

Листки по математическому анализу, 10 класс

Н. Н. Константинов

Продолжаем публикацию листков для математических классов Н. Н. Константинова. В настоящем выпуске предлагаем вниманию читателей листки по математическому анализу. По этим листкам проводились занятия в 10-м классе школы №179 г. Москвы.

Листок 1, 03.09.2001

Начальные тесты. Тема 1 — ограниченность

Цель первых пяти листков — выяснить, какая часть курса математического анализа вам знакома. Те задачи, которые вы можете решить, решите и сдайте. Если сейчас не можете — в ваших интересах, чтобы преподаватели знали это, так как это позволит нам подготовить для вас подходящее задание.

Задача 1. Докажите неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx$ ($x \geq -1$, n — целое положительное число).

Задача 2. Найдите хотя бы одно такое $n > 1$, что $2^n > n^{100}$.

Задача 3. Найдите хотя бы одно такое k , что $1.0001^k > 1000000$.

Задача 4. Найдите хотя бы одно такое k , что $0.999^k < 0,000001$.

Задача 5. Существует ли такое n , что

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} > 100?$$

Задача 6. Существует ли такое n , что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 100?$$

Задача 7. Существует ли такое n , что

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > 100?$$

Задача 8. Сформулируйте хотя бы одно определение ограниченного множества.

Задача 9. Сформулируйте (без отрицаний), что означает, что множество не ограничено.

Задача 10. Сформулируйте определение точной верхней грани числового множества.

Задача 12. Сформулируйте (без отрицаний), что означает, что число C не является точной верхней гранью ограниченного множества.

Задача 13. Пусть M — множество сумм $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ при всевозможных целых неотрицательных n . Найдите точную верхнюю грань этого множества (и докажите, что найденное число удовлетворяет определению точной верхней грани).

Задача 14. Аналогичная задача для множества сумм

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Листок 2, 03.09.2001

Начальные тесты. Тема 2 — множества

Задача 1. Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.

Задача 2. Докажите, что объединение счетного множества счетных множеств счетно.

Задача 3. Множество всевозможных бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчетно.

Задача 4. Множество действительных чисел интервала $(0,1)$ несчетно.

Докажите эквивалентность:

Задача 5. Интервала и отрезка.

Задача 6. Интервала и квадрата.

Более слабая задача:

Задача 6'. Найдите в интервале подмножество, эквивалентное квадрату.

Определение. Мощность отрезка называется мощностью континуума (непрерывности).

Задача 7 (трудная). Если объединение двух множеств имеет мощность континуума, то хотя бы одно из них имеет мощность континуума.

Задача 8. Теорема Кантора-Бернштейна. Если A эквивалентно подмножеству B , а B эквивалентно подмножеству A , то A и B эквивалентны.

В задачах 9-14 найдите мощность указанного множества; если множество определено не однозначно, то укажите все возможные ответы.

Задача 9. Множество рациональных точек плоскости (точка плоскости рациональная, если у нее обе координаты рациональные).

Задача 10. Некоторое множество непересекающихся шаров в пространстве.

Задача 11. Некоторое множество непересекающихся сфер в пространстве.

Задача 12. Множество бесконечных последовательностей действительных чисел (действительное число определено как бесконечная десятичная дробь с обычными договоренностями о том, какие дроби изображают одно и то же число).

Задача 13. Некоторое множество восьмерок на плоскости, такое что никакие две восьмерки не имеют общих точек (восьмеркой в этой задаче называется множество, которое есть объединение двух касающихся окружностей).

Задача 14. Пусть f — числовая функция, определенная при всех действительных x . Число x_0 называется точкой локального минимума функции f , если существует такая окрестность U точки x_0 , что для любого x из U , отличного от x_0 , верно неравенство: $f(x) > f(x_0)$. Какова мощность множества точек локального минимума?

Задача 15. Теорема. Множество всех подмножеств множества M более мощно, чем M (Множество A называется более мощным, чем множество B , если существует биекция B и подмножества A , но не существует биекции A и B).

Листок 3, 03.09.2001

Начальные тесты. Тема 3 — полнота и ее следствия

Задача 1. Сформулируйте определение действительного числа через бесконечные десятичные дроби, включая определение неравенства для действительных чисел.

Задача 2. Если M — непустое ограниченное сверху числовое множество, то существует $\text{Sup } M$.

Задача 3. Найдите точную верхнюю грань следующего множества чисел: $0, 3, 0, 33, 0, 333, \dots, 0, 333\dots 3$ (цифра 3 стоит n раз), \dots . Входит ли точная верхняя грань этого множества в само это множество?

Задача 4. Аналогичная задача для множества: $0, 0,1, 0,12, 0,123, \dots$ (после запятой выписываются подряд все натуральные числа, так что дальше появятся дроби $0,12345678910111213$ и т.п.).

Задача 5. Докажите, что дробь из предыдущей задачи непериодическая.

Задача 6. Определите сумму двух положительных действительных чисел.

Задача 7. Определите произведение действительных чисел (с доказательством существования).

Задача 8. Докажите равенство $(A + B) + C = A + (B + C)$ (свойство ассоциативности сложения).

Задача 9. Докажите равенство $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ (свойство дистрибутивности умножения по отношению к сложению).

Связь новых чисел со старыми. Бесконечная десятичная дробь, заканчивающаяся всеми нулями, отождествляется с конечной дробью, которая получается, если эти нули отбросить.

Задача 10. Пусть $A = a_1 a_2 a_3 \dots a_n b_1 b_2 b_3 \dots b_k b_1 b_2 b_3 \dots b_k \dots$ — бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом длины k . Рассмотрим те ее конечные приближения, которые не режут группы цифр, составляющих период. A есть \sup этих приближений. Выпишите бесконечную геометрическую прогрессию, суммой которой является число A , докажите, что A есть ее сумма (и тем самым выведите формулу перевода периодической дроби в простую).

Листок 4, 03.09.2001

Начальные тесты. Тема 4 — предел и предельная точка

Задача 1. Сформулируйте известные вам определения окрестности точки на прямой и на плоскости, в частности, определение ε -окрестности.

Задача 2. Сформулируйте различные определения последовательности, стремящейся к плюсу бесконечности, к бесконечности без знака.

Задача 3. Сформулируйте известные вам определения предела числовой последовательности (в случае, если пределом является число).

Задача 4. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел A и последовательность $\{y_n\}$ имеет предел B , то последовательность $\{x_n + y_n\}$ также имеет предел, и он равен $A + B$.

Задача 5. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произведения последовательностей.

Задача 6. Сформулируйте определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности.

Задача 7. Теорема. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Задача 8. Теорема. Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая.

Задача 9. Аналогичная задача для бесконечно малой последовательности, не принимающей значение 0.

Задача 10. Сформулируйте определения всех видов монотонных последовательностей (убывающей, неубывающей, возрастающей, невозрастающей, монотонной и, возможно, еще как-нибудь).

Задача 11. Теорема. Неубывающая ограниченная последовательность имеет предел.

Задача 12. Если последовательность неубывающая и неограниченная, то ее пределом является плюс бесконечность.

Задача 13. Сформулируйте определение вложенной последовательности множеств.

Задача 14. Если $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, \dots , $I_k = [a_k, b_k]$, \dots вложенная последовательность отрезков числовой оси, то существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам.

Задача 15. Сформулируйте определение предельной точки множества и предельной точки последовательности.

Задача 16. Существует ли последовательность, предельными точками которой являются все целые числа и только они?

Задача 17. Существует ли последовательность, предельными точками которой являются все числа вида $1/n$ (n — натуральное) и только они?

Задача 18. Если числовое множество бесконечно и ограничено, то для него найдется предельная точка.

Линия Б. Листок 1Б, 06.09.2001

Принцип математической индукции

Если какое-либо утверждение, в формулировке которого содержится обозначение натурального числа N (обозначим это утверждение через $T(N)$), верно при $N = 1$, и из $T(N)$ следует $T(N + 1)$, то это утверждение верно. (Иначе говоря, это утверждение верно при любом натуральном N). Вот схематическое изображение принципа математической индукции:

$$\frac{T(1), T(N) \rightarrow T(N+1)}{T(N)}$$

Задача 1. Докажите неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

верное, если x — действительное число, n — целое, причем $x \geq -1$, $n > 0$.

Задача 2. С помощью математической индукции докажите формулу:

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

(проверьте, что она верна для $n=1$, и что из того, что она верна для n , следует, что она верна для $n+1$).

Задача 3. На шоколадке 4 продольных борозды и 5 поперечных. Сколько нужно прямолинейных разломов по бороздам, чтобы разломать шоколадку на кусочки без бороздок? (Сложить два куска и разломить их одним разломом не разрешается).

Задача 4. Докажите, что коэффициенты многочлена $(1+x)^n$ (если раскрыть скобки, привести подобные и расположить слагаемые в порядке убывания степени x) совпадают с элементами n -й строки треугольника Паскаля:

номер строки								
0				1				
1			1	1				
2			1	2	1			
3		1	3	3	1			
4		1	4	6	4	1		

(по краям единицы, а каждый из остальных элементов равен сумме двух, стоящих справа и слева над ним).

Задача 5. В каких строках треугольника Паскаля все числа нечетные?

Не очень научная формулировка принципа математической индукции:

Если первой в очереди стоит женщина, и за каждой женщиной стоит женщина, то все в очереди женщины.

Задача 6. Какой может быть очередь, удовлетворяющая условию: “за каждой женщиной стоит женщина”? Дайте полное описание.

Листок 2Б, 01.10.2001

Пробная контрольная работа, линия Б

Контрольная считается успешно выполненной, если во время классной работы верно решены хотя бы две задачи.

Задача 1. Докажите, что в последовательности степеней двойки

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

каждое четвертое число оканчивается на 8 (в десятичной системе счисления).

Задача 2. Докажите с помощью математической индукции, что в последовательности

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

(первые два числа — единицы, а дальше каждое число есть сумма двух чисел, которые стоят перед ним) каждое третье число четное, а все остальные числа — нечетные.

Задача 3. Найдите ошибку в следующем рассуждении.

Теорема. Все монеты имеют одинаковое достоинство.

Доказательство (методом математической индукции). Если монета одна, то утверждение очевидно. Пусть теорема верна для n монет, что означает, что в любой группе из n монет все монеты имеют одинаковое достоинство. Докажем, что и в каждой группе из $n + 1$ монеты все монеты имеют одинаковое достоинство. Пусть дана группа из $n + 1$ монеты. Заберем из этой группы одну монету, останется n монет. По предположению индукции, все эти n монет имеют одинаковое достоинство. Теперь заберем из этой группы еще одну монету, а ту монету, которую забрали в первый раз, положим обратно. Опять получилась группа из n монет. В ней, по предположению индукции, все монеты имеют одинаковое достоинство, тем самым первая монета имеет то же достоинство, что и все монеты, оставшиеся из первой группы, когда из нее забрали вторую монету. Итак, в группе из $n + 1$ монеты все монеты имеют одинаковое достоинство.

Листок 6, 01.10.2001

Пробная контрольная работа, линия А.

Контрольная считается успешно выполненной, если во время классной работы из темы 1 верно решены хотя бы две задачи, а из темы 2 хотя бы одна задача. Задача 7 дополнительная.

Тема 1.

Задача 1. Найдите хотя бы одно такое число C , что при любом действительном x выполняется неравенство:

$$\frac{x}{x^2 + 1} < C.$$

Задача 2. Дано: последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху. Последовательность $\{b_n\}$ определена формулой: $b_n = a_n^2 + a_n$. Можно ли утверждать, что последовательность $\{b_n\}$ ограничена сверху?

Задача 3. Последовательность $\{c_n\}$ определена формулой:

$$c_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} \dots + \frac{n}{2^n}.$$

Докажите, что эта последовательность ограничена.

Задача 4. Найдите точную верхнюю грань последовательности $\{c_n\}$ из задачи 3.

Тема 2.

Задача 5. Докажите, что множество различных многочленов с целыми коэффициентами счетно.

Задача 6. Можно ли утверждать, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно?

Задача 7 (дополнительная). A — счетное множество. Множество $\{M\}$ подмножеств A таково, что из любых двух элементов M один есть подмножество другого. Можно ли утверждать, что множество M конечно или счетно?

Листок 7, 01.11.2001

Пробная контрольная работа №2

Контрольная считается успешно выполненной, если во время классной работы из линии А верно решены хотя бы три задачи, а из линии Б хотя бы две задачи.

Линии А и Б.

Задача 1. Эквивалентны ли следующие два определения предела последовательности:

1) Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой окрестности U числа a найдется такое число N , что при всех $n > N$ $x_n \in U$.

2) Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой имеющей рациональные концы окрестности U числа a найдется такое число N , что при всех $n > N$ $x_n \in U$.

(Если эквивалентны, то доказать, а если не эквивалентны, то привести пример последовательности, для которой число a является пределом в смысле одного определения и не является пределом в смысле другого.)

Верны ли следующие теоремы:

Задача 2. *Обозначение:* для действительного числа x через $[x]$ обозначается целая часть числа x , то есть наибольшее целое число, которое не больше x (примеры: $[4,3] = 4$, $[5] = 5$, $[-1,5] = -2$).

Теорема: Если предел последовательности x_n равен a , то предел последовательности $[x_n]$ равен $[a]$.

Задача 3. *Обозначение:* для действительных чисел x и y через $\max(x, y)$ обозначается наибольшее из чисел x и y .

Теорема: Если предел последовательности x_n равен a и предел последовательности y_n равен b , то предел последовательности $\max(x_n, y_n)$ равен $\max(a, b)$.

Линия А.

Задача 4. Рассматривается последовательность квадратов на плоскости, сторона квадрата с номером n равна $3/2 + \frac{(-1)^n}{n}$. Найдите предел последовательности площадей квадратов (дайте ответ и запишите явно правило нахождения N по ε).

Линия Б.

Задача 5. Найдите предел последовательности $a_n = 3/2 + \frac{(-1)^n}{n}$ (дайте ответ и запишите явно правило нахождения N по ε).

Листок 8, 19.11.2001

Предельное поведение последовательностей

В задачах 1-6 требуется выяснить, ограничена ли последовательность, ограничена ли она сверху, снизу, имеет ли пределом бесконечность со знаком или без знака, имеет ли пределом число, какие имеет предельные точки, и т.п. Во всех случаях требуется подтвердить, утверждение явным алгоритмом нахождения N по ε (в случае предела), n по C (в случае неограниченности) и т.п., используя соответствующее определение.

Задача 1. $a_n = n^3 - 3n + 1$.

Задача 2. $a_n = \frac{n^5}{n^5 - 1}$.

Задача 3. $a_n = \frac{10n^3 - 3n + 5}{n^5 - 20,5 \times n^2 + 2}$.

Задача 4. $a_n = n!$.

Задача 5. $a_n = \frac{n!}{n^5}$.

Задача 6. $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

Задача 7 (вспомогательная). Докажите, что при любых натуральных n и k верно неравенство: $\frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!}$.

Задача 8. Найдите три первых десятичных знака предела последовательности из задачи 6. (Это число называется числом Эйлера и имеет стандартное обозначение: e).

Задача 9. Докажите, что e — число иррациональное.

Задача 10. Докажите, что последовательность $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ возрастающая и ограниченная.

Задача 11. Докажите, что предел последовательности из предыдущей задачи не больше e .

Задача 12. Докажите, что он равен e .

Листок 9, 22.11.2001

Предельное поведение последовательностей, продолжение

Задача 1. Докажите, что ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится. (Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$,

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots$ имеет пределом некоторое число; это число называется суммой ряда.)

Задача 2. Может ли измениться сумма ряда из предыдущей задачи, если как-то переставить его члены? (В переставленном ряде все члены первоначального ряда должны встретиться по одному разу.)

Задача 3. Рассматривается последовательность: $a_n = \frac{x^n}{n!}$ (x — произвольное фиксированное действительное число). Найдите убывающую геометрическую прогрессию b_n , такую что начиная с некоторого n выполняется неравенство: $a_n < b_n$.

Задача 4. А можно ли добиться того, чтобы условие предыдущей задачи выполнялось при всех n ?

Задача 5. Докажите, что ряд $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ сходится при любых положительных действительных x .

Задача 6. Докажите, что этот ряд сходится и при любых отрицательных действительных x .

Задача 7 (дополнительная). Двое играют в такую игру. Они строят вложенную последовательность отрезков, причем они ходят по очереди, и каждый в свой ход выбирает отрезок внутри предыдущего. Первый выигрывает, если полученная вложенная система отрезков имеет ровно одну общую точку, и эта точка — рациональная. Второй выигрывает, если полученная вложенная система отрезков имеет ровно одну общую точку, и эта точка — иррациональная. Имеется ли у кого-либо из них выигрышная стратегия?

Листок 10, 29.11.2001

Предел последовательности и предел функции.

Задача 1. Дано:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$; пусть $N_a(\varepsilon)$ — функция, которая каждому $\varepsilon > 0$ ставит в соответствие такое число $N_a(\varepsilon)$, что из неравенства $n > N_a(\varepsilon)$ следует неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$; пусть $N_b(\varepsilon)$ — аналогичная функция для последовательности $\{y_n\}$.

Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$; найдите какую-нибудь функцию $M(\varepsilon)$ такую, что из неравенства $n > M(\varepsilon)$ следует неравенство

$$|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon.$$

Задача 2. Аналогичная задача для произведения двух последовательностей.

Задача 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, a \neq 0, N(\varepsilon)$ — функция, которая каждому $\varepsilon > 0$ ставит в соответствие такое число $N(\varepsilon)$, что из неравенства $n > N(\varepsilon)$ следует неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Докажите, что последовательность $y_n = 1/x_n$ (которая определена, начиная с некоторого n) имеет пределом число $1/a$; найдите какую-нибудь функцию $M(\varepsilon)$ такую, что из неравенства $n > M(\varepsilon)$, следует неравенство

$$\left| y_n - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon.$$

Определение 1. Функция f определена на некотором множестве G числовой оси (можно для начала считать, что G — вся числовая ось). Говорят, что число A является пределом $f(x)$ при x стремящемся к a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (x берется из множества G). Обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Определение 2. (В тех же условиях, что и в определении 1). Говорят, что число A является пределом $f(x)$ при x стремящемся к a , если для любой последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к a и не принимающей значение a , последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел A .

Задача 4. Докажите эквивалентность этих двух определений.

Задача 5. Докажите, что если в прямоугольном треугольнике гипотенуза постоянна, то длина катета стремится к длине гипотенузы при стремлении длины второго катета к нулю.

Задача 6. Докажите, что если в прямоугольном треугольнике один катет постоянен, то длина гипотенузы стремится к длине этого катета при стремлении длины второго катета к нулю.

Листок 11, 06.12.2001

Подготовительные задачи к контрольной работе

Задача 1. Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} x^2$. Укажите какую-нибудь зависимость $\delta(\varepsilon)$ (исходя из 1-го определения предела функции, где требуется существование такой зависимости).

Задача 2. Тот же вопрос о $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$. (Область определения \sqrt{x} — полупрямая $x \geq 0$.)

Задача 3. Докажите, что последовательность $a_n = \frac{n!}{n^2}$ неограниченна сверху (укажите какое-нибудь правило, как по числу C найти такое n , что $a_n > C$)

Задача 4. Тот же вопрос о последовательности $a_n = \frac{n!}{n^5}$.

Задача 5. Найдите предел последовательности $a_n = \frac{n^3 - 3n - 1}{n^5 + 2n^2 + 3}$ и укажите какое-нибудь правило, как по ε найти N (исходя из определения предела последовательности: для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что из неравенства $n > N$ следует неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$, где A — искомый предел).

Задача 6. Тот же вопрос для последовательности $a_n = \frac{n^3 + 3n + 1}{n^5 - 2n^2 - 3}$.

Задача 7. Имеем два непустых множества A и B , все элементы которых — положительные числа. Известно, что любой элемент множества A меньше любого элемента множества B . Известно также, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара чисел $a \in A$ и $b \in B$ такая, что $b/a - 1 < \varepsilon$. Докажите, что для любого $\delta > 0$ найдется пара чисел $c \in A$ и $d \in B$ такая, что $d - c < \delta$.

Листок 12, 10.12.2001

Контрольная работа по пределам

Для положительной оценки (тройки) по линии Б достаточно решить во время контрольной работы две задачи. Для четверки по линии Б достаточно решить три задачи, для пятерки — четыре. Для пятерки по линии А необходимо получить хотя бы четверку по линии Б и, кроме того, решить хотя бы дома дополнительную задачу б.

Задача 1. $a_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \dots + \frac{1}{n \times (n+2)}$. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел и найдите его.

Задача 2. Докажите, что последовательность $a_n = \frac{n^2 - \sqrt{n}}{2n + 1}$ стремится к плюс бесконечности. Явно укажите какое-нибудь правило, как по данному числу C найти такое число $N(C)$, что для любого n , большего $N(C)$ выполняется неравенство: $a_n > C$.

Задача 3. Дано: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$. Функция определяется через функцию f формулой: $g(x) = f\left(\frac{2x}{3}\right)$. Найдите $\lim_{x \rightarrow 3a/2} g(x)$ (с доказательством, использующим определение предела через ε и δ).

Задача 4. Докажите, что площадь равнобедренного треугольника, у которого боковые стороны постоянны, стремится к нулю при стремлении к нулю длины основания.

Задача 5. Постройте график функции $f(x) = r - \sqrt{r^2 - x^2} - x^2$, определенной на отрезке $-r \leq x \leq r$ (r — постоянное число, параметр, определяющий конкретную функцию из всего семейства таких функций), при $r = 1/4, 1/2, 1$.

Задача 6 (дополнительная). При каких r верны формулы для функции f из предыдущей задачи: а) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$?

Листок 13, 14.01.2002**Непрерывность**

Определение 1. Пусть функция f определена на некотором множестве G числовой оси, и точка a принадлежит G (можно для начала считать, что G — вся числовая ось). Говорят, что функция f непрерывна в точке a , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (x берется из множества G).

Определение 2. Говорят, что функция f непрерывна на множестве M , если она непрерывна в каждой точке множества M .

Задача 1. Сформулируйте (без отрицаний), что означает, что функция f разрывна (то есть не является непрерывной) в точке a (принадлежащей области определения функции).

В задачах 2-5 сформулированы теоремы, в некоторых случаях верные. Докажите верные теоремы и опровергните неверные.

Задача 2. Если функция f непрерывна в точке a , то существует окрестность точки a , в которой f ограничена.

Задача 3. Если функция f непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то существует окрестность точки a , в которой f отлична от 0 и имеет тот же знак, что и в точке a (теорема об инерции знака).

Задача 4. Определяем функцию s :

$$s(x) = 0, \text{ если } x \leq 0,$$

$$s(x) = 1, \text{ если } x > 0.$$

В точке 0 функция s разрывна, а в остальных точках непрерывна.

Задача 5. Если функция f (определенная на всей числовой прямой) разрывна во всех точках вида $1/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), то она разрывна и в точке 0.

Функции-монстры. Эти функции не встречаются в практических задачах, но они помогают находить ошибки в доказательствах.

Задача 6. Приведите пример функции, разрывной во всех точках числовой оси (с доказательством).

Задача 7. Приведите пример функции (определенной на всей числовой оси), разрывной во всех точках, кроме одной, а в этой единственной точке непрерывной (с доказательством).

Задача 8. Приведите пример функции (определенной на всей числовой оси), разрывной в точках заданного счетного множества, а в остальных точках непрерывной.

Логические задачи.

Задача 9. Какие функции окажутся “непрерывными”, если в определении 1 забыть написать, что $\varepsilon > 0$?

Задача 10. А если забыть написать, что $\delta > 0$?

Листок 15, 31.01.2002**Теоремы о непрерывных функциях**

В задачах 1-3 сформулированы теоремы, которые требуется доказать. При этом желательно использовать ранее сформулированные леммы об отрезке.

Задача 1. Если f — функция, непрерывная во всех точках отрезка $[a, b]$ числовой оси, $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$, то существует точка c отрезка $[a, b]$ такая, что $f(c) = 0$.

Рекомендация 1: используйте лемму о том, что вложенная система отрезков имеет хотя бы одну общую точку.

Задача 1'. Та же теорема, но

Рекомендация 2: используйте лемму о том, что непустое ограниченное сверху числовое множество имеет точную верхнюю грань.

Задача 1''. Та же теорема, но

Рекомендация 3: используйте лемму о том, что из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 2. Если функция f непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ числовой оси, то она ограничена на этом отрезке.

Рекомендация 1 (см. выше).

Задача 2'. Та же теорема, но используйте *рекомендацию 2* (см. выше).

Задача 2''. Та же теорема, но используйте *рекомендацию 3* (см. выше).

Задача 2'''. Та же теорема, но

Рекомендация 4: используйте лемму о том, что из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Задача 3. Если функция f непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$ числовой оси, то она достигает своего максимального значения (то есть существует точка $c \in [a, b]$ такая, что для всякой точки $x \in [a, b]$ $f(x) \leq f(c)$).

Рекомендация 1 (см. выше).

Задача 3'. Та же теорема, но используйте *рекомендацию 4* (см. выше).

Задача 3''. Та же теорема, но

Рекомендация 5: используйте тот факт, что обратная величина к непрерывной функции f непрерывна во всех точках, где $f \neq 0$.

Задача 4. Верна ли теорема задачи 3, если заменить отрезок каким-либо другим множеством, например интервалом?

Листок 16, 04.02.2002

Подготовка к контрольной о непрерывности.

Задача 1. На отрезке $[1; 5]$ числовой прямой рассматривается функция $f(x) = 1/x$. Найдите такое положительное число δ (хотя бы одно), что для любых двух точек a и b этого отрезка, для которых $|a - b| < \delta$, выполняется условие: $|f(a) - f(b)| < 0,001$.

Задача 2. Заменим в предыдущей задаче отрезок $[1; 5]$ на интервал $(0; 5)$. Найдется ли в этом случае такое δ , о котором говорится в задаче 1?

Задача 3. Докажите, что функция \sin во всех точках числовой оси непрерывна. (Можно пользоваться или геометрическим определением функции \sin , или формулами, которые выведены из этого определения.)

Задача 4. Докажите, что если функция f непрерывна в точке a , то функция $|f|$ также непрерывна в этой точке.

Задача 5. Дано: функция f , определенная на отрезке $[a, b]$ числовой оси, непрерывна во всех точках этого отрезка. Функция g определена так: $g(x) = f(x)$, если $f(x) \leq C$, $g(x) = C$ если $f(x) > C$ (C — некоторая фиксированная константа). Докажите, что g непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$. (Функцию g называют срезкой функции f).

Задача 6. Функция f разрывна в точке x_0 . Можно ли утверждать, что функция f^2 разрывна в точке x_0 ?

Задача 7. Найдите такое положительное δ , чтобы из неравенства $|x| < \delta$ следовало неравенство

$$\left| \frac{1 + x^2 \cos x}{1 - x \sin x} \right| < 10.$$

Задача 8. Докажите, что многочлен $x^3 + x - 1$ имеет корень.

Задача 9. Докажите, что если у монотонной функции предел справа в некоторой точке равен пределу слева, то функция в этой точке непрерывна.

Дополнительные задачи.

Задача 10. Приведите пример функции, определенной на всей числовой прямой, непрерывной во всех иррациональных точках и разрывной во всех рациональных точках, и притом монотонной.

Задача 11. Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции конечно или счетно.

Листок 17, 11.02.2002

Контрольная работа по непрерывности.

Линия Б включает задачи 1-6, линия А включает все задачи. Для тройки по линии Б необходимо решить в классе три задачи этой линии, для четверки — четыре задачи, для пятерки — пять. Для четверки по линии А необходимо заработать четверку по линии Б и решить еще хотя бы одну, из задач 7-9. Для пятерки по линии А необходимо заработать пятерку по линии Б и решить хотя бы две из задач 7-9. Тройки и двойки за линию А не ставятся. Решая задачи дома после контрольной, можно повышать оценку.

Задача 1. $f(x) = p(x) + q(x)$; p и q разрывны в точке x_0 . Можно ли утверждать, что f разрывна в точке x_0 ?

Задача 2. $f(x) = p(x) + q(x)$; p непрерывна в точке x_0 , q разрывна в точке x_0 . Можно ли утверждать, что f разрывна в точке x_0 ?

Задача 3. $f(x) = p(x) \times q(x)$; p непрерывна в точке x_0 , q разрывна в точке x_0 . Можно ли утверждать, что f разрывна в точке x_0 ?

Задача 4. $f(x) = p(x) \times q(x)$; p и q разрывны в точке x_0 . Можно ли утверждать, что f разрывна в точке x_0 ?

Определение 1'. Говорят, что функция f непрерывна в точке a (принадлежащей области определения f), если для любого рационального числа $\varepsilon > 0$ найдется такое рациональное число $\delta > 0$, что из неравенства $|x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (x берется из множества определения f). (Это определение отличается от определения 1, см. листок 13, тем, что ε и δ берутся только рациональные).

Задача 5. Эквивалентно ли приведенное определение непрерывности определению 1 листка 13? (Эквивалентность требуется доказать в обе стороны, а неэквивалентность подтвердить противоречащим примером.)

Задача 6. Верно ли, что функция $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ ограничена на всей числовой прямой?

Задача 7. Если монотонная функция принимает все действительные значения, то она непрерывна в каждой точке.

Задача 8. Верно ли, что функция f задачи 6 равномерно непрерывна на всей числовой прямой, то есть верно ли, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых x_1 и x_2 , удовлетворяющих неравенству $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

(иначе говоря, в обычном определении непрерывности добавлено требование, чтобы δ , выбранное для заданного ε , действовало на всей области задания)?

Задача 9. Даны прямая l и выпуклый многоугольник M , лежащий по одну сторону от l . Проводятся всевозможные прямые k , лежащие по ту же сторону от l , что и M ; расстояние от l до k обозначено через h и считается независимой переменной. Докажите, что площадь той части многоугольника U , которая лежит между k и l , есть непрерывная функция h .

Листок 18, 21.02.2002

Определение определенного интеграла.

Рассматриваются ограниченные функции, определенные на отрезке $[a, b]$ числовой оси.

Определение 1. Функция g называется ступенчатой, если отрезок $[a, b]$ разбит конечным числом точек $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ на интервалы, на каждом из которых g является константой; через g_i обозначим эту константу на интервале (a_{i-1}, a_i) (значения g в точках a_i нас не интересуют).

Определение 2. Интегралом от ступенчатой функции называется сумма

$$S = (a_1 - a_0) \times g_1 + (a_2 - a_1) \times g_2 + \dots + (a_n - a_{n-1}) \times g_n.$$

Определение 3. Нижней ступенчатой функцией для функции f называется всякая ступенчатая функция, для которой на каждом из интервалов, на которых она является константой, выполняется неравенство: $g(x) \leq f(x)$.

Аналогично определяется верхняя ступенчатая функция (вместо " \leq " — " \geq ").

Определение 4. Нижним интегралом функции f от a до b называется точная верхняя грань интегралов от всевозможных нижних ступенчатых функций для функции f .

Верхним интегралом функции f от a до b называется точная нижняя грань интегралов от всевозможных верхних ступенчатых функций для функции f . Нижний и верхний интегралы обозначаются соответственно через:

$$\int_a^b f(x) dx \text{ и } \int_a^b f(x) dx$$

Задача 1. Докажите, что интеграл от всякой нижней ступенчатой функции не превышает интеграла от всякой верхней ступенчатой функции.

Задача 2. Докажите, что для ограниченной функции нижний и верхний интегралы всегда существуют, и нижний не превышает верхнего.

Определение 6. Функция называется интегрируемой, если ее нижний и верхний интегралы совпадают. Это совпадающее значение нижнего и верхнего интегралов функции называется интегралом этой функции.

Задача 3. Докажите, что функция $f(x) = x$ интегрируема на отрезке $[0, 1]$ и найдите ее интеграл.

Задача 4. Приведите пример функции, не интегрируемой на отрезке.

Задача 5 (дополнительная). Изменится ли значение нижнего интеграла, если при определении ступенчатых функций ограничиться разбиениями отрезка на равные промежутки?

Листок 19, 28.02.2002

Второе определение определенного интеграла

Определение 1. Пусть имеются:

- 1) ограниченная функция f , заданная на отрезке $[a, b]$ числовой оси;
- 2) разбиение R отрезка $[a, b]$ конечным числом точек $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ на n интервалов;
- 3) выбор множества V , состоящего из n точек $\xi_1 \in (a, a_1)$, $\xi_2 \in (a_1, a_2)$, \dots , $\xi_n \in (a_{n-1}, b)$.

Выражение $S = (a_1 - a)f(\xi_1) + \dots + (a_2 - a_1)f(\xi_2) + \dots + (b - a_{n-1})f(\xi_n)$ называется интегральной суммой функции f при данном разбиении отрезка $[a, b]$ и данном выборе точек ξ_i (чтобы подчеркнуть зависимость S от трех вещей: функции, разбиения и выбора точек, мы будем обозначать интегральную сумму через $S(f, R, V)$).

Определение 2. Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$ числовой оси. Рассматриваются интегральные суммы $S(f, R, V)$ функции f при всевозможных разбиениях R отрезка $[a, b]$ и всевозможных выборах V точек ξ на интервалах этих разбиений.

Число A называется пределом интегральных сумм $S(f, R, V)$ при измельчении разбиений, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого разбиения R отрезка $[a, b]$, при котором длина каждого интервала разбиения меньше δ , и при любом выборе V точек ξ_i выполняется неравенство: $|A - S(f, R, V)| < \varepsilon$.

Определение 3. Функция f называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$ (в смысле второго определения интеграла), если предел ее интегральных сумм при измельчении разбиений существует; этот предел называется интегралом (во 2-м смысле) функции f от a до b .

Задача 1. Покажите, что неограниченная функция не имеет интеграла (во 2-м смысле).

Задача 2. Докажите, что функция f , непрерывная в каждой точке отрезка $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке.

Задача 3 (Критерий Коши для последовательностей). Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что из одновременного выполнения условий $n > N, m > N$ следует неравенство: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Задача 4 (Критерий Коши для функций). $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из одновременного выполнения условий $0 < |x_1 - a| < \delta, 0 < |x_2 - a| < \delta$ следует неравенство: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Задача 5. Сформулируйте и докажите критерий Коши для интегральных сумм.

Листок 20, 04.03.2002

Следствия двух определений определенного интеграла.

Задача 1. Пусть точка c принадлежит интервалу (a, b) ; функция f определена так: $f(x) = K$, если $x \neq c$, и $f(c) = 10$. Докажите, что функция f интегрируема на (a, b) в смысле второго определения.

Задача 2. Если функция f интегрируема на интервале (a, b) в смысле второго определения интегрируемости, и мы изменили функцию в одной точке, то новая функция (обозначим ее через g) тоже интегрируема на (a, b) в том же смысле.

Задача 3. Докажите, что функция f , непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на нем в смысле второго определения.

Рекомендация: для доказательства можно воспользоваться задачей 2 предыдущего листка (теоремой о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке) или задачей 12 листка 5 (теоремой о том, что из покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное подпокрытие).

Задача 4. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ в смысле второго определения интегрируемости, то она интегрируема на этом отрезке и в смысле первого определения интегрируемости, и интегралы этой функции, найденные по этим двум определениям, совпадают.

Задача 5. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ в смысле первого определения интегрируемости, то она интегрируема на этом отрезке и в смысле второго определения интегрируемости.

Свойства определенного интеграла.

При доказательстве свойств определенного интеграла можно пользоваться любым из двух определений определенного интеграла, а также фактом эквивалентности этих определений.

Задача 6. Константу можно вынести за знак интеграла.

Задача 7. Если две функции интегрируемы, то и их сумма интегрируема, и интеграл от их суммы равен сумме их интегралов.

Задача 8. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и на всяком отрезке, принадлежащем отрезку $[a, b]$.

Задача 9. Пусть $a < b < c$, и функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Задача 10 (Первая теорема о среднем). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется такое число ξ ($a < \xi < b$), что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

Листок 21, 18.04.2002**Первые свойства производной**

Будем предполагать для простоты, что рассматриваемые функции определены на связном подмножестве числовой оси (отрезке, интервале, луче, полуинтервале или на всей числовой прямой).

Определение 1. Пусть точка a входит в область определения функции f , и некоторая окрестность точки a тоже входит в эту область. Производной функции f в точке a называется

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

производная обозначается через $f'(a)$.

Задача 1. Найдите производную функции $f(x) = x^2$ (задание “найти производную” предполагает и доказательство, что производная существует, а не только утверждение, что она равна такому-то выражению, если существует). Нарисуйте графики функций $y = f(x)$ и $y = f'(x)$ на одном чертеже.

Задача 2. Найдите производную функции $f(x) = x^n$ (n натуральное).

Верны ли теоремы, сформулированные в задачах 3-6?

Задача 3. Если функция f имеет производную в точке a , то она в этой точке непрерывна.

Задача 4. Если $f'(a) > 0$ (такая запись молчаливо предполагает также утверждение, что $f'(a)$ существует), то найдется такая окрестность U точки a , что для всякой точки $x \in U$ из $x > a$ следует, что $f(x) > f(a)$, а из $x < a$ следует, что $f(x) < f(a)$.

Задача 5. Если $f'(a) > 0$, то в некоторой окрестности точки a функция f возрастает.

Задача 6. Если в некоторой окрестности U точки a функция f непрерывна и возрастает, то в некоторой окрестности V точки $f(a)$ существует (однозначная) обратная функция g , то есть такая функция, что для всех $x \in U$ верно равенство $g(f(x)) = x$.

Задача 7. Дайте определения: левого предела функции, правого предела функции, левой производной, правой производной.

Задача 8. Дайте определение функции, производная которой равна плюс бесконечности, и приведите пример такой функции.

Задача 9. Приведите пример функции, заданной всюду и не имеющей правой производной в некоторой точке (в том числе не имеющей также и бесконечной производной).

Задача 10. Докажите теорему: производные взаимно-обратных функций обратны как числа. (Теорему нужно аккуратно сформулировать: какие должны быть функции, в каких точках брать производные, могут ли эти производные быть любыми или нужны ограничения?)

Листок 22, 29.04.2002**Зачетное задание по непрерывности и производной**

Для получения зачета по темам “непрерывность” и “производная” необходимо письменно сдать следующие задачи о непрерывных функциях и производных (некоторые из них формулировались в прошлых листках; ранее принятые задачи можно не сдавать):

Непрерывность.

Задача 1. Докажите, что сумма двух функций, непрерывных в некоторой точке, непрерывна в этой точке.

Задача 2. Аналогичная задача о произведении двух функций.

Задача 3. Если функция f непрерывна в точке x_0 , и $f(x_0) \neq 0$, то функция $g(x) = 1/f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Задача 4. Докажите, что функции \sin и \cos всюду непрерывны.

Задача 5. Рассматривается функция $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q — многочлены степени m и n соответственно. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ при x , стремящемся к бесконечности, равен 0, если $m < n$, бесконечности, если $m > n$, и отношению старших коэффициентов, если $m = n$.

Задача 6. Если в некоторой окрестности U точки a функция f непрерывна и возрастает, то в некоторой окрестности V точки $f(a)$ существует (однозначная) обратная функция g , то есть такая функция, что для всех $x \in U$ верно равенство $g(f(x)) = x$.

Производная.

Задача 7. Найдите производную функции $f(x) = x^n$ (задание “найти производную” предполагает и доказательство, что производная существует); x — любое действительное число, n натуральное.

Задача 8. Если функция f имеет производную в точке a , то она в этой точке непрерывна.

Задача 9. Если $f'(a) > 0$, то найдется такая окрестность U точки a , что для всякой точки $x \in U$ из $x > a$ следует, что $f(x) > f(a)$, а из $x < a$ следует, что $f(x) < f(a)$.

Задача 10. Если f и g — взаимно-обратные функции, и $f'(x_0)$ существует и отлична от 0, то $g'(f(x_0))$ существует и равна $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Листок 23, 29.04.2002

Продолжение зачетного задания по непрерывности и производной

Задача 11. Если g непрерывна в точке x_0 , и f непрерывна в точке $g(x_0)$, то функция, определяемая как $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Задача 12. Если g дифференцируема в точке x_0 , и f дифференцируема в точке $g(x_0)$, то функция $H(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $H'(x_0) = f'(g(x_0)) \times g'(x_0)$.

Задача 13. Докажите, что $(Cf(x))' = Cf'(x)$ (константа выносится за знак производной).

Задача 14. Докажите, что если функции f и g определены в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируемы в точке x_0 , то их сумма дифференцируема в точке x_0 и

$$(f(x) + g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Задача 15. Докажите, что если функции f и g определены в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируемы в точке x_0 то их произведение дифференцируемо в точке x_0 и

$$(f(x)g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Задача 16. Докажите, что если функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 , дифференцируема в точке x_0 и $f(x) \neq 0$, то функция $g(x) = 1/f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 дифференцируема в точке x_0 $g'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Задача 17. Докажите, что $\sin' x = \cos x$; $\cos' x = -\sin x$.

Задача 18. Найдите формулы для производных tg и ctg .

Задача 19. Если функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 , дифференцируема в точке x_0 и ее значение в точке x_0 максимально по отношению к другим значениям в этой окрестности, $f'(x_0)$ существует, то $f'(x_0) = 0$.

Задача 20. Если на отрезке $[a, b]$ функция f непрерывна, а во внутренних точках дифференцируема, и $f(a) = f(b)$, то внутри отрезка найдется точка ξ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Задача 21. Если на отрезке $[a, b]$ функция f непрерывна, а во внутренних точках дифференцируема, то внутри отрезка найдется точка ξ такая, что $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (теорема Лагранжа).

Константинов Николай Николаевич,
кандидат физ.-мат. наук,
научный руководитель Экспериментальной
школы №179 г. Москвы,
преподаватель математического анализа.