравнения  $x''' = 0$  с условиями (14):

$$G_0(t, s) = \begin{cases} -(t^2/(2\tau^2))(\tau - s)^2, & 0 \leq t \leq s \leq \tau, \\ -(1/(2\tau^2))(\tau - t)^2 s [\tau(t - s) + t(\tau - s)], & 0 \leq s \leq t \leq \tau. \end{cases}$$

Очевидно, что функция Грина существует для любого  $\tau > 0$ . Для уравнения  $x''' = -H(t)$ , где  $H(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$  ( $H(t) \in C(I)$ ), из (15) следует, что

$$x(t) = - \int_0^\tau G_0(t, s)H(s)ds \geq 0 \quad \forall t \in I. \quad (16)$$

Заметим, что если  $H(t) \equiv H$ ,  $t \in I$  ( $H = \text{const}$ ), то из (16) получаем

$$\bar{x}(t) = (H/6)(\tau t^2 - t^3), \quad \bar{x}(t) > 0, \quad t \in I_0. \quad (17)$$

Теперь дадим определение нижней и верхней функций для задачи (1), (14).

**Определение.** Назовем функции  $\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C^3(I)$  соответственно нижней и верхней функциями задачи (1), (14), если они удовлетворяют граничным условиям (14) и для любой функции  $u(t) \in C(I)$  выполняются неравенства

$$\alpha_0'''(t) \geq f(t, \delta(\alpha_0(t), u(t), (\alpha_0(t) + \beta_0(t))/2)) \quad \forall t \in I, \quad (18)$$

$$\beta_0'''(t) \leq f(t, \delta((\alpha_0(t) + \beta_0(t))/2, u(t), \beta_0(t))) \quad \forall t \in I. \quad (19)$$

В дальнейшем нас особо будет интересовать частный случай, когда  $\alpha_0(t) + \beta_0(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$ . В этом случае назовем  $\beta(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$  верхней функцией задачи (1), (14), если  $\beta(t)$  удовлетворяет граничным условиям (14) и для любой функции  $u(t) \in C(I)$  справедливо неравенство

$$\beta'''(t) \leq f(t, \delta(0, u(t), \beta(t))) \quad \forall t \in I. \quad (20)$$

Аналогично функцию  $\alpha(t) \equiv -\beta(t)$  назовем нижней функцией, если

$$\alpha'''(t) \geq f(t, \delta(\alpha(t), u(t), 0)) \quad \forall t \in I. \quad (21)$$

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (20), (21). Тогда решение задачи (1), (14) существует, причем справедливы оценки

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I, \quad (22)$$

$$|x'(t)| \leq |\beta'(\tau)| \quad \forall t \in I. \quad (23)$$

**Замечание 1.** Если функция  $f$  удовлетворяет условию  $(A_0)$ , то в качестве  $\beta(t)$  можно взять функцию  $\bar{x}(t)$ , определенную равенством (17), соответственно  $\alpha(t) = -\bar{x}(t)$ ,  $t \in I$ .

**Доказательство теоремы 2.** Обозначим  $h(t) = -\beta'''(t) \quad \forall t \in I$  и покажем, что  $h(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$ . Полагая в (20), (21)  $u(t) \equiv 0$ , находим, что  $\beta'''(t) = f(t, 0) - \varepsilon_6(t)$ ,  $\alpha'''(t) = f(t, 0) + \varepsilon_7(t) \quad \forall t \in I$ , откуда следует, что  $2\beta'''(t) = -\varepsilon_6(t) - \varepsilon_7(t)$ , и поэтому  $h(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$ . Будем предполагать в дальнейшем, что  $h(t) \not\equiv 0$ ,  $t \in I$ . (Если  $h(t) \equiv 0$ , то  $\alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv 0$ , и решением задачи (1), (14) является функция  $x(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$ .) Функцию  $\beta(t)$  можно определить как решение краевой задачи

$$\beta''' = -h(t), \quad \beta(0) = \beta'(0) = 0, \quad \beta(\tau) = 0. \quad (24)$$

Обозначим  $\beta''(0) = \sigma_0$ ,  $\sigma_0 > 0$ . Очевидно, что функцию  $\beta(t)$  можно определить и как решение задачи Коши  $\beta(0) = \beta'(0) = 0$ ,  $\beta''(0) = \sigma_0$ . В дальнейшем нам понадобится также функция  $\beta_\sigma(t)$ , определенная условиями

$$\beta_\sigma''' = -h(t), \quad \beta_\sigma(0) = \beta_\sigma'(0) = 0, \quad \beta_\sigma''(0) = \sigma \quad (\sigma > \sigma_0). \quad (25)$$

Таким образом,

$$\beta_\sigma(t) = (1/2)(\sigma - \sigma_0)t^2 + \beta(t), \quad t \in I. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь вспомогательное уравнение

$$x''' = f(t, \delta(\alpha(t), x, \beta(t))). \quad (27)$$

Так как для уравнения  $x''' = 0$  задача (14) имеет только нулевое решение, а правая часть уравнения (27) ограничена некоторой постоянной, то решение задачи (27), (14) существует (по теореме существования [2, с. 25]). Обозначим его через  $x(t)$ ,  $t \in I$ . Если  $x(t) \equiv \beta(t)$  или  $x(t) \equiv \alpha(t)$ ,  $t \in I$ , то теорема доказана. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что  $x(t) \neq \beta(t)$ ,  $x(t) \neq \alpha(t)$ ,  $t \in I$ .

Докажем, что для  $x(t)$  выполняется оценка (22). Пусть это не так и, например, при некотором  $t$  будет  $x(t) > \beta(t)$ . Рассмотрим два случая:  $|x''(0)| > \beta''(0) = \sigma_0$  и  $|x''(0)| \leq \sigma_0$ . Покажем, что первый случай невозможен. Пусть  $x''(0) > \sigma_0$ . Тогда существует  $t_1 \in (0, \tau]$  такое, что  $x(t) \geq \beta(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ ,  $x(t_1) = \beta(t_1)$ . Полагая в (20)  $u(t) = x(t)$  и учитывая, что  $\delta(0, x(t), \beta(t)) = \beta(t)$ ,  $\delta(\alpha(t), x(t), \beta(t)) = \beta(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ , найдем из (20), (27)  $\beta''' = f(t, \beta) - \varepsilon_8(t)$ ,  $x'''(t) = f(t, \beta(t))$ , откуда следует, что  $x''' - \beta''' = \varepsilon_8(t) \geq 0$ , поэтому  $x - \beta \leq 0 \forall t \in [0, t_1]$ . Аналогичное противоречие получаем и тогда, когда  $x''(0) < -\sigma_0$ . Таким образом, случай  $|x''(0)| > \sigma_0$  невозможен.

Рассмотрим теперь случай, когда  $|x''(0)| \leq \sigma_0$ . Полагая в (20), (21)  $u(t) = x(t)$  и учитывая, что  $\beta''' = -h(t)$ ,  $t \in I$ , найдем, что

$$-h(t) = f(t, \delta(0, x(t), \beta(t))) - \varepsilon_9(t), \quad t \in I, \quad (28)$$

$$h(t) = f(t, \delta(\alpha(t), x(t), 0)) + \varepsilon_{10}(t), \quad t \in I. \quad (29)$$

Теперь для тех  $t$ , для которых  $x(t) \geq 0$ , из (27), (28) получаем

$$\begin{aligned} x(t)x'''(t) &= x(t)[f(t, \delta(\alpha(t), x(t), \beta(t))) + h(t) - h(t)] = \\ &= x(t)[f(t, \delta(\alpha(t), x(t), \beta(t))) - f(t, \delta(0, x(t), \beta(t))) + \varepsilon_9(t) - h(t)] = \\ &= x(t)\varepsilon_9(t) - h(t)x(t) = \gamma_1(t) - x(t)h(t), \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\gamma_1(t) = \varepsilon_9(t)x(t) \geq 0$ . Аналогично для тех  $t \in I$ , для которых  $x(t) \leq 0$ , из (27), (29) находим, что  $x(t)x'''(t) = \gamma_2(t) - |x(t)|h(t)$ , где  $\gamma_2(t) = -\varepsilon_{10}(t)x(t) \geq 0$ , откуда и из (30) следует, что

$$x(t)x'''(t) = \gamma(t) - h(t)|x(t)| \quad \forall t \in I, \quad (31)$$

где  $\gamma(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$  ( $\gamma(t) = \gamma_1(t) \geq 0$ , если  $x(t) \geq 0$ , и  $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ , если  $x(t) \leq 0$ ).

Введем в рассмотрение две функции:  $U(t) = x^2(t)/2$ ,  $V_\sigma(t) = \beta_\sigma^2(t)/2$ , где  $\beta_\sigma(t)$  определяется формулой (26). Тогда

$$U'' = x(t)x''(t) + x'^2(t), \quad V_\sigma'' = \beta_\sigma(t)\beta_\sigma''(t) + \beta_\sigma'^2(t). \quad (32)$$

Пусть при некотором  $t \in I_0$   $x(t) > \beta(t)$  (или  $x(t) < \alpha(t)$ ). Выберем  $\sigma > \sigma_0$  таким образом, чтобы график функции  $V_\sigma(t)$  касался графика  $U(t)$  в некоторой точке  $t = t_0 \in I_0$  и чтобы

$$U(t_0) = V_\sigma(t_0), \quad U'(t_0) = V_\sigma'(t_0), \quad U''(t_0) \leq V_\sigma''(t_0) \quad (33)$$

и при  $0 < t < t_0$   $U(t) < V_\sigma(t)$ . Интегрируя (31) от  $t = 0$  до  $t = t_0$ , получаем

$$x(t_0)x''(t_0) = \frac{x'^2(t_0)}{2} + \gamma_* - \int_0^{t_0} h(t)|x(t)| dt, \quad (34)$$

где  $\gamma_* = \int_0^{t_0} \gamma(s) ds \geq 0$ . И аналогично, умножая (25) на  $\beta_\sigma(t)$  и интегрируя, найдем, что

$$\beta_\sigma(t_0)\beta_\sigma''(t_0) = \frac{1}{2}\beta_\sigma'^2(t_0) - \int_0^{t_0} h(t)\beta_\sigma(t) dt. \quad (35)$$

Теперь из (32) с учетом (34), (35) имеем

$$U''(t_0) - V''_\sigma(t_0) = \frac{3}{2}(x'^2(t_0) - \beta'_\sigma{}^2(t_0)) + \gamma_* + \int_0^{t_0} h(t)[\beta_\sigma(t) - |x(t)|] dt. \quad (36)$$

Поскольку из (33) следует, что  $|x(t_0)| = \beta_\sigma(t_0)$ ,  $x(t_0)x'(t_0) = \beta_\sigma(t_0)\beta'_\sigma(t_0)$ , и  $x'^2(t_0) = \beta'_\sigma{}^2(t_0)$ , то из (36) находим, что

$$U''(t_0) - V''_\sigma(t_0) = \gamma_* + \int_0^{t_0} h(t)[\beta_\sigma(t) - |x(t)|] dt. \quad (37)$$

Покажем, что правая часть выражения (37) положительна. Если это не так, то необходимо, чтобы  $h(s) \equiv 0$ ,  $\gamma(s) \equiv 0$ ,  $s \in [0, t_0]$ . Но тогда  $x'''(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0, t_0]$  (элементарные рассуждения от противного с использованием (27) — (29) мы опускаем). Так как  $h(t) \equiv 0$ ,  $x'''(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0, t_0]$ , то  $\beta(t) = \sigma t^2/2$ ,  $x(t) = x''(0)t^2/2$ . При  $t = t_0$  получаем  $|x''(0)| = \sigma$ . Но это противоречит тому, что  $|x''(0)| \leq \sigma_0 < \sigma$ . Следовательно, правая часть выражения (37) положительна. Поскольку левая часть меньше или равна нулю, то полученное противоречие означает, что  $|x(t)| \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$ . Тем самым оценка (22) доказана. При выполнении этих оценок  $\delta(\alpha(t), x(t), \beta(t)) \equiv x(t)$ ,  $t \in I$ , и поэтому  $x(t)$  — решение (1), (14).

Докажем теперь оценку (23). Если  $x'(t)$  достигает максимума при  $t = \tau$ , то из (22) и условий  $\alpha(\tau) = \beta(\tau) = 0$  следует, что  $|x'(t)| \leq |x'(\tau)| \leq |\beta'(\tau)| \quad \forall t \in I$ . Если же  $x'(t)$  достигает экстремума внутри отрезка  $I_0$ , скажем в некоторой точке  $t_1 \in I_0$ , то, интегрируя (31) от  $t = 0$  до  $t = t_1$ , придем к равенству (34), в котором  $t_0$  следует заменить на  $t_1$ . Так как  $x''(t_1) = 0$ , то из (34) находим  $x'^2(t_1) \leq 2 \int_0^{t_1} h(t)|x(t)| dt \leq 2 \int_0^\tau |\beta'''(t)|\beta(t) dt$ . С помощью интегрирования по частям, получаем  $x'^2(t_1) \leq \beta'^2(\tau)$ , откуда и следует справедливость оценки (23). Тем самым теорема 2 доказана.

Из замечания 1 следует, что если функция  $f(t, x)$  удовлетворяет условию  $(A_0)$ , то решение задачи (1), (14) существует.

Замечание 2. Пусть  $q, r \in C(I)$ ,  $q \geq 0$ ,  $r \geq 0$ ,  $\forall t \in I$  и решение  $y(t)$  задачи Коши

$$y''' = -r(t)y, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1 \quad (38)$$

положительно при  $t \in (0, \tau]$ . Предположим далее, что функция  $f$  удовлетворяет условию

$$f(t, x) \geq -q(t) - r(t)x, \quad x \geq 0, \quad f(t, x) \leq q(t) - r(t)x, \quad x \leq 0, \quad \forall t \in I. \quad (A_r)$$

Тогда решение задачи (1), (14) существует. Действительно, в данном случае верхней функцией задачи (1), (14) является функция  $\beta(t) = -\int_0^\tau G_r(t, s)q(s) ds \geq 0 \quad \forall t \in I$ , где  $G_r(t, s) < 0$ ,  $(t, s) \in (0, \tau)$ , — функция Грина для уравнения (38) с условиями (14),  $\alpha = -\beta$ .

Замечание 3. В качестве верхней функции задачи (1), (14) можно взять функцию  $\beta_1(t)$ , удовлетворяющую неравенству (20) и условиям  $\beta_1(0) = a_0 \geq 0$ ,  $\beta'_1(0) = a_1 \geq 0$ ,  $\beta(\tau) = b_0 \geq 0$  ( $a_0 + a_1 + b_0 > 0$ ),  $\alpha_1(t) = -\beta_1(t)$ . Но так как условия (20), (21) должны выполняться для любой функции  $u(t) \in C(I)$ , то можно определить функцию  $\beta(t)$ , удовлетворяющую условиям (14), причем  $\beta(t) < \beta_1(t) \quad \forall t \in I_0$ , и которая также будет верхней функцией задачи (1), (14). Покажем это. Обозначим  $h_1(t) = -\beta_1'''(t)$ . Как и выше, найдем, что  $h_1(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$  и определим функцию  $\beta(t)$  как решение краевой задачи  $\beta''' = -h_1(t)$ ,  $\beta(0) = \beta'(0) = 0$ ,  $\beta(\tau) = 0$ . Тогда  $\beta_1(t) = l(t) + \beta(t)$ , где  $l(t) > 0 \quad \forall t \in I_0$  есть полином второй степени, определенный формулой (13). Далее, так как  $\beta_1''' = \beta'''$ , то из неравенства  $\beta_1'''(t) \leq f(t, \delta(0, u(t), \beta_1(t))) \quad \forall t \in I$  следует также выполнение неравенства  $\beta'''(t) \leq f(t, \delta(0, u(t), \beta(t))) \quad \forall t \in I$ . Аналогично для нижней функции  $\alpha_1(t) < \alpha(t) \quad \forall t \in I_0$ . Таким образом, если существуют верхние и нижние функции  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ , то существуют также верхние и нижние функции  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $\alpha \geq \alpha_1$ ,  $\beta \leq \beta_1 \quad \forall t \in I$ ).

Обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому верхние и нижние функции следует искать с нулевыми граничными условиями.

**Теорема 3.** Пусть существуют функции  $\alpha_0, \beta_0 \in C^3(I)$ ,  $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t) \quad \forall t \in I$ , удовлетворяющие граничным условиям (14) и неравенствам (18), (19). Тогда условия (18), (19) являются необходимыми и достаточными для существования решения задачи (1), (14), причем для решения  $x(t)$  справедливы оценки

$$\alpha_0(t) \leq x(t) \leq \beta_0(t) \quad \forall t \in I. \quad (39)$$

**Доказательство.** Необходимость очевидна. В самом деле, пусть  $x(t)$  — решение задачи (1), (14). Тогда, полагая  $\alpha_0 = \beta_0 = x \quad \forall t \in I$ , получим, что условия (18), (19) выполняются (со знаком равенства).

**Достаточность.** Обозначим  $h_1(t) = \beta_0'''(t)$ ,  $h_2(t) = \alpha_0'''(t)$ . Сделаем в уравнении (1) замену  $x = z + (\alpha_0 + \beta_0)/2$ ,  $\beta = (\beta_0 - \alpha_0)/2$ ,  $\alpha = -(\beta_0 - \alpha_0)/2$ , где  $z$  — новая искомая функция. Тогда получим

$$z''' = f_0(t, z), \quad (40)$$

где  $f_0(t, z) = f(t, z + (\alpha_0 + \beta_0)/2) - (h_1 + h_2)/2$ . Докажем, что

$$\beta'''(t) \leq f_0(t, \delta(0, v(t), \beta(t))), \quad \alpha'''(t) \geq f_0(t, \delta(\alpha(t), v(t), 0)) \quad \forall t \in I \quad (41)$$

для любой функции  $v(t) \in C(I)$ . Имеем

$$\begin{aligned} f_0(t, \delta(0, v(t), \beta(t))) - \beta'''(t) &= f(t, \delta(0, v(t), (\beta_0 - \alpha_0)/2) + (\alpha_0 + \beta_0)/2) - (h_1 + h_2)/2 - (h_1 - h_2)/2 = \\ &= f(t, \delta(0, v(t), (\beta_0 - \alpha_0)/2) + (\alpha_0 + \beta_0)/2) - \beta_0'''. \end{aligned} \quad (42)$$

Если в (42)  $v = 0$ , то  $\delta(0, v(t), (\beta_0 - \alpha_0)/2) + (\alpha_0 + \beta_0)/2 = (\alpha_0 + \beta_0)/2$ , а если в (42)  $v = (\beta_0 - \alpha_0)/2$ , то  $\delta(0, v(t), (\beta_0 - \alpha_0)/2) + (\alpha_0 + \beta_0)/2 = \beta_0(t)$ . Сравнивая с (19), видим, что  $u(t) = v(t) + (\alpha_0 + \beta_0)/2$ , поэтому из (19) следует, что правая часть равенства (42) больше или равна нулю для  $t \in I$ . Следовательно,  $\beta(t)$  — верхняя функция задачи (40), (14). Аналогично доказывается, что  $\alpha(t)$  — нижняя функция задачи (40), (14). Поэтому из (41) следует в силу теоремы 2 существование решения задачи (40), (14), которое обозначим через  $z(t)$  и для которого справедливы оценки  $\alpha(t) \leq z(t) \leq \beta(t)$ ,  $|z'(t)| \leq |\beta'(\tau)| \quad \forall t \in I$ . Теперь с учетом замены находим, что  $\alpha(t) \leq x(t) - (\alpha_0 + \beta_0)/2 \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$ , откуда следуют оценки (39), а также оценка  $2|x'(t)| \leq |\beta_0'(\tau) - \alpha_0'(\tau)| + \max\{|\alpha_0'(t) + \beta_0'(t)|; t \in I\}$ . Тем самым теорема 3 доказана.

**Замечание 4.** Несмотря на большую общность теоремы 3, применение ее осложняется тем, что функции  $\alpha_0, \beta_0$  надо находить, вообще говоря, из системы двух неравенств, куда входит произвольная функция.

Приведем пример применения теоремы 3. Пусть  $H_1 > H_2 \geq 0$ ,  $c \geq (\tau^3/81)(H_1 + H_2)$  и  $f(t, x) \leq H_1$  при  $x \leq 0 \quad \forall t \in I$  и  $f(t, x) \geq H_2$  при  $x \geq -c \quad \forall t \in I$ , так что при  $x \in [-c, 0]$  имеем  $H_2 \leq f(t, x) \leq H_1 \quad \forall t \in I$ . Тогда  $\alpha_0(t) = -H_1(\tau t^2 - t^3)/6$ ,  $\beta_0(t) = -H_2(\tau t^2 - t^3)/6$ .

3. Рассмотрим теперь краевую задачу

$$x''' = F(t, x, x'), \quad (43)$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad x'(\tau) = 0, \quad (44)$$

где  $F \in C(I \times R^2)$ .

**Теорема 4.** Пусть существуют функции  $\alpha(t), \beta(t) \in C^3(I)$ ,  $\beta(t) \geq 0$ ,  $\alpha(t) = -\beta(t) \quad \forall t \in I$ , удовлетворяющие граничным условиям (44) и неравенствам

$$\beta'''(t) \leq F(t, \delta(0, u(t), \beta(t)), v(t)), \quad \alpha'''(t) \geq F(t, \delta(\alpha(t), u(t), 0), v(t)) \quad \forall t \in I, \quad (45)$$

где  $u, v \in C(I)$  — произвольные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$|u(t)| \leq \beta(t), \quad |v(t)| \leq m \quad \forall t \in I, \quad m = \left(2 \int_0^\tau \beta(t) |\beta'''(t)| dt\right)^{1/2}. \quad (46)$$

Тогда решение задачи (43), (44) существует, причем справедливы оценки

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad |x'(t)| \leq m \quad \forall t \in I. \quad (47)$$

Доказательство. Обозначим  $h(t) \equiv -\beta'''(t)$ . Покажем, что  $h(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$ . Полагая в (45)  $u \equiv 0$ ,  $v \equiv 0$ ,  $t \in I$ , получим, что  $-h(t) = F(t, 0, 0) - \varepsilon_{11}(t)$ ,  $h(t) = F(t, 0, 0) + \varepsilon_{12}(t)$ , откуда следует, что  $h(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$ . Если  $h(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$ , то  $x(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$ , — решение, поэтому будем предполагать, что  $h(t) \not\equiv 0$ ,  $t \in I$ . Тогда  $\beta''(0) = \sigma_0 > 0$ . Далее рассмотрим вспомогательное уравнение

$$x''' = F(t, \delta(\alpha(t), x, \beta(t)), \delta(-m, x', m)). \quad (48)$$

Как и в случае теоремы 2, устанавливаем, что решение задачи (48), (44) существует. Обозначим его через  $x(t)$ ,  $t \in I$ . Из (48), (45) следует равенство  $x(t)x'''(t) = \gamma(t) - |x(t)|h(t)$ , где  $\gamma(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$ . Интегрируя, найдем, что

$$x(t)x''(t) = \frac{1}{2}x'^2(t) + \gamma_*(t) - \int_0^t |x(s)|h(s) ds, \quad (49)$$

где  $\gamma_*(t) = \int_0^t \gamma(s) ds \geq 0$ .

Вводя в рассмотрение функции  $U(t) = x^2(t)/2$ ,  $V_\sigma(t) = \beta_\sigma^2(t)/2$ , где  $\beta_\sigma(t)$  определяется условиями (25), и рассуждая, как при доказательстве теоремы 2, находим, что  $|x(t)| \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$ . Докажем теперь оценку  $|x'(t)| \leq m \quad \forall t \in I$ . Так как  $x'(0) = x'(\tau) = 0$ , то максимум  $|x'(t)|$  достигается в некоторой точке  $t_0 \in I_0$  в которой, очевидно,  $x''(t_0) = 0$ . Полагая в (49)  $t = t_0$ , получаем, что

$$|x'(t)| \leq |x'(t_0)| \leq \left(2 \int_0^{t_0} |x(s)|h(s) ds\right)^{1/2} \leq \left(2 \int_0^\tau \beta(s)|\beta'''(s)| ds\right)^{1/2} \quad \forall t \in I.$$

При выполнении оценок (47)  $\delta(\alpha(t), x(t), \beta(t)) = x(t)$ ,  $\delta(-m, x'(t), m) = x'(t)$  и, следовательно,  $x(t)$  — решение задачи (43), (44). Тем самым теорема 4 доказана.

**З а м е ч а н и е 5.** Верхние и нижние функции, определенные в работах [6 — 8], не позволяют доказать теорему 4 даже в том случае, когда  $F(t, x, y)$  не зависит от  $y$ .

Проведем сравнительный анализ условий (3) и условий (20), (21) применительно к задаче (1), (44). Если функция  $f(t, x)$  не возрастает по  $x$ , например  $f = -\sigma x$  ( $\sigma \geq 0$ ), то из первого условия (3) находим, что  $\beta''' = -\sigma\beta - \varepsilon_{13}$ . Отсюда и из (44) следует, что  $\beta(t)$  ( $\beta(t) \neq 0$ ,  $t \in I$ ) существует только если  $\sigma > 0$  достаточно мало ( $\sigma < \sigma_1$ ). Если  $f$  не убывает по  $x$ , например  $f = \sigma x$  ( $\sigma \geq 0$ ), то и в данном случае, как было показано в начале работы,  $\alpha$  и  $\beta$  существуют только если  $\sigma < \sigma_1$ . Что же касается условий (20), (21), то если  $f$  не возрастает по  $x$ , то из (20) получается неравенство (11). Если же  $f$  — не убывающая функция по  $x$ , то из (20), (21) при  $u \equiv 0$ ,  $t \in I$ , следуют неравенства  $\beta'''(t) \leq f(t, 0)$ ,  $\alpha'''(t) \geq f(t, 0) \quad \forall t \in I$  и в качестве  $\beta$  и  $\alpha$  можно взять решения уравнений  $\beta''' = -|f(t, 0)|$ ,  $\alpha'''(t) = |f(t, 0)|$  с условиями (44).

Таким образом, если  $f$  — не убывающая функция по  $x$ , то решение задачи (1), (44) существует. При этом же условии существует решение задачи (1), (14) и решение уравнения (1), удовлетворяющего краевым условиям

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(\tau) = 0. \quad (50)$$

Справедлива

**Теорема 5.** Пусть функции  $\alpha_0(t), \beta_0(t) \in C^3(I)$ ,  $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t) \quad \forall t \in I$ , удовлетворяют краевым условиям (50) и неравенствам (18), (19), где  $u(t) \in C(I)$  — произвольная функция. Тогда условия (18), (19) являются необходимыми и достаточными для существования решения задачи (1), (50), причем для решения  $x(t)$  справедливы оценки  $\alpha_0(t) \leq x(t) \leq \beta_0(t)$ ,  $\alpha_0'(t) \leq x'(t) \leq \beta_0'(t) \quad \forall t \in I$ .

Доказательство этой теоремы проводится с использованием рассуждений, изложенных в предыдущих теоремах.

## Литература

1. Гудков В. В., Клоков Ю. А., Лепин А. Я., Пономарев В. Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, 1973.
2. Васильев Н. И., Клоков Ю. А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, 1978.
3. Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, 1975.
4. Кигурадзе И. Т. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. Т. 30. С. 3 — 103.
5. Лепин А. Я., Лепин Л. А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Рига, 1988.
6. Kelley W. G. // J. Different. Equat. 1975. Vol. 18. P. 158 — 169.
7. Садырбаев Ф. Ж. // Уч. зап. Латв. ун-та. 1995. Т. 599. С. 114 — 129.
8. Розов Н. Х., Сушко В. Г. // Докл. РАН. 1993. Т. 332, № 3. С. 150 — 152.
9. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М., 1968.

*Институт математики и информатики  
Латвийского университета*

*Поступила в редакцию  
30 октября 1999 г.*