МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 23, № 1 (1978)

УДК 517.5

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ ОБРАЩЕНИЯ СИСТЕМ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ НА СИСТЕМЫ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Болотов, А. П. Южаков

С помощью одного многомерного аналога логарифмического вычета выводятся формулы, выражающие коэффициенты степенных рядов неявных функций $z_j = \varphi_j(w) = \varphi_j(w_1, \ldots, w_m)$, $j = 1, \ldots, n$, определяемых системой уравнений $F_j(w, z) = F_j(w_1, \ldots, w_m; z_1, \ldots, z_n) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $F_j(0, 0) = 0$, $\partial F_j(0, 0)/\partial z_k = \delta_{jk}$ в окрестности точки $(0, 0) \in C^{m+n}_{(w,z)}$, через коэффициенты степенных рядов функций $F_j(w, z)$, $j = 1, \ldots, n$. Как следствие получаются известные формулы обращения системы кратных степенных рядов. Библ. 7 назв.

В работах Кэли [1], Сильвестра [2], Сакка [3] даны формулы обращения системы степенных рядов. А именно, пусть дана система кратных степенных рядов

$$w_j = f_j(z) = z_j + \sum_{|\alpha| \geqslant 2} a_{j\alpha} z^\alpha, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

и ряд

$$\Phi(z) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} b_\alpha z^\alpha, \tag{2}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j = 0, 1, 2, \ldots$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$; $z \in \mathbb{C}^n$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$. В [1], [2] для $n = 2, 3$, а в [3] для $n \geqslant 2$ вводятся формулы, выражающие коэффициенты ряда

$$\Phi(g(w)) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} c_\alpha w^\alpha, \tag{3}$$

где $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $z = g(w)$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$ — обращение системы (1), через коэффициенты рядов (1), (2) (при $\Phi(z) \equiv z_j$, $j = 1, \ldots, n$ (3) дает обращение системы (1)). При выводе упомянутых формул Кэли и Силь-

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Математические заметки», 1978

вестр используют метод кратных вычетов, введенный Якоби [4] (под вычетом мероморфной функции многих переменных там понимается коэффициент при минус первых степенях разложения этой функции в кратный ряд Лорана). Сакк применяет операторный метод.

В настоящей заметке рассматривается обобщение указанных формул на системы произвольных неявных функций. При этом существенно используется один многомерный аналог теоремы о логарифмическом вычете (см. [5, теорема 3]).

§ 1. Постановка задачи. Пусть

$$F_j(w, z) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\geqslant 1} a_{j\alpha\beta} w^\alpha z^\beta, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$\Phi(w, z) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\geqslant 0} b_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta, \tag{5}$$

где $w = (w_1, \ldots, w_m) \in \mathbf{C}^m$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, α_j, $\beta_j = 0, 1, \ldots$ — кратные степенные ряды, абсолютно сходящиеся в окрестности точки $(0; 0) \in C^{m+n}_{(w,z)}$, причем

$$\partial F_j(0, 0)/\partial z_k = \delta_{jk}, \qquad j, k = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

По теореме о неявных функциях существует система функций

$$z_j = \varphi_j(w) = \varphi_j(w_1, \ldots, w_m), \quad j = 1, \ldots, n \qquad (z = \varphi(w)), \tag{7}$$

голоморфных в окрестности точки $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{C}^m_w$ и удовлетворяющих в некоторой окрестности точки $(0; 0) \in C^{m+n}_{(w,z)}$ системе уравнений

$$F_j(w, z) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Ставится задача: выразить коэффициенты разложения в степенной ряд

$$\Phi(w, \varphi(w)) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} d_\alpha w^\alpha \tag{9}$$

через коэффициенты рядов (4), (5).

Замечание 1. В более общем случае, когда $\partial(F)/\partial(z)|_{(0;0)} = \partial(F_1, \ldots, F_n)/\partial(z_1, \ldots, z_n)|_{(0;0)} \neq 0$, систему (8) с помощью линейного преобразования можно заменить эквивалентной ей системой так, чтобы выполнялось условие (6).

Замечание 2. В [6] даны формулы, выражающие коэффициенты ряда (9) через производные некоторых выражений, содержащих функции (4), (5) в точке (0; 0) (см. формулу (21)).

§ 2. Из условия (6) следует, что ряды (4) можно представить в виде

$$F_j(w, z) = z_j + g_j(w, z), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

где

$$g_j(w, z) = \sum\nolimits'_{\mu,\nu} a_{j\mu\nu} w^\mu z^\nu. \tag{11}$$

Здесь и ниже предполагается, что в $\sum'_{\mu,\nu}$, $\prod'_{\mu,\nu}$, $\{\ \}'_{\mu,\nu}$ мультииндексы $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ пробегают всевозможные наборы неотрицательных целых чисел, для которых либо $|\mu| + |\nu| \geqslant 2$, либо $\nu = 0 = (0, \ldots, 0)$, $|\mu| \geqslant 1$. Поставленную в § 1 задачу решает следующая

ТЕОРЕМА [1]). *Коэффициенты* d_α, $|\alpha| \geqslant 0$, *разложения* (9) *выражаются через коэффициенты рядов* (4), (5) *следующей формулой*:

$$d_\alpha = \sum\nolimits_{(\eta,\tau), S} (-1)^{|\rho(S)|} \cdot b_{\eta\tau} \cdot D(S) \cdot \\ \cdot \prod\nolimits_{j=1}^{n} \left([\rho(S_j) - 1]! \cdot \prod\nolimits'_{\mu,\nu} \frac{1}{s_{j\mu\nu}!} (a_{j\mu\nu})^{s_{j\mu\nu}} \right), \tag{12}$$

где $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$, $S_j = \{s_{j\mu\nu}\}'_{\mu,\nu}$ — *набор неотрицательных целых чисел* $s_{j\mu\nu}$, *среди которых лишь конечное число отличны от нуля*, $\rho(S) = (\rho(S_1), \ldots, \rho(S_n))$, $\rho(S_j) = \sum'_{\mu,\nu} s_{j\mu\nu}$; $D(S) = \det \| \delta_{kj} \cdot \rho(S_j) - \sigma_k(S_j) \|_{k,j=1,\ldots,n}$, $\sigma_k(S_j) = \sum'_{\mu,\nu} \nu_k s_{j\mu\nu}$; *суммирование в* $\sum_{(\eta,\tau),S}$ *ведется по всевозможным мультииндексам* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $|\eta| + |\tau| \geqslant 0$, *и системам* $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$, *удовлетворяющим условиям*

$$\begin{aligned} \eta_k + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \lambda_k(S_j) &= \alpha_k, \qquad k = 1, \ldots, m, \\ \tau_k + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \sigma_k(S_j) &= \rho(S_k), \qquad k = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\lambda_k(S_j) = \sum'_{\mu,\nu} \mu_k s_{j\mu\nu}$. *При этом, если* S *содержит* S_j, *для которого* $\rho(S_j) = 0$ (*т. е.* $s_{j\mu\nu} = 0$ *для всех* $s_{j\mu\nu} \in S_j$), *то в соответствующем слагаемом формулы* (12) *вместо*

---

[1]) В частном случае $n = 1$ эта теорема получена в [6, предложение 2].

произведения $[\rho(S_j)-1]!\cdot\prod'_{\mu,\nu}\frac{1}{s_{j\mu\nu}!}(a_{j\mu\nu})^{s_{j\mu\nu}}$ *нужно поставить* 1, *а в* $D(S)$ *вместо* $\delta_{kj}\rho(S_j)$ — $\sigma_k(S_j)$ *взять* δ_{kj}.

Замечание 3. Формула (12) содержит лишь конечное число слагаемых, отличных от нуля. Действительно, из общих соображений следует, что d_α выражается лишь через те коэффициенты $b_{\eta\tau}$, $a_{j\mu\nu}$ рядов (5), (11), для которых $|\eta|+|\tau|\leqslant|\alpha|$, $|\mu|+|\nu|\leqslant|\alpha|$.

Замечание 4. При $\Phi(w,z)\equiv z_j$, $j=1,\ldots,n$, из разложения (9) получаются разложения в степенные ряды неявных функций (7), определяемых системой (8). В этом случае в формуле (12) исчезает суммирование по η, τ, а условия (13) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{j=1}^n\lambda_k(S_j)=\alpha_k, && k=1,\ldots,m,\\ &\delta_{jk}+\textstyle\sum_{j=1}^n\sigma_k(S_j)=\rho(S_k), && k=1,\ldots,n.\end{aligned}\tag{14}$$

Доказательство. Можно подобрать числа $\varepsilon>0$, $\delta>0$ так, чтобы для $\zeta\in\Gamma=\{\zeta\in\mathbf{C}^n\colon|\zeta_1|=\ldots=|\zeta_n|=\varepsilon\}$ и $w\in\bar U=\{w\in\mathbf{C}^m\colon|w_1|\leqslant\delta,\ldots,|w_m|\leqslant\delta\}$ выполнялись неравенства (см. (10), (11)):

$$|g_j(w,\zeta)|<|\zeta_j|=\varepsilon,\qquad j=1,\ldots,n.\tag{15}$$

Тогда по теореме 3 из [5], функцию (9) в замкнутом полицилиндре $\bar U$ можно представить в виде (см. также [6])

$$\Phi(w,\varphi(w))=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma\frac{\Phi(w,\zeta)\cdot\partial(F)/\partial(\zeta)}{F(w,\zeta)}\,d\zeta,\tag{16}$$

где $F(w,\zeta)=\prod_{j=1}^n F_j(w,\zeta)=\prod_{j=1}^n[\zeta_j+g_j(w,\zeta)]$, $d\zeta=d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$. Из (16) коэффициенты разложения (9), как коэффициенты Тейлора (см. [7, стр. 275]), выразятся формулой

$$\begin{aligned}d_\alpha&=\frac{1}{(2\pi i)^m}\int_\gamma\frac{\Phi(\omega,\varphi(\omega))}{\omega^{\alpha+I}}\,d\omega=\\&=\frac{1}{(2\pi i)^{m+n}}\int_{\gamma\times\Gamma}\frac{\Phi(\omega,\zeta)\cdot\partial(F(\omega,\zeta))/\partial(\zeta)}{F(\omega,\zeta)\cdot\omega^{\alpha+I}}\,d\omega\wedge d\zeta,\end{aligned}\tag{17}$$

где $\gamma=\{\omega\in\mathbf{C}^m\colon|\omega_1|=\ldots=|\omega_m|=\delta\}$, $\omega^{\alpha+1}=\omega_1^{\alpha_1+1}\ldots\omega_m^{\alpha_m+1}$, $d\omega=d\omega_1\wedge\ldots\wedge d\omega_m$.

Выражение $F^{-1}\,\partial(F)/\partial(\zeta)$ можно представить в виде $\partial(\ln F)/\partial(\zeta)=\partial(\ln F_1,\ldots,\ln F_n)/\partial(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$.

Согласно (15) функция

$$(\Phi(\omega, \zeta)\, \partial(F) / \partial(\zeta)) / F(\omega, \zeta) = \\ = \Phi(\omega, \zeta)\, \partial(\ln F(\omega, \zeta))/\partial(\zeta) \qquad (18)$$

голоморфна на $(m+n)$-круговом компакте $\bar{U} \times \Gamma$ и разлагается на нем в абсолютно и равномерно сходящийся кратный ряд Лорана. Из (17) следует, что коэффициент d_α равен коэффициенту при $\omega^\alpha \zeta^{-1} = \omega_1^{\alpha_1} \ldots \omega_m^{\alpha_n} \zeta_1^{-1} \ldots \ldots \zeta_n^{-1}$ этого ряда Лорана.

Разложение в ряд Лорана функции (18) можно найти непосредственно. Учитывая (10), (11), (15), получим следующие, абсолютно и равномерно сходящиеся на $\bar{U} \times \Gamma$, разложения:

$$\ln F_j(\omega, \zeta) = \ln \zeta_j + \ln[1 + g_j(\omega, \zeta)/\zeta_j] = \\ = \ln \zeta_j + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p \cdot \zeta_j^p} [g_j(\omega, \zeta)]^p = \\ = \ln \zeta_j + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} (p-1)! \sum_{\rho(S_j)=p} \Big[\prod_{\mu,\nu}' \frac{1}{s_{j\mu\nu}!} \cdot \\ \cdot (a_{j\mu\nu})^{s_{j\mu\nu}} \Big] \omega^{\sum_{\mu,\nu}' \mu s_{j\mu\nu}} \cdot \zeta^{\sum_{\mu,\nu}' \nu s_{j\mu\nu} - p l_j} = \\ = \ln \zeta_j + \sum_{\rho(S_j) \geqslant 1} (-1)^{\rho(S_j)-1} [\rho(S_j) - 1]! \cdot \\ \cdot \Big[\prod_{\mu,\nu}' \frac{1}{s_{j\mu\nu}!} (a_{j\mu\nu})^{s_{j\mu\nu}} \Big] \omega^{\lambda(S_j)} \zeta^{\sigma(S_j) - \rho(S_j) e_j}, \\ j = 1, \ldots, n,$$

где $e_j = (0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$, $\lambda(S_j) = \sum_{\mu,\nu}' \mu s_{j\mu\nu}$,

$$\sigma(S_j) = \sum_{\mu,\nu}' \nu s_{j\mu\nu}; \text{ в } \sum_{\rho(S_j)=p}, \sum_{\rho(S_j) \geqslant 1}$$

суммирование ведется по всевозможным наборам $S_j = \{s_{j\mu\nu}\}_{\mu,\nu}'$, для которых $\rho(S_j) = \sum_{\mu,\nu}' s_{j\mu\nu} = p$, соответственно, $\geqslant 1$. Отсюда

$$\partial \ln F_j(\omega, \zeta)/\partial \zeta_k = \frac{\delta_{jk}}{\zeta_j} + \sum_{\rho(S_j) \geqslant 1} (-1)^{\rho(S_j)} [\rho(S_j) - 1]! \cdot \\ \cdot \Big[\prod_{\mu,\nu}' \frac{1}{s_{j\mu\nu}!} (a_{j\mu\nu})^{s_{j\mu\nu}} \Big] \cdot [\rho(S_j)\, \delta_{jk} - \sigma_k(S_j)] \cdot \\ \cdot \omega^{\lambda(S_j)} \zeta^{\sigma(S_j) - \rho(S_j) l_j - l_k}, \qquad k, j = 1, \ldots, n. \qquad (19)$$

δ_{jk}/ζ_j можно рассматривать как член суммы $\Sigma_{\rho(S_j)\geqslant 0}$, соответствующий набору S_j, состоящему из одних нулей, т. е. для которого $\rho(S_j) = 0$, с учетом соглашений, сделанных в теореме. Подставляя (19) в якобиан $\partial(\ln F)/\partial(\zeta)$ и вынося знаки суммирования, а также общие множители в строках и столбцах за знак определителя, получим

$$\frac{\partial(\ln F(\omega, \zeta))}{\partial(\zeta)} = \sum\nolimits_S (-1)^{|\rho(S)|} D(S) \left\{ \prod\nolimits_{j=1}^{n} [\rho(S_j) - 1]! \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left[\prod\nolimits'_{\mu,\nu} \frac{1}{s_{j\mu\nu}!} (a_{j\mu\nu})^{s_{j\mu\nu}} \right] \right\} \omega^{\lambda(S)} \zeta^{\sigma(S)-\rho(S)-I}, \qquad (20)$$

где $\lambda(S) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(S_j)$, $\sigma(S) = \sum_{j=1}^{n} \sigma(S_j)$, $\rho(S) = (\rho(S_1), \ldots, \rho(S_n))$, $I = (1, \ldots, 1)$, Σ_S — суммирование по всевозможным наборам $S = (S_1, \ldots, S_n)$, для которых $|\rho(S)| = \rho(S_1) + \ldots + \rho(S_n)$ конечно. Перемножая ряды (5) и (19), получим разложение Лорана для функции (18). Наконец, выделяя в нем коэффициент при $\omega^\alpha \zeta^{-I}$, получим (12).

Замечание 5. Формулу (12) можно также получить, исходя из обобщения разложения Лагранжа на системы неявных функций в [6], где дана следующая формула коэффициентов ряда (9):

$$d_\alpha = \sum\nolimits_{|\beta| \leqslant 2|\alpha|} (-1)^{|\beta|} \frac{1}{\beta!\,\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial w^\alpha \partial z^\beta} \left[\Phi(w, z) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot [F(w, z) - z]^\beta \frac{\partial(F)}{\partial(z)} \right] \Bigg|_{(0;\,0)}. \qquad (21)$$

Раскрывая $[F(w, z) - z]^\beta = \prod_{j=1}^{n} [F_j(w, z) - z_j]^{\beta_j}$ по формуле бинома, представим d_α в виде

$$d_\alpha = \sum\nolimits_{|\beta| \leqslant 2|\alpha|} \sum\nolimits_{0 \leqslant \nu \leqslant \beta} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\,(\nu + I)!\,(\beta - \nu)!} \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial w^\alpha \partial z^\beta} \cdot$$
$$\cdot \left[\Phi(w, z)\, z^{\beta-\nu} \frac{\partial(F^{\nu+I})}{\partial(z)} \right] \Bigg|_{(0;\,0)}. \qquad (22)$$

Подставляя в (22) ряды (5), (10), (11), и производя соответствующие операции с рядами, получим формулу, выражающую коэффициент d_α через коэффициенты рядов (5), (11), которая после обратного свертывания по формуле бинома преобразуется к виду (12).

§ 3. Положив в теореме $m = n$, $F_j(w, z) = f_j(z) - w_j$, $j = 1, \ldots, n$, $\Phi(w, z) = \Phi(z)$, соответственно, $b_{\alpha\beta} = 0$

при $\alpha \neq 0 = (0, \ldots, 0)$, $b_{0\beta} = b_\beta$; $a_{j\mu_\nu} = 0$ при $\mu \neq 0$, исключая $\mu = l_j$, $\nu = 0$; $a_{jl_j0} = -1$, $a_{j0\nu} = a_{j\nu}$, получим, как следствие, формулы Кэли, Сильвестра, Сакка [1] — [3], причем в единообразном виде.

Следствие. *Коэффициенты* c_α, $|\alpha| \geqslant 0$ *ряда* (3) *выражаются через коэффициенты рядов* (1), (2) *формулой*

$$c_\alpha = \sum\nolimits_{\tau, S} (-1)^{|\rho(S)|} \cdot b_\tau \Delta(S) \prod\nolimits_{j=1}^{n} \frac{[\rho(S_j) + \alpha_j - 1]!}{\alpha_j!} \cdot$$

$$\cdot \prod\nolimits_{|\nu| \geqslant 2} \frac{1}{s_{j\nu}!} (a_{j\nu})^{s_{j\nu}}, \qquad (23)$$

где $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$, $S_j = \{s_{j\nu}\}_{|\nu| \geqslant 2}$ — *набор неотрицательных целых чисел* $s_{j\nu}$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $|\nu| \geqslant 2$, *среди которых лишь конечное число отличных от нуля*;

$$\rho(S) = (\rho(S_1), \ldots, \rho(S_n)), \quad \rho(S_j) = \sum\nolimits_{|\nu| \geqslant 2} s_{j\nu};$$

$$\Delta(S) = \det \| \delta_{kj} [\alpha_j + \rho(S_j)] - \sigma_k(S_j) \|_{j, k=1, \ldots, n},$$

$\sigma_k(S_j) = \sum_{|\nu| \geqslant 2} \nu_k s_{j\nu}$, $j, k = 1, \ldots, n$; *суммирование в* $\sum_{\tau, S}$ *ведется по всевозможным мультииндексам* $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $|\tau| \geqslant 0$ *и наборам* S, $\rho(S) \geqslant 0$, *удовлетворяющих условиям*

$$\tau_k + \sum\nolimits_{j=1}^{n} \sigma_k(S_j) = \alpha_k + \rho(S_k), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

При этом, если $\rho(S_k) = 0$, $\alpha_k = 0$, *то в соответствующем слагаемом формулы* (20) *вместо произведения* $[\alpha_j + \rho(S_j) - 1]! \cdot \prod_{|\nu| \geqslant 2} \frac{1}{s_{j\nu}!} (a_{j\nu})^{s_{j\nu}}$ *нужно поставить* 1, *а в определителе* $\Delta(S)$ *вместо* $\delta_{kj}[\alpha_j + \rho(S_j)] - \sigma_k(S_j)$ *взять* δ_{kj}.

Приведенное здесь правило вычисления слагаемых, соответствующих случаю $\alpha_j = \rho(S_j) = 0$, более компактно, чем в работе Сакка [3]. В работе Кэли [1] вычисление коэффициентов $c_\alpha = c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, в случае, когда некоторые из индексов $\alpha_j = 0$, не рассматривалось.

§ 4. Пример. Найти степенные ряды

$$z_j = \sum\nolimits_{\alpha_1, \alpha_2=1}^{\infty} d_{j\alpha_1\alpha_2} w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2}, \qquad j = 1, 2,$$

определяемые системой

$$z_1 - w_1 - w_2^p z_2^q = 0,$$
$$z_2 - w_2 - w_1^p z_1^q = 0$$

в окрестности начала координат. Для этого случая условия (14) принимают вид

$$\begin{aligned} m_1 + pk_2 &= \alpha_1, \\ m_2 + pk_1 &= \alpha_2, \\ \delta_{1j} - k_1 + qk_2 - m_1 &= 0, \\ \delta_{2j} - k_2 + qk_1 - m_2 &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

где введены обозначения $m_1 = s_{1(1,0)(0,0)}$, $m_2 = s_{2(0,1)(0,0)}$, $k_1 = s_{1(0,p)(0,q)}$, $k_2 = s_{2(p,0)(q,0)}$. Система (24) имеет не более одного решения (k_1, k_2, m_1, m_2). Тогда по формуле (12) для тех α_1, α_2, для которых система (24) имеет неотрицательные целочисленные решения,

$$d_{1\alpha_1\alpha_2} = \frac{(k_1+m_1-1)!\,(k_2+m_2-1)!}{k_1!\,m_1!\,k_2!\,m_2!} \begin{vmatrix} k_1+m_1 & -qk_2 \\ -qk_1 & k_2+m_2 \end{vmatrix}.$$

Для остальных α_1, α_2 $d_{1\alpha_1\alpha_2} = 0$. Приняв k_1, k_2 ($k_j = 0,1,\ldots$) за индексы суммирования и выразив через них m_1, m_2, α_1, α_2 согласно (24), получим

$$z_1 = \sum_{\substack{k_1,\,k_2 \\ -k_1+qk_2+1\geqslant 0 \\ qk_1-k_2\geqslant 0}} \frac{(qk_1)!\,(qk_2)!}{k_1!\,(qk_2-k_1+1)!\,k_2!\,(qk_1-k_2)!} \cdot$$
$$\cdot w_1^{k_2(p+q)-k_1+1} w_2^{k_1(p+q)-k_2} = w_1 + w_2^{p+q} + w_1^{q(p+q)} w_2^{p} + \ldots$$

Аналогично находится ряд для z_2.

Институт физики СО АН СССР
Красноярский государственный университет

Поступило
26.IV.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Cayley A., Note sur une formule pour la reversion des series, J. Reine Angew. Math., 52 (1856), 276—284.
[2] Sylvester J. J., On the change of systems of independent variables, Quart. J. Math., 1 (1857), 43—56, 126—134.
[3] Sack R. A., Generalisation of Lagrange's expansion for functions of several implicity defined variables, J. soc. Industr. Appl. Math., 134 (1965), 913—926.
[4] Jacobi G. G., De resolutione aequationum per series infinitas, J. Reine Angew. Math., 6 (1830), 257—286.
[5] Жаков А. П., Куприков А. В., О логарифмическом вычете в C^n, Сб., Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных, Красноярск, Изд-во ИФ СО АН СССР, 1973, 181—191.
[6] Жаков А. П., О применении кратного логарифмического вычета для разложения неявных функций в степенные ряды, Матем. сб., 97, № 2 (1975), 177—192.
[7] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., «Наука», 1969.