Э. А. Курьянович, Точные решения задачи Коши для уравнения Фридмана, *ТМФ*, 2019, том 199, номер 1, 154–172

DOI: 10.4213/tmf9504

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 199, № 1
апрель, 2019

Э. А. Курьянович*

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФРИДМАНА

Космологическое уравнение Фридмана для Вселенной, заполненной скалярным полем, сведено к системе из двух уравнений первого порядка, одно из которых является уравнением с разделяющимися переменными. Для второго уравнения выписаны точные решения в виде ряда для квадратичного потенциала в спиральной и аттракторной областях, а также для весьма произвольных потенциалов как в окрестности конечной точки, так и в окрестности бесконечности. Доказаны существование и единственность классических решений задачи Коши для уравнения Фридмана в одних случаях и наличия ровно двух решений в других случаях.

Ключевые слова: уравнение Фридмана, задача Коши, точные решения, инфляция, скалярное поле, аттрактор, обобщенные ряды Дирихле, фазовая траектория.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9504

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной космологии важную роль играет изучение уравнения Фридмана для гравитационного поля, взаимодействующего со скалярным полем. В рамках инфляционной теории проводился приближенный анализ уравнений Фридмана для свободного массивного скалярного поля (см., например, работы [1], [2]). Была построена фазовая траектория для уравнения Фридмана с квадратичным потенциалом [1]. Эта траектория представляет собой выходящую из бесконечности и бесконечно закручивающуюся к началу координат спираль. В монографии [1] также было показано, что у траектории имеется так называемая "аттракторная" прямая, вдоль которой эта траектория при определенных начальных данных довольно долго движется. Таким образом, фазовую траекторию для уравнения Фридмана с квадратичным потенциалом можно разбить на три области: окрестность бесконечности, спиральную окрестность начала координат и "аттракторную" область, которая не всегда существует. В работах [3]–[14] и многих других были исследованы различные свойства решения уравнения Фридмана, найдены решения для потенциалов в виде

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: kurianovich@mail.ru

константы, экспоненты и некоторых других функций. Однако во всех этих работах не было получено точного решения в виде рядов для квадратичного потенциала и для произвольного потенциала при некоторых предположениях. И только в статье [15] было построено решение уравнения Фридмана в окрестности бесконечности для скалярного поля с квадратичным потенциалом в виде обобщенных рядов Дирихле.

В работе [16] было проведено детальное математическое исследование уравнения Фридмана для скалярного поля с квадратичным и произвольным потенциалами, построено представление решений в виде различных рядов. Все решения, полученные в статье [16], зависят от произвольной константы. В настоящей работе построены решения задачи Коши во всех указанных случаях, доказано существование ровно одного или ровно двух решений этой задачи. Все это потребовало существенной доработки решений, полученных в статье [16]. В разделе 2 ставится задача и разбираются особые решения. В следующих разделах построены решения в виде различных рядов: в разделе 3 – для квадратичного потенциала в спиральной области; в разделах 4 и 5 – для квадратичного потенциала в аттракторной области; в разделе 6 – для непрерывного медленно растущего произвольного потенциала в окрестности бесконечности; в разделе 7 – для произвольного аналитического потенциала в окрестности конечной неособой точки. В разделе 8 подводятся итоги.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим систему уравнений Фридмана для Вселенной, заполненной скалярным полем:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'_{\varphi} = 0, \qquad H^2 = \frac{1}{3M^2}\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi)\right). \tag{1}$$

Здесь φ – скалярное поле, зависящее от времени, H – параметр Хаббла, M – действительная положительная константа, $V(\varphi)$ – заданный непрерывно дифференцируемый скалярный потенциал. Продифференцируем второе уравнение по φ:

$$2HH'_{\varphi} = \frac{1}{3M^2}\left(\dot{\varphi}\,\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} + V'_{\varphi}\right). \tag{2}$$

Если $H \equiv 0$, $V < 0$, то

$$\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{-2V(\varphi)}} = \pm(t - t_0).$$

Если же $H \neq 0$, то выразим H из первого уравнения системы (1), подставим в уравнение (2) и получаем, что

$$\dot{\varphi} = -2M^2 H'_{\varphi}. \tag{3}$$

И, наконец, подставляя выражение (3) во второе уравнение системы (1) и используя замены $H = y/3$, $\varphi = Mx\sqrt{2/3}$, $U = 3V/M^2$, записываем окончательно систему

$$y'_x = -\dot{x}, \qquad y'^2_x = y^2 - U(x). \tag{4}$$

Подобная система уравнений была ранее получена в [17]. Если $U = C^2 = \mathrm{const}$, то особое решение системы (4) есть $y = \pm C$, $x = C_1$. Если же $y \neq \mathrm{const}$, то

$$\int_{x(t)}^{x(t_0)} \frac{dx}{y'_x} = t - t_0. \tag{5}$$

Таким образом, при условии, что найдено решение второго уравнения системы (4), первое уравнение легко интегрируется. Займемся теперь изучением второго уравнения при дополнительном условии $y(x_0) = y_0$, $x(t_0) = x_0$.

3. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ РЯДА ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА В СПИРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ (В ОКРЕСТНОСТИ $x = 0$)

Рассмотрим квадратичный потенциал $V(\varphi) = m^2\varphi^2/2$. Если потенциал неквадратичный, то применяем замены, полученные в предыдущем разделе. В случае же квадратичного потенциала немного изменим для удобства эти замены: $H = my/3$, $\varphi = Mx\sqrt{2/3}$, $U = 3V/M^2m^2$, $t = t_1/m$ (далее индекс “1” опускается для краткости). В результате получаем систему $y'_x = -\dot{x}$, $y'^2_x = y^2 - x^2$. Будем рассматривать задачу Коши $y(x_0) = y_0$, $x(t_0) = x_0$, $y_0 > |x_0|$. Сделаем в этой системе замены $y = 2/u$, $x = (2/u)\cos(\psi/2)$, $\dot{x} = (2/u)\sin(\psi/2)$. Для $u = u(\psi)$ имеем следующую задачу:

$$2u'(u + \sin\psi) = u(\cos\psi - 1), \qquad u(\psi_0) = u_0 = \frac{2}{y_0} = \frac{2}{x_0}\cos\frac{\psi_0}{2}. \tag{6}$$

Найдя решение этой задачи, мы сможем записать параметрические зависимости $y(x)$, $y(t)$ и $x(t)$ через параметр ψ. Займемся получением этого решения.

Теорема 1. *Единственным решением задачи* (6) *при условиях* $\psi \leqslant \psi_0$, $u_0 > 32$ $(y_0 < 1/16)$ *является следующий абсолютно и равномерно сходящийся при тех же условиях ряд*:

$$u = \frac{1}{2}(\sin\psi - \psi + C) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\psi), \qquad C = 2u_0 + \psi_0 - \sin\psi_0. \tag{7}$$

Здесь

$$a_0(\psi) = -\int_{\psi}^{\psi_0} \frac{(1 - \cos\psi_1)\sin\psi_1\, d\psi_1}{3\sin\psi_1 - \psi_1 + C}, \tag{8}$$

$$a_k(\psi) = 2\int_{\psi}^{\psi_0} \frac{\sum_{n=0}^{k-1} a_n(\psi_1)a'_{k-1-n}(\psi_1)\, d\psi_1}{3\sin\psi_1 - \psi_1 + C}, \qquad k \geqslant 1. \tag{9}$$

При том же условии равномерно и абсолютно сходится ряд, составленный из производных членов этого ряда.

Доказательство. Будем искать решение задачи (6) при условиях $|y| \ll 1 \Rightarrow |x| \ll 1$, $|u| \gg 1 \Rightarrow |u| \gg \sin\psi$. В этих условиях пренебрежем в (6) $\sin\psi$ по сравнению с u. Тогда получаем уравнение $2u' = \cos\psi - 1$, решив которое, имеем соотношение $u = (\sin\psi - \psi + C)/2$. Поэтому целесообразно искать решение (6) в виде (7).

Подставим ряд (7) в задачу (6):

$$(\cos\psi - 1)\sin\psi + \sum_{k=0}^{\infty} a_k'(\psi)(3\sin\psi - \psi + C) + 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} a_n(\psi)a_{k-n}'(\psi) = 0. \qquad (10)$$

Приравнивая в (10) сумму первого слагаемого и нулевого члена первого ряда к нулю, получаем соотношение (8). Приравнивая сумму k-го члена первого ряда и $(k-1)$-го члена второго ряда к нулю, получаем равенство (9). Докажем, что в условиях теоремы справедливы оценки

$$|a_k'| \leqslant \frac{2\cdot 60^k}{(k+1)^2(C-3-\psi_0)^k(C-3-\psi)}, \qquad (11)$$

$$|a_k| \leqslant \frac{2\cdot 60^k}{(k+1)^2(C-3-\psi_0)^k}. \qquad (12)$$

Из формулы (8) имеем $|a_0'| \leqslant 2/(C-3-\psi)$, что соответствует оценке (11). Производя в равенстве (8) интегрирование по частям, получаем неравенства

$$|a_0| \leqslant \left|\frac{-\cos\psi_0 + 0,25\cos 2\psi_0}{3\sin\psi_0 - \psi_0 + C}\right| + \left|\frac{-\cos\psi + 0,25\cos 2\psi}{3\sin\psi - \psi + C}\right| + \\ + \int_{-\infty}^{\psi_0}\frac{|(-\cos\psi_1 + 0,25\cos 2\psi_1)(3\cos\psi_1 - 1)|\,d\psi_1}{(3\sin\psi_1 - \psi_1 + C)^2} \leqslant \\ \leqslant \frac{15}{2(C-3-\psi_0)} \leqslant \frac{15}{4(u_0-2)} \leqslant \frac{1}{8} \leqslant 2,$$

что соответствует оценке (12). Из равенства (9) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$|a_1'| \leqslant \frac{8}{(C-3-\psi)(C-3-\psi_0)}, \qquad |a_1| \leqslant \frac{8}{C-3-\psi_0},$$
$$|a_2'| \leqslant \frac{64}{(C-3-\psi_0)^2(C-3-\psi)}, \qquad |a_2| \leqslant \frac{64}{(C-3-\psi_0)^2},$$

что соответствует (11) и (12). Докажем (11) и (12) методом математической индукции. Предположим, что эти неравенства верны для любого $n \leqslant k-1$. Докажем их для $n = k$. Из соотношения (9) для $k \geqslant 3$ следует, что

$$|a_k'| \leqslant \frac{8\cdot 60^{k-1}}{(C-3-\psi_0)^k(C-3-\psi)}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{(n+1)^2(k-n)^2}.$$

Оценим последнюю сумму:

$$\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{(k-n)^2(n+1)^2} \leqslant \frac{2}{k^2} + \int_1^{k-1}\frac{dx}{x^2(k-x)^2} = \\ = \frac{2}{k^2} + \frac{4ln(k-1)}{k^3} + \frac{2(k-2)}{k^2(k-1)} \leqslant \frac{8}{k^2} \leqslant \frac{15}{(k+1)^2}. \qquad (13)$$

Следовательно, неравенство (11) доказано. Аналогично доказывается неравенство (12). Для абсолютной сходимости ряда достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} \leqslant 60/(C-3-\psi_0) < 1$. Следовательно, $u_0 > 32$, что и требовалось доказать. Аналогично доказываются равномерная и абсолютная сходимости ряда, составленного из производных членов этого ряда. Единственность решения (6) следует из того, что в условиях теоремы всегда выполнено и условие Липшица. Для функции $y(x)$ получается два решения, так как $\psi_0 = \pm 2\arccos(x_0/y_0) + 4\pi n$, $n \in Z$. Каждому знаку соответствует своя функция $y(x)$. Это связано с тем, что исходное уравнение можно переписать как $y'_x = \pm\sqrt{y^2 - x^2}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Решение задачи (6) при условиях $\psi \leqslant \psi_0$, $u_0 > 32$ можно представить следующим образом:

$$u = \frac{\sin\psi - \psi + C}{2} + \sum_{k=0}^{n} a_k(\psi) + o\biggl(\Bigl(\frac{60}{C - 3 - \psi_0}\Bigr)^n\biggr), \qquad n \to \infty.$$

Действительно, оценивая остаточный член ряда с применением формулы суммы геометрической прогрессии, из неравенства (12) получаем, что

$$\Bigl|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(\psi)\Bigr| \leqslant \frac{|a_{n+1}(\psi)|}{1 - 60/(C - 3 - \psi_0)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2 \cdot 60^{n+1}}{(n+2)^2 (C - 3 - \psi_0)^{n+1}(1 - 60/(C - 3 - \psi_0))}.$$

4. ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ В ВИДЕ РЯДА ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА В АТТРАКТОРНОЙ ОБЛАСТИ

Теорема 2. *Единственным решением задачи Коши*

$$y'_x = \sqrt{y^2 - x^2}, \qquad y(x_0) = y_0 \tag{14}$$

при условиях

$$y_0 = x_0 + \frac{1}{2} e^{x_0^2/2} \int_{x_0}^{x_3} e^{-x_1^2/2}\, dx_1, \qquad 16 \leqslant x \leqslant x_0 \leqslant x_-, \tag{15}$$

где

$$x_- = 2\sqrt{\frac{x_3}{3}} \cos\biggl(\frac{1}{3}\Bigl(\pi - \arccos\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{x_3}}\Bigr)\biggr), \qquad 768 < x_3 \leqslant +\infty,$$

является абсолютно и равномерно сходящийся при том же условии ряд

$$y = x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \tag{16}$$

Здесь

$$a_0(x) = \frac{1}{2} e^{x^2/2} \int_{x}^{x_3} e^{-x_1^2/2}\, dx_1, \tag{17}$$

$$a_k(x) = -\frac{1}{2} e^{x^2/2} \int_{x}^{x_0} e^{-x_1^2/2} \sum_{n=0}^{k-1} (a_n(x_1) a_{k-1-n}(x_1) - a'_n(x_1) a'_{k-1-n}(x_1))\, dx_1 \tag{18}$$

для $k \geqslant 1$. *При том же условии равномерно и абсолютно сходится ряд, составленный из производных членов этого ряда.*

Доказательство. Подставим ряд (16) в задачу (14), тогда, возводя в квадрат, получаем равенство

$$1+2\sum_{k=0}^{\infty}a_k'(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}a_{k-n}'(x)a_n'(x)=2x\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}a_{k-n}(x)a_n(x). \tag{19}$$

Приравняем сумму первого слагаемого слева и нулевого члена первого ряда слева к нулевому члену первого ряда справа:

$$a_0'(x)=xa_0(x)-\frac{1}{2}. \tag{20}$$

Решая это уравнение, приходим к соотношению (17). Далее, приравняем в (19) сумму k-го члена первого ряда слева и $(k-1)$-го члена второго ряда слева к аналогичной сумме справа:

$$a_k'(x)=xa_k(x)+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{k-1}(a_{k-1-n}(x)a_n(x)-a_{k-1-n}'(x)a_n'(x)),\qquad k\geqslant 1. \tag{21}$$

Решая уранение (21), получаем формулу (18). Теперь оценим a_0. Для этого рассмотрим следующую функцию:

$$f_1(x)=\int_x^{+\infty}e^{-x_1^2/2}\,dx_1-\frac{e^{-x^2/2}}{x},\qquad x>0. \tag{22}$$

Очевидно, $\lim_{x\to+\infty}f_1(x)=0$, $f_1'(x)=e^{-x^2/2}/x^2>0$. Таким образом, функция $f_1(x)$, возрастая, стремится к нулю при $x\to+\infty$. Значит,

$$f_1(x)<0,\qquad x>0. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь другую функцию:

$$f_2(x)=\int_x^{+\infty}e^{-x_1^2/2}\,dx_1-\frac{2e^{-x^2/2}}{x+\sqrt{x^2+4}},\qquad x>0. \tag{24}$$

Очевидно, что

$$\lim_{x\to+\infty}f_2(x)=0,\qquad f_2'(x)=\frac{e^{-x^2/2}(x\sqrt{x^2+4}-x^2-2)}{(x+\sqrt{x^2+4})\sqrt{x^2+4}}<0.$$

Таким образом, функция $f_2(x)$, убывая, стремится к нулю при $x\to+\infty$. Значит,

$$f_2(x)>0,\qquad x>0. \tag{25}$$

Из формул (22)–(25) вытекает оценка

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}-\frac{1}{2x_0}\leqslant a_0(x)=|a_0(x)|\leqslant\frac{1}{2x},\qquad x>0. \tag{26}$$

Оценим теперь $a_0'(x)$. Из выражений (20) и (26) следует, что $a_0'(x) \leqslant 0$. Значит,

$$|a_0'(x)| = \frac{1}{2} - xa_0(x) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\sqrt{1+4/x^2}} + \frac{x}{2x_3} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x_3}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x_3}\right). \tag{27}$$

Наложим на $a_0'(x)$ ограничение

$$|a_0'(x)| \leqslant \frac{1}{2x}, \qquad x > 0. \tag{28}$$

Это возможно, если

$$\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x_3} \leqslant \frac{1}{x}. \tag{29}$$

Домножая обе части (29) на x^2x_3, получаем кубическое неравенство

$$x^3 - xx_3 + x_3 \leqslant 0. \tag{30}$$

Решая неравенство (30) по формуле Кардано, имеем для $x > 0$ неравенство

$$x_+ \leqslant x \leqslant x_-, \tag{31}$$

где

$$x_\pm = 2\sqrt{\frac{x_3}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\left(\pi \pm \arccos\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{x_3}}\right)\right), \qquad x_3 \geqslant 6.75. \tag{32}$$

Анализируя полученное решение, получаем соотношения

$$\sqrt{\frac{x_3}{3}} \leqslant x_- \leqslant \sqrt{x_3}, \qquad 1 \leqslant x_+ \leqslant 1.5 \leqslant x_- \leqslant +\infty. \tag{33}$$

Введем обозначение

$$b_k(x) = \max\{|a_k(x_1)|, |a_k'(x_1)|\}, \qquad x \leqslant x_1 \leqslant x_0.$$

Докажем, что для любого $k \geqslant 0$ и любого x, удовлетворяющего неравенству (31),

$$b_k \leqslant \frac{15^k}{2x^{k+1}(k+1)^2}. \tag{34}$$

Для $k = 0$ мы это уже доказали. Из формулы (18) с учетом (23) имеем

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{k-1} b_{k-1-n}(x)b_n(x), \qquad k \geqslant 1. \tag{35}$$

Из равенства (21) вытекает, что

$$|a_k'| \leqslant 2\sum_{n=0}^{k-1} b_{k-1-n}(x)b_n(x), \qquad k \geqslant 1. \tag{36}$$

Из (35) и (36) с учетом (31) и (33) имеем

$$b_k \leqslant 2\sum_{n=0}^{k-1} b_{k-1-n}(x)b_n(x), \qquad k \geqslant 1. \tag{37}$$

Из формул (26), (28) и (37) вытекают неравенства $b_1 \leqslant 1/2x^2$, $b_2 \leqslant 1/x^3$, которые согласуются с (34). Докажем теперь (34) методом математической индукции. Пусть (34) выполнено для любого $n \leqslant k-1$. Докажем выполнение (34) для $n = k$. Из (37), (34) и (13) для любого $k \geqslant 3$ получаем, что

$$b_k \leqslant \frac{15^{k-1}}{2x^{k+1}} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(k-n)^2(n+1)^2} \leqslant \frac{15^{k-1}\cdot 8}{2x^{k+1}k^2} \leqslant \frac{15^k}{2x^{k+1}(k+1)^2}. \tag{38}$$

Итак, (34) доказано. Далее, для сходимости ряда (16) и его формальной производной достаточно выполнения условий $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{b_k} \leqslant 15/x < 1$. Значит, $x > 15$. Кроме того, из выражений (15) и (33) следует достаточность условия $x_3 > 768$.

Докажем теперь положительность производной. Действительно, применяя формулу суммы геометрической прогрессии и используя (34), имеем соотношения

$$|y'(x) - 1| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a'_k(x)| \leqslant \frac{|a'_0(x)|}{1 - 15/x} \leqslant \frac{1}{2(x-15)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Отсюда и следует положительность производной. Благодаря этому возведение в квадрат при получении (19) оказывается законным и, кроме того, для задачи (14) при условиях (15) оказывается справедливым условие Липшица, что и доказывает единственность полученного решения. Теорема доказана.

Замечание 2. Решение задачи (14) при условиях (15) можно представить следующим образом: $y = x + \sum_{k=0}^{n} a_k(x) + o((15/x)^n)$, $n \to \infty$. Действительно, оценивая остаточный член ряда с применением формулы суммы геометрической прогрессии, из (34) получаем, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)\right| \leqslant \frac{|a_{n+1}(x)|}{1 - 15/x} \leqslant \frac{16\cdot 15^{n+1}}{2(n+2)^2 x^{n+2}}.$$

Замечание 3. Ввиду четности решения уравнения (14) существует аналогичное решение вблизи прямой $y = -x$, а также решение, полученное заменой y на $-y$.

Замечание 4. Если в условиях (15) положить $x_3 = +\infty$, то все рассуждения остаются справедливы. Если, кроме того, еще и x_0 устремить к бесконечности, то мы получаем “чисто” аттракторное решение, существующее в окрестности бесконечности и имеющее прямую $y = x$ своей асимптотой. Задача Коши переходит при этом в условие $\lim_{x\to+\infty}(y - x) = 0$. Это условие уже не формирует задачу Коши, что не гарантирует единственности полученного решения. Попытка же найти решение в виде степенного ряда $y = x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k/x^k$ оканчивается неудачей – ряд оказывается расходящимся.

Замечание 5. Условие $x_3 > 768$ является достаточным, но не необходимым. Решение, полученное в теореме 2, возможно, существует и при невыполнении этого условия.

5. ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ В ВИДЕ РЯДА ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА В АТТРАКТОРНОЙ ОБЛАСТИ

Теорема 3. *Единственным решением задачи Коши*

$$y'_x = \sqrt{y^2 - x^2}, \qquad y(x_0) = \sqrt{x_0^2 + 1} \tag{39}$$

при условиях

$$\sqrt{17} \leqslant x \leqslant x_0 \leqslant +\infty, \qquad x_0 > \sqrt{17} \tag{40}$$

является следующий абсолютно и равномерно сходящийся при том же условии ряд:

$$y = \sqrt{x^2+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x). \tag{41}$$

Здесь

$$a_0(x) = -\,xe^{x^2/2}\int_x^{x_0} \frac{e^{-x_1^2/2}\,dx_1}{2x_1^2\sqrt{x_1^2+1}}, \tag{42}$$

$$a_k(x) = -\,xe^{x^2/2}\int_x^{x_0} \frac{1}{2x_1^2}\left[e^{-x_1^2/2}\sqrt{x_1^2+1}\sum_{n=0}^{k-1}(a_n(x_1)a_{k-1-n}(x_1) - a'_n(x_1)a'_{k-1-n}(x_1))dx_1\right] \tag{43}$$

при $k \geqslant 1$. При том же условии равномерно и абсолютно сходится ряд, составленный из производных членов этого ряда.

Доказательство. Подставим ряд (41) в задачу (39) и, возводя в квадрат, получаем формулу

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\sum_{k=0}^{\infty} a'_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} a'_{k-n}(x)a'_n(x) = \\ = \frac{1}{x^2+1} + 2\sqrt{x^2+1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} a_{k-n}(x)a_n(x). \tag{44}$$

Приравняем нулевой член первого ряда слева к сумме первого слагаемого и нулевого члена первого ряда справа:

$$a'_0(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)a_0(x) + \frac{1}{2x^2\sqrt{x^2+1}}. \tag{45}$$

Решая это уравнение, получаем соотношение (42). Далее, приравняем в формуле (44) сумму k-го члена первого ряда слева и $(k-1)$-го члена второго ряда слева к аналогичной сумме справа: для $k \geqslant 1$ получаем

$$a'_k(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)a_k(x) + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}\sum_{n=0}^{k-1}(a_{k-1-n}(x)a_n(x) - a'_{k-1-n}(x)a'_n(x)). \tag{46}$$

Решая уравнение (46), получаем соотношение (43). Теперь оценим a_0 и a_0'. Из соотношений (22), (23) и (42) следует, что

$$-\frac{1}{2x^3} \leqslant -\frac{1}{2x^2\sqrt{x^2+1}} \leqslant a_0 \leqslant 0. \tag{47}$$

Из формул (45) и (47) вытекает, что

$$-\frac{1}{2x^3\sqrt{x^2+1}} \leqslant a_0' \leqslant \frac{1}{2x\sqrt{x^2+1}} \leqslant \frac{1}{2x^2}. \tag{48}$$

Введем обозначение $b_k(x) = \max\{|a_k(x_1)|, |a_k'(x_1)|\}$, $x \leqslant x_1 \leqslant x_0$. Тогда из формул (40), (47) и (48) следует, что

$$b_0 \leqslant \frac{1}{2x^2}. \tag{49}$$

Далее из (43) для любого $k \geqslant 1$ получаем неравенство $|a_k| \leqslant \sqrt{17}\sum_{n=0}^{k-1} b_n b_{k-1-n}/4x$. Из равенства (46) имеем $|a_k'| \leqslant 33\sqrt{17}\sum_{n=0}^{k-1} b_n b_{k-1-n}/64$. Следовательно,

$$b_k \leqslant \frac{33\sqrt{17}}{64}\sum_{n=0}^{k-1} b_n b_{k-1-n}. \tag{50}$$

Докажем, что для любого $k \geqslant 0$ и любого x, удовлетворяющего условию (40),

$$b_k \leqslant \frac{15.95^k}{2x^{2k+2}(k+1)^2}. \tag{51}$$

Для $k = 0$ это уже доказано. Из выражений (49) и (50) имеем $b_1 \leqslant 33\sqrt{17}/256x^4$, $b_2 \leqslant 18513/16384x^6$, что удовлетворяет неравенству (51). Докажем теперь неравенство (51) методом математической индукции. Пусть оно выполнено для любого $n \leqslant k-1$. Докажем выполнение (51) для $n = k$. Из формул (50), (51) и (13) для любого $k \geqslant 3$ вытекает соотношение

$$b_k \leqslant \frac{33\sqrt{17}\cdot 15.95^{k-1}\cdot 8}{256x^{2k+2}k^2} \leqslant \frac{495\sqrt{17}\cdot 15.95^{k-1}}{256x^{2k+2}(k+1)^2} \leqslant \frac{15.95^k}{2x^{2k+2}(k+1)^2}, \tag{52}$$

что и доказывает (51). Далее, для сходимости ряда (41) и его формальной производной достаточно выполнения условия $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{b_k} \leqslant 15.95/x^2 < 1$. Значит, условие $x \geqslant \sqrt{17}$ достаточно. Докажем теперь положительность производной. Действительно, применяя формулу суммы геометрической прогрессии и используя (51), имеем

$$y'(x) \geqslant \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sum_{k=0}^{\infty}|a_k'(x)| \geqslant \sqrt{\frac{17}{18}} - \frac{|a_0'(x)|}{1-15.95/x^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{\frac{17}{18}} - \frac{1}{2(x^2-15.95)} \geqslant \sqrt{\frac{17}{18}} - \frac{1}{2} > 0.$$

Благодаря этому возведение в квадрат при получении (44) оказывается законным и, кроме того, для (39) при условиях (40) оказывается справедливым условие Липшица, что и доказывает единственность полученного решения. Теорема доказана.

Замечание 6. Решение задачи (39) при условии (40) можно представить следующим образом: $y = \sqrt{x^2+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k(x) + o((15.95/x^2)^n)$, $n \to \infty$. Действительно, оценивая остаточный член ряда с применением формулы суммы геометрической прогрессии, из (51) получаем, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)\right| \leqslant \frac{|a_{n+1}(x)|}{1-15.95/x^2} \leqslant \frac{15.95^{n+1}}{2(n+2)^2x^{2n+4}(1-15.95/x^2)} \leqslant \frac{17\cdot 15.95^{n+1}}{2(n+2)^2x^{2n+4}}.$$

Замечания 3 и 4 для теоремы 2 также остаются справедливы с той лишь разницей, что в замечании 4 к бесконечности стремится только x_0.

6. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ РЯДА В ОКРЕСТНОСТИ $x = \infty$ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ПОТЕНЦИАЛА, РАСТУЩЕГО НЕ БЫСТРЕЕ ЭКСПОНЕНТЫ

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ назовем медленно растущей, если существуют $\alpha < 1$, x_0 и $C_1 > 0$ такие, что для любого $x \geqslant x_0$ $|f(x)| \leqslant C_1^2 e^{2\alpha x}$.

Теорема 4. *Единственным решением задачи Коши*

$$y'_x = \sqrt{y^2 - U(x)}, \qquad y(x_2) = y_0 > 0, \qquad y_0^2 - U(x_2) > 0, \tag{53}$$

где $U(x)$ – заданная непрерывная медленно растущая функция при условиях

$$\begin{gathered} x_1 = \max\left\{\frac{1}{1-\alpha}\ln\frac{C_1\sqrt{2}(3-2\alpha)}{C(1-\alpha)}, x_0\right\} \leqslant x \leqslant x_2, \\ C = y_0 e^{-x_2}, \qquad y_0 > \frac{C_1 e^{\alpha x_2}\sqrt{2}(3-2\alpha)}{1-\alpha}, \end{gathered} \tag{54}$$

является следующий абсолютно и равномерно сходящийся вместе со своей производной ряд:

$$y = Ce^x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x), \tag{55}$$

где

$$a_0(x) = \frac{e^x}{2C}\int_x^{x_2} U(x_1)e^{-2x_1}\,dx_1, \tag{56}$$

$$a_k(x) = -\frac{e^x}{2C}\int_x^{x_2}\sum_{m=0}^{k-1}(a_{k-1-m}(x_1)a_m(x_1) - a'_{k-1-m}(x_1)a'_m(x_1))e^{-2x_1}\,dx_1, \qquad k \geqslant 1. \tag{57}$$

Доказательство. Подставим ряд (55) в (53) и, возводя в квадрат, получаем

$$C^2e^{2x} + 2Ce^x\sum_{k=0}^{\infty} a'_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} a'_{k-m}a'_m = \\ = C^2e^{2x} + 2Ce^x\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} a_{k-m}a_m - U(x). \tag{58}$$

Приравняем нулевой член первого ряда слева к сумме нулевого члена первого ряда справа и последнего слагаемого справа:

$$a_0' = a_0 - \frac{U(x)e^{-x}}{2C}. \tag{59}$$

Решая уравнение (59), получаем равенство (56). Далее, приравняем в (58) сумму k-го члена первого ряда слева и $(k-1)$-го члена второго ряда слева к аналогичной сумме справа:

$$a_k'(x) = a_k(x) + \frac{1}{2C}\sum_{m=0}^{k-1}(a_{k-1-m}(x)a_m(x) - a_{k-1-m}'(x)a_m'(x))e^{-x}, \qquad k \geqslant 1. \tag{60}$$

Решая (60), получаем (57). Займемся теперь доказательством сходимости полученного ряда и ряда, составленного из производных членов этого ряда. Из (56) при $x \geqslant x_0$ имеем

$$|a_0| \leqslant \frac{C_1^2 e^{(2\alpha-1)x}}{4C(1-\alpha)}. \tag{61}$$

Из (59) следует, что

$$|a_0'| \leqslant \frac{C_1^2 e^{(2\alpha-1)x}}{2C}\left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right). \tag{62}$$

Введем обозначение $\max\{|a_k|, |a_k'|\} = b_k$. Из формул (61) и (62) следует, что

$$b_0 \leqslant \frac{C_1^2 e^{(2\alpha-1)x}}{2C}\left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right). \tag{63}$$

Из выражений (57) и (60) при $x \geqslant x_0$ вытекают соотношения

$$b_1 \leqslant \frac{C_1^4 e^{(4\alpha-3)x}}{4C^3}\left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^2\left(1 + \frac{1}{4(1-\alpha)}\right) \leqslant \frac{C_1^4 e^{(4\alpha-3)x}}{4C^3}\left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^3, \tag{64}$$

$$b_2 \leqslant \frac{C_1^6 e^{(6\alpha-5)x}}{4C^5}\left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^4\left(1 + \frac{1}{6(1-\alpha)}\right) \leqslant \frac{C_1^6 e^{(6\alpha-5)x}}{4C^5}\left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^5. \tag{65}$$

Сделаем предположение индукции: пусть для любого $m < k$

$$b_m \leqslant \frac{C_1^{2m+2} e^{(2(\alpha-1)(m+1)+1)x} 15^m}{2^{m+1}C^{2m+1}(m+1)^2}\left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^{2m+1}. \tag{66}$$

Очевидно, что b_0, b_1, b_2 удовлетворяют предположению (66). Используя гипотезу (66), из (57) и (60) получаем, что

$$b_k \leqslant \frac{C_1^{2k+2} e^{(2(\alpha-1)(k+1)+1)x} 15^{k-1}}{2^{k+1}C^{2k+1}}\left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^{2k+1}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{1}{(k-m)^2(m+1)^2}. \tag{67}$$

Используя (13), докажем (66) при $m = k$. Для сходимости ряда достаточно выполнения условия

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{b_k} \leqslant \frac{15C_1^2 e^{2(\alpha-1)x}}{2C^2}\left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^2 < 1.$$

Отсюда и следует достаточность (54).

Докажем теперь положительность производной. Действительно, применяя формулу суммы геометрической прогрессии и используя (66) и (54), имеем

$$y'(x) \geqslant Ce^x - \sum_{k=0}^{\infty} |a_k'(x)| \geqslant$$
$$\geqslant Ce^x - |a_0'(x)| \left[1 - \frac{15C_1^2 e^{2(\alpha-1)x}}{2C^2}\left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^2\right]^{-1} \geqslant \frac{Ce^x}{3-2\alpha} > 0.$$

Благодаря этому возведение в квадрат при получении (58) оказывается законным и, кроме того, для (53) при условиях (54) оказывается справедливым условие Липшица, что и доказывает единственность полученного решения. Теорема доказана.

Замечание 7. Решение уравнения (53) при условии (54) можно представить следующим образом:

$$y = Ce^x + \sum_{k=0}^{n} a_k(x) + o\left[\left(\frac{15C_1^2 e^{2(\alpha-1)x}}{2C^2}\left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^2\right)^n\right], \qquad n \to \infty. \tag{68}$$

Действительно, оценивая остаточный член ряда с применением формулы суммы геометрической прогрессии, получаем неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)\right| \leqslant |a_{n+1}(x)| \left[1 - \frac{15C_1^2 e^{2(\alpha-1)x}}{2C^2}\left(1 + \frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^2\right]^{-1},$$

что и доказывает (68).

Замечание 8. Можно построить аналогичное решение в окрестности $x = -\infty$, справедливо также решение, полученное заменой y на $-y$.

Замечание 9. Если в (54) положить $x_2 = +\infty$, то все рассуждения остаются справедливы. Задача Коши переходит при этом в условие $\lim_{x\to+\infty}(ye^{-x}) = C > 0$. Это условие уже не формирует задачу Коши, что не гарантирует единственности полученного решения. Однако можно поступить следующим образом: посчитать значение этого решения в какой-нибудь достаточно большой точке x_2 и задать, таким образом, задачу Коши. Решение этой задачи будет уже единственным на промежутке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Конечно же, можно выбрать x_2 сколь угодно большим, что, однако, не гарантирует отсутствия другого решения с тем же условием стремления на бесконечности.

В заключении этого раздела проиллюстрируем справедливость теоремы 4 и замечания 9 на простом примере. Предположим, что решением (53) является функция $y = e^x + 1$. Прямой подстановкой определяем, что такое возможно при $U(x) = 2e^x + 1$. Обозначим $C = \lim_{x\to+\infty}(ye^{-x}) = 1$, $C_1 = \sqrt{3}$, $\alpha = 1/2$, $x_0 = 0$, $x_2 = \infty$, $x_1 = \ln 96$. В этих обозначениях получаем справедливость теоремы 4 и замечания 9. Решением (53) является ряд (55)–(57), где $a_0(x) = 1 + e^{-x}/4$. Это же решение можно представить следующим образом:

$$y = e^x + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k(x) = e^x + 1 + \lim_{n\to\infty} O(e^{-(n+1)x}) = e^x + 1,$$

что и демонстрирует справедливость теоремы 4 и замечания 9.

7. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ РЯДА ТЕЙЛОРА В ОКРЕСТНОСТИ $x = x_0$ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Поставим задачу Коши

$$y'_x = \sqrt{y^2 - U(x)}, \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y_0^2 > U(x_0), \tag{69}$$

где $U(x)$ – заданная функция, аналитическая в окрестности $x = x_0$ и имеющая положительный радиус сходимости R:

$$U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_0)^m. \tag{70}$$

Теорема 5. *Единственным решением задачи* (69) *является ряд*

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m. \tag{71}$$

Здесь $a_0 = y_0$, $a_1 = \sqrt{y_0^2 - b_0}$,

$$a_{m+1} = \frac{1}{2a_1(m+1)}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k a_{m-k} - \sum_{k=1}^{m-1}(k+1)(m-k+1)a_{k+1}a_{m-k+1} - b_m\right), \tag{72}$$

если $m \geqslant 1$. *При* $m = 1$ *считаем, что вторая сумма в скобках в* (72) *равна нулю. Радиус сходимости ряда* (71) *оценивается следующим образом*:

$$R_1 \geqslant \frac{2|a_1|}{S}, \tag{73}$$

$$S = \max\left[64a_2^2; 9(2|a_1 a_3|)^{2/3}, \frac{4|a_1|}{R}, \left(\frac{16|y_0|}{81} + \frac{19a_1^2}{324} + 6 + M\right)^2\right], \tag{74}$$

$$M = \max\left(\frac{|b_m|R^{m-1}(m+1)^2}{2^m|a_1|}\right), \qquad m \geqslant 3. \tag{75}$$

Доказательство. Подставив выражения (71) и (70) в (69), возводя в квадрат и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x - x_0$, приходим к формуле (72). Для получения оценки радиуса сходимости ряда (71) выскажем предположение индукции. Пусть для любого $2 \leqslant k \leqslant m$

$$|a_k| \leqslant \frac{S^{k-1.5}}{k^3(2|a_1|)^{k-2}}, \tag{76}$$

где S – положительная константа, подлежащая определению. Докажем это утверждение для $k = m+1$ (из этого, кстати, автоматически вытекает справедливость (73)). Из неравенства (76) для $k = 2, 3$ имеем

$$S \geqslant 64a_2^2, \qquad S \geqslant 9(2|a_1 a_3|)^{2/3}. \tag{77}$$

Из выражения (72) следует, что для доказательства (76) при $k = m + 1$ достаточно выполнения условия

$$|a_{m+1}| \leqslant \frac{1}{2|a_1|(m+1)} \left[\frac{2|y_0|S^{m-1.5}}{m^3(2|a_1|)^{m-2}} + \frac{S^{m-2.5}}{(m-1)^3(2|a_1|)^{m-2}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=2}^{m-2} \frac{S^{m-3}}{k^3(2|a_1|)^{m-4}(m-k)^3} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{S^{m-1}}{(k+1)^2(2|a_1|)^{m-2}(m-k+1)^2} + |b_m| \right] \leqslant \\ \leqslant \frac{S^{m-0.5}}{(m+1)^3(2|a_1|)^{m-1}}, \qquad m \geqslant 3. \tag{78}$$

Из условия (78), в котором мы считаем, что первая сумма при $m = 3$ равна нулю, получаем еще одно условие на S:

$$S \geqslant \left[\frac{2|y_0|(m+1)^2}{m^3\sqrt{S}} + \frac{(2a_1)^2(m+1)^2}{(m-1)^3 S\sqrt{S}} + \frac{(2a_1)^2(m+1)^2}{S^2} \sum_{k=2}^{m-2} \frac{1}{k^3(m-k)^3} + \right. \\ \left. + (m+1)^2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{(k+1)^2(m-k+1)^2} + \frac{|b_m|(2|a_1|)^{m-2}(m+1)^2}{S^{m-1}} \right]^2 \tag{79}$$

при $m \geqslant 3$. Оценим первую сумму из (79) при $m \geqslant 4$:

$$(m+1)^2 \sum_{k=2}^{m-2} \frac{1}{k^3(m-k)^3} \leqslant (m+1)^2 \int_2^{m-1} \frac{dx}{(x-1)^3(m-x)^3} = \\ = \frac{(m+1)^2}{(m-1)^3}\left(1 - \frac{1}{(m-2)^2}\right) + \frac{6(m+1)^2}{(m-1)^4}\left(1 - \frac{1}{m-2}\right) + \frac{12(m+1)^2\ln(m-2)}{(m-1)^5} \leqslant \\ \leqslant \frac{(m+1)^2}{(m-1)^3} + \frac{18(m+1)^2}{(m-1)^4} = \frac{(m+1)^2(m+17)}{(m-1)^4} \leqslant \\ \leqslant \left(1 + \frac{18}{m-1}\right)\left(1 + \frac{2}{m-1}\right)^2 \frac{1}{m-1} \leqslant \frac{175}{27} \leqslant 7. \tag{80}$$

Для второй же суммы имеем

$$(m+1)^2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{(k+1)^2(m-k+1)^2} \leqslant (m+1)^2 \int_1^m \frac{dx}{x^2(m+1-x)^2} = \\ = \frac{4\ln m}{m+1} + \frac{2(m-1)}{m} \leqslant 6. \tag{81}$$

Полагая в (79), что сумма равна шести, мы усилим неравенство. Тогда из этого неравенства следует, что $S \geqslant 36$. Последнее слагаемое в (79) представляет собой последовательность, для сходимости которой к нулю достаточно выполнения условия $S > 2|a_1|/R$. Положим в этой последовательности

$$S = \frac{4|a_1|}{R}. \tag{82}$$

Тогда последовательность является ограниченной. Пусть M – ее максимум. Считая в правой части (79), что последнее слагаемое равно M, значение $S = 36$ в первых трех слагаемых, $m = 3$ в первых двух слагаемых и используя оценки (80) и (81), мы только усилим неравенство:

$$S \geqslant \left(\frac{16|y_0|}{81} + \frac{19a_1^2}{324} + 6 + M\right)^2. \tag{83}$$

Используя формулы (77), (82) и (83), доказываем равенство (74).

Докажем теперь положительность производной, используя выражения (73), (74) и (76):

$$y'(x) = a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1} \geqslant a_1 - \frac{2a_1}{\sqrt{S}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} \geqslant \frac{3a_1}{4} > 0.$$

Благодаря этому возведение в квадрат при получении (72) оказывается законным и, кроме того, для (69) при выполнении требований теоремы оказывается справедливым условие Липшица, что и доказывает единственность полученного решения. Теорема доказана.

Замечание 10. В теореме 5 мы считали радиус сходимости R конечным. В случае, если он бесконечен, в (74) положим $4|a_1|/R = 0$. Последнее слагаемое из (79) теперь сходится к нулю и ограничено при любом положительном S. Полагая в нем $S = 36$, мы получаем вместо (75) равенство

$$M = \max\left(\frac{|b_m a_1^{m-2}|(m+1)^2}{2 \cdot 18^{m-1}}\right), \qquad m \geqslant 3.$$

С такими изменениями теорема 5 справедлива для бесконечного радиуса сходимости R.

Пример 1. Рассмотрим потенциал $U(x) = x^2 + \lambda$. В этом случае в (70) имеем $b_0 = x_0^2 + \lambda$, $b_1 = 2x_0$, $b_2 = 1$, $b_m = 0$, $m \geqslant 3$. Далее считаем $R = \infty$. Тогда в (74) и (75) получаем $4|a_1|/R = M = 0$. При $\lambda = 0$ формулы (70)–(75) переходят в формулы для квадратичного потенциала.

Ввиду особой важности сформулируем следствие из теоремы 5 для квадратичного потенциала.

Следствие 1. *Единственным решением задачи* (69) *для* $U(x) = x^2$ *является ряд* $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$. *Здесь* $a_0 = y_0$, $a_1 = \sqrt{y_0^2 - b_0}$,

$$a_{m+1} = \frac{1}{2a_1(m+1)}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k a_{m-k} - \sum_{k=1}^{m-1} (k+1)(m-k+1) a_{k+1} a_{m-k+1} - b_m\right), \quad m \geqslant 1,$$

$$b_0 = x_0^2, \qquad b_1 = 2x_0, \qquad b_2 = 1, \qquad b_m = 0, \qquad m \geqslant 3.$$

При $m = 1$ *считаем, что вторая сумма в скобках равна нулю. Радиус сходимости полученного ряда оценивается следующим образом*:

$$R_1 \geqslant \frac{2|a_1|}{S}, \qquad S = \max\left[64a_2^2;\ 9(2|a_1 a_3|)^{2/3};\ \left(\frac{16|y_0|}{81} + \frac{19a_1^2}{324} + 6\right)^2\right].$$

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги. Будем рассматривать следующую задачу типа Коши:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'_\varphi = 0, \quad H^2 = \frac{1}{3M^2}\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi)\right), \quad H(t_0) = H_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0. \tag{84}$$

Если $V(\varphi) < 0$, $H_0 = 0$, то особое решение задачи (84) имеет вид

$$H \equiv 0, \qquad \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{-2V(\varphi)}} = \pm(t - t_0).$$

Если $V = V_0 \geqslant 0$, $H_0 = \pm\frac{1}{M}\sqrt{\frac{V_0}{3}}$, то особое решение (84) имеет вид $H = H_0$, $\varphi = \varphi_0$. Далее, для любого аналитического потенциала локальное решение задачи (84) дается теоремой 5 с использованием условия (5) и замен

$$H = \frac{1}{3}y, \qquad \varphi = M\sqrt{\frac{2}{3}}x, \qquad U = \frac{3V}{M^2}. \tag{85}$$

Для любого непрерывного медленно растущего потенциала (т. е. не быстрее экспоненты) решение (84) в окрестности достаточно большого φ_0 (в том числе и бесконечно большого) дается теоремой 4 с использованием равенства (5) и замен (85). Это решение описывает стадию так называемого Большого взрыва. Более конкретные формулы для квадратичного потенциала ($V(\varphi) = m^2\varphi^2/2$) в этом случае получены в работе [15]. Ряды, полученные в статье [15], являются обобщенными рядами Дирихле.

Для квадратичного потенциала в окрестности $\varphi = 0$ решение (84) $H(\varphi)$ дается теоремой 1. Используя замены

$$H = \frac{m}{3}y, \quad \varphi = M\sqrt{\frac{2}{3}}x, \quad U = \frac{3V}{M^2m^2}, \qquad t = \frac{t_1}{m}, \tag{86}$$

получаем параметрическую зависимость $H(\varphi)$ от параметра ψ. Далее,

$$\begin{aligned} m(t - t_0) &= \int_x^{x_0} \frac{dx}{y'_x} = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{x'_\psi}{\dot{x}(\psi)}\, d\psi = -\int_{\psi_0}^{\psi} \left[\frac{u'_\psi \cos(\psi/2)}{u\sin(\psi/2)} + \frac{1}{2}\right] d\psi = \\ &= \frac{\psi_0 - \psi}{2} + \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sin\psi\, d\psi}{2(u + \sin\psi)}. \end{aligned} \tag{87}$$

Получаем зависимость $t(\psi)$ и, следовательно, параметрические зависимости $H(t)$ и $\varphi(t)$. Пользуясь тем, что ряд в (7) сходится равномерно, имеем при больших ψ

$$u = \frac{\psi_0 - \psi}{2} + O(1), \qquad m(t - t_0) = \frac{\psi_0 - \psi}{2} + O(1),$$

$$H = \frac{2}{3(t - t_0)} + O\left(\frac{1}{(t - t_0)^2}\right), \tag{88}$$

$$m\varphi = M\sqrt{6}H\cos\frac{\psi}{2}. \tag{89}$$

Приближенные формулы (88), (89) находятся в точном соответствии с результатами работы [1]. Однако теперь мы имеем и точные формулы в виде рядов. Как видно из (88), (89), при $\psi \to -\infty$ $t \to +\infty$. Следовательно, мы имеем решения $H(t)$ и $\varphi(t)$ при неограниченно возрастающем времени. Решение $\varphi(t)$ (84), как было показано еще в монографии [1], в этой окрестности представляет из себя затухающие колебания. Фазовая же траектория в системе координат $\dot{\varphi}(\varphi)$ в окрестности $\varphi = 0$ является закручивающейся по часовой стрелке к началу координат спиралью.

И, наконец, разберем для квадратичного потенциала область инфляции (так называемую "аттракторную" область). Эта область примерно описывается соотношениями

$$\frac{3H}{m} - \frac{\varphi}{M}\sqrt{\frac{3}{2}} \ll \frac{\varphi}{M}\sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3H}{m}.$$

Точное описание этой области и два типа решений в ней даются теоремами 2 и 3 с использованием условия (5) и замен (86).

Благодарности. Работа была начата на спецсеминаре НОЦ МИАН. Выражаю благодарность всем участникам семинара за активное обсуждение работы. Особую благодарность хочется выразить И. В. Воловичу за постановку задачи и ряд ценных советов.

Список литературы

[1] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

[2] В. А. Белинский, И. М. Халатников, "О степени общности инфляционных решений в космологических моделях со скалярным полем", *ЖЭТФ*, **93**:3 (1987), 784–799.

[3] A. V. Yurov, V. A. Yurov, "Friedman versus Abel equations: a connection unraveled", *J. Math. Phys.*, **51**:8 (2010), 082503, 17 pp., arXiv: 0809.1216.

[4] H.-C. Kim, "A new variable in scalar cosmology with exponential potential", *J. Korean Phys. Soc.*, **63**:8 (2013), 1675–1680, arXiv: 1303.6402.

[5] J. G. Russo, "Exact solution of scalar field cosmology with exponential potentials and transient acceleration", *Phys. Lett. B*, **600**:3–4 (2004), 185–190, arXiv: hep-th/0403010.

[6] E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, "Late-time cosmology in (phantom) scalar-tensor theory: dark energy and the cosmic speed-up", *Phys. Rev. D*, **70**:4 (2004), 043539, 20 pp., arXiv: hep-th/0405034.

[7] S. Nojiri, S. D. Odintsov, "Unifying phantom inflation with late-time acceleration: scalar phantom-non-phantom transition model and generalized holographic dark energy", *Gen. Rel. Grav.*, **38**:8 (2006), 1285–1304, arXiv: hep-th/0506212.

[8] S. Capozziello, S. Nojiri, S. D. Odintsov, "Unified phantom cosmology: inflation, dark energy and dark matter under the same standard", *Phys. Lett. B*, **632**:5–6 (2006), 597–604, arXiv: hep-th/0507182.

[9] L. P. Chimento, "General solution to two-scalar field cosmologies with exponential potential", *Class. Quantum Grav.*, **15**:4 (1998), 965–974.

[10] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, S. Yu. Vernov, "Dynamics in nonlocal linear models in the Friedmann–Robertson–Walker metric", *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:30 (2008), 304003, 14 pp., arXiv: 0711.1364.

[11] D. S. Salopek, J. R. Bond, "Nonlinear evolution of long-wavelength metric fluctuations in inflationary models", *Phys. Rev. D*, **42**:12 (1990), 3936–3962.

[12] P. Fré, A. Sagnotti, A. S. Sorin, "Integrable scalar cosmologies I. Foundations and links with string theory", *Nucl. Phys. B*, **877**:3 (2013), 1028–1106.

[13] И. Я. Арефьева, С. Ю. Вернов, А. С. Кошелев, “Точное решение в струнной космологической модели”, *ТМФ*, **148**:1 (2006), 23–41.

[14] А. В. Юров, В. А. Юров, С. В. Червон, М. Сами, “Потенциал полной энергии как суперпотенциал в интегрируемых космологических моделях”, *ТМФ*, **166**:2 (2011), 299–311.

[15] Э. А. Курьянович, “Представление решения уравнения Фридмана обобщенным рядом Дирихле”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2013, № 2(31), 200–205.

[16] E. A. Kurianovich, “Exact solutions of Friedmann equation”, *J. Math. Phys.*, **57**:12 (2016), 122503, 14 pp.

[17] I. Y. Aref’eva, A. S. Koshelev, S. Yu. Vernov, “Crossing the $w=-1$ barrier in the D3-brane dark energy model”, *Phys. Rev. D*, **72**:6 (2005), 064017, 11 pp., arXiv: astro-ph/0507067.

Поступила в редакцию 3.11.2017,
после доработки 17.10.2018,
принята к публикации 1.11.2018