ЭФФЕКТ УСТОЙЧИВОСТИ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В.М.Золотарев

Введение

Задачи характеризации распределений составляют в настоящее время значительный по разнообразию и объему накопленных фактов раздел теории вероятностей и математической статистики. Этой проблематике посвящаются отдельные главы в ряде монографий [2,3]. Несколько лет назад вышла в свет обстоятельная монография А.М.Кагана, Ю.В.Линника и С.Р.Рао [1], посвященная специально задачам характеризации.

К числу первых результатов в области характеризации нормального закона относится хорошо известная теорема Г.Крамера [4] о возможности разложения нормального закона только на нормальные компоненты. Развитие идеи Г.Крамера в свое время пошло по двум направлениям. С одной стороны, были предприняты попытки выделить законы распределения, обладающие аналогичным свойством. Это направление привело Ю.В.Линника к проблеме изучения специального подкласса I_0 класса безгранично делимых законов с точки зрения их декомпозиции. С другой стороны, Н.А.Сапоговым [5] была доказана теорема, обобщающая теорему Г.Крамера в другом смысле, и которую можно рассматривать как первый результат в области изучения эффекта устойчивости в задачах характеризации распределений.

В настоящее время задачам устойчивости математических моделей, используемых в теории вероятностей и математической статистике, уделяется все больше и больше внимания. И это вполне естественно, если учесть большое прикладное значение таких типов задач. Накопившаяся здесь литература содержит уже довольно большое число наименований. Ссылки на большую часть тех работ, которые имеют отношение к предмету данной статьи, можно найти в упомянутой выше монографии трех авторов [1], где есть специальная глава, посвященная задачам устойчивости. Мы дополним этот список перечислением нескольких более поздних публикаций [6 - 10].

Цель, которую мы ставим в настоящей работе, можно коротко обрисовать как попытку создания общего подхода к задачам устойчивости. Поскольку, по нашему убеждению, задачи устойчивости математических моделей и, в частности, устойчивость моделей характеризации распределений, имеют в своей основе метрико-топологическую природу, следует и ставить эти задачи и решать их с некоторых единых позиций, не использующих специфику конкретных задач. При этом такая унификация подхода должна содержать два этапа.

1) Построение общих моделей самих задач характеризации.

2) На основе этих общих моделей ставить в столь же общем виде задачу устойчивости.

1. Общая модель характеризации (чистая задача).

Пусть (U, d_U) и (V, d_V) – некоторые измеримые метрические пространства, в которых в качестве σ -алгебр $\mathcal{B}_U$ и $\mathcal{B}_V$ выбираются системы борелевских множеств, порождаемых соответствующими метрическими расстояниями d_U и d_V. На основе некоторого (основного) вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ определим обычным порядком пространства случайных величин $\mathfrak{X} = \{X\}$ и $\mathcal{Y} = \{Y\}$ со значениями соответственно в пространствах (U, d_U) и (V, d_V).

Если проанализировать структуру различных характеризаций распределений из числа собранных, например, в [1], то можно заметить, что большая часть из них подчинена такой схеме.

Рассматриваются некоторые пространства случайных величин $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$, в которых задано отображение $\mathfrak{I} : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$. Характеризация распределений некоторого класса случайных величин $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{X}$ (т.е. его описание) осуществляется путем выделения некоторых свойств этих случайных величин и их образов, получаемых с помощью отображения $\mathfrak{I}$. Это означает, что в пространстве $\mathfrak{X}$ выделяется подмножество $\mathcal{A}$ и в пространстве $\mathcal{Y}$ – подмножество $\mathcal{B}$ такие, что

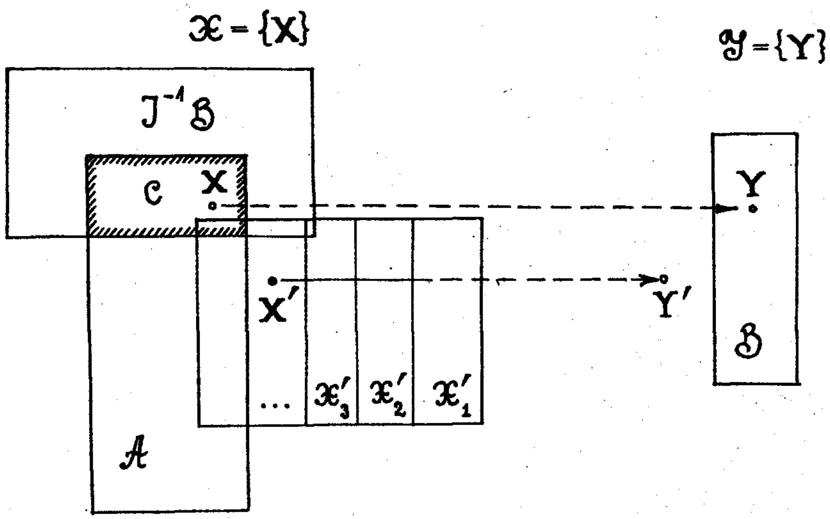
$$x \in \mathcal{A},\ \mathfrak{I}x \in \mathcal{B} \iff x \in \mathcal{C}. \tag{1}$$

Такой тип описания множества случайных величин $\mathcal{C}$ (а тем самым и множества соответствующих им распределений) мы будем называть чистой задачей характеризации. Схематически чистая задача изображена на рис.1.

Если обозначить $\mathfrak{I}^{-1}\mathcal{B}$ полный прообраз в $\mathfrak{X}$ множества $\mathcal{B}$, то (1) можно записать также в виде равенства

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathfrak{I}^{-1}\mathcal{B}. \tag{2}$$

Таким образом, каждая чистая задача характеризации, рассматриваемого нами типа, определяется (помимо задания метрических пространств (U, d_U), (V, d_V) и основного вероятностного пространства, что для нас равносильно заданию пространств случайных величин $\mathfrak{X}$, $\mathcal{Y}$) также заданием трех элементов: $(\mathfrak{I}, \mathcal{A}, \mathcal{B})$.



Предположим далее, что в пространстве $\mathfrak{X}$ задана метрика μ, а в пространстве $\mathcal{Y}$ метрика ν. При этом под метрикой, например, μ в пространстве $\mathfrak{X}$ мы понимаем такой неотрицательный функционал $\mu(X, X')$, определенный на множестве совместных распределений случайных величин $X, X' \in \mathfrak{X}$, который обладает следующими свойствами.

Для любых $X, X', X'' \in \mathfrak{X}$

1°. $P(X=X')=1 \implies \mu(X,X')=0$,

2°. $\mu(X,X')=\mu(X',X)$,

3°. $\mu(X,X'') \leqslant \mu(X,X')+\mu(X',X'')$,

(подробнее о метриках такого типа см. в [11, 12]).

Условимся под расстоянием от $X \in \mathfrak{X}$ до $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{X}$ понимать (как это принять в теории метрических пространств) величину

$$\mu(X,\mathcal{A}) = \inf\{\mu(X,X') : X' \in \mathcal{A}\} \tag{3}$$

и определим в $\mathfrak{X}$ следующие два функционала:

$$\varepsilon = \varepsilon(X) = \mu(X,\mathcal{A}) + \nu(JX,\mathcal{B}), \tag{4}$$

$$\delta = \delta(X) = \mu(X, C).$$

С помощью этих функционалов мы можем теперь чистой задаче характеризации придать метрическую форму, эквивалентную (1) и (2).

Для каждой случайной величины $X \in \mathfrak{X}$

$$\varepsilon(X) = 0 \iff \delta(X) = 0 . \qquad (5)$$

Такое понимание чистой задачи дает возможность расширить понимание однозначности отображения $\mathfrak{J}$. Действительно, как функционал ε , так и функционал δ образованы с помощью метрик μ и ν , т.е. с помощью функционалов, которые определены, соответственно, в пространствах $(\mathfrak{X})_2 = \{\mathcal{L}(X, X')\}$ и $(\mathcal{Y})_2 = \{\mathcal{L}(Y, Y')\}$ совместных распределений пар случайных величин $X, X' \in \mathfrak{X}$ и $Y, Y' \in \mathcal{Y}$.

Понятно, что в такой ситуации отображение $\mathfrak{J}$ можно понимать как отображение

$$\mathfrak{J} : (\mathfrak{X})_2 \to (\mathcal{Y})_2 . \qquad (6)$$

Однозначность $\mathfrak{J}$ уже не предполагает однозначности отображения $\mathfrak{X}$ в $\mathcal{Y}$ в прямом смысле слова.

Существование обратного отображения $\mathfrak{J}^{-1}$ эквивалентно, очевидно, условию взаимнооднозначности отображения $\mathfrak{J}$. В дальнейшем отображение $\mathfrak{J}$ пространства $\mathfrak{X}$ в $\mathcal{Y}$ мы будем понимать в указанном расширенном смысле (6).

2. Устойчивость чистой задачи характеризации

Для формулировки определения понятия устойчивости чистой задачи характеризации и связанных с ним критериев нам понадобится несколько понятий, родственных тем, которые используются в функциональном анализе.

Определение 1. Множество $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{X}$ называется μ-з а м к н у т ы м , если для любой последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{A}$ и случайной величины $X_0 \in \mathfrak{X}$ условие $\mu(X_n, X_0) \to 0$ при $n \to \infty$ влечет за собой $X_0 \in \mathcal{A}$.

Определение 2. Множество $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{X}$ называется μ-к о м п а к т н ы м , если из любой последовательности $X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{A}$ можно выделить подпоследовательность $X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots$ и указать $X_0 \in \mathfrak{X}$ такие, что $\mu(X_{n_k}, X_0) \to 0$ при $k \to \infty$.

Определение 3. Предположим, что в пространстве распределений случайных величин из $\mathfrak{X}$ задан функционал $\theta = \theta(X)$, принимающий значения из $[0, \infty]$. Множество $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X}$ называется (θ, μ) -к о м п а к-т н ы м , если для любой последовательности чисел

$$\infty = \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots ; \quad \varepsilon_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

разбиение множества $\mathfrak{X}'$ на непересекающиеся подмножества

$$\mathfrak{X}'_n = \{X : \varepsilon_n \leq \theta(X) < \varepsilon_{n-1} ; \ X \in \mathfrak{X}'\} ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

обладает тем свойством, что каждое множество представителей этих множеств, т.е.

$$\{X_n : X_n \in \mathfrak{X}'_n , \ X_n \notin \mathfrak{X}'_m \ \text{для} \ n \neq m ; \ n \geq 1\}$$

является μ-компактным.

Определение 4. Отображение $\mathfrak{J}$ пространства $\mathfrak{X}$ в пространство $\mathfrak{Y}$ называется (ν, μ) -н е п р е р ы в н ы м в точке $X_0 \in \mathfrak{X}$, если для любого $\alpha > 0$ найдется число $\beta > 0$, зависящее от α и X_0, такое, что для любой случайной величины $X \in \mathfrak{X}$

$$\mu(X, X_0) < \alpha \implies \nu(\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}X_0) < \beta .$$

Рассмотрим какую-либо чистую задачу ($\mathfrak{J}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$) в пространствах ($\mathfrak{X}, \mu$) и ($\mathfrak{Y}, \nu$).

Определение устойчивости чистой задачи.

Чистая задача ($\mathfrak{J}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$) называется (μ, ν) -у с т о й ч и в о й в пределах множества $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X}$, если для любой последовательности случайных величин $X_1, X_2, \ldots \in \mathfrak{X}'$

$$\varepsilon(X_n) \to 0 \implies \delta(X_n) \to 0 , \quad n \to \infty .$$

Естественность такого определения устойчивости чистой задачи характеризации становится понятной, если последнюю рассматривать в метрической форме (5) (см. рис.I).

Перейдем к изложению критериев устойчивости чистой задачи характеризации.

Теорема I. Ч и с т а я з а д а ч а ($\mathfrak{J}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$) я в л я е т с я ($\mu, \nu$) -у с т о й ч и в о й в п р е д е л а х м н о ж е с т в а $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X}$, е с л и в ы п о л н я ю т с я с л е д у ю щ и е у с л о в и я :

I°. М н о ж е с т в о $\mathfrak{A}$ - μ- з а м к н у т о ;

2°. М н о ж е с т в о $\mathfrak{B}$ - ν- з а м к н у т о ;

П о о т н о ш е н и ю к ф у н к ц и о н а л у $\varepsilon(X)$, о п р е д е л е н н о м у в (3):

3°. М н о ж е с т в о $\mathfrak{X}'$ — (ε, μ) - к о м п а к т н о ;

4°. Множество $\mathfrak{J}\mathfrak{X}'-(\varepsilon,\nu)$-компактно.

Доказательство. Предположим, что устойчивости чистой задачи нет. Другими словами, найдется такая последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots \in \mathfrak{X}'$ и такое число $c>0$, что

$$\varepsilon_n = \varepsilon(X_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

в то время как при всех достаточно больших n (не уменьшая общности можно считать, что при всех $n \geqslant 1$) оказывается выполненным неравенство:

$$\delta_n = \delta(X_n) \geqslant c > 0.$$

Разобьем с помощью последовательности $\{\varepsilon_n : n \geqslant 1\}$, которую мы, очевидно, можем считать строго убывающей, множество $\mathfrak{X}'$ на подмножества

$$\mathfrak{X}'_n = \{X : \varepsilon_n \leqslant \varepsilon(X) < \varepsilon_{n-1} ;\ X \in \mathfrak{X}'\}; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Понятно, что последовательность $\{X_n, n \geqslant 1\}$ является последовательностью представителей множеств $\mathfrak{X}'_n$. Согласно условия 3°, это множество μ-компактно и из него можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в смысле расстояния μ к некоторой случайной величине $X_0 \in \mathfrak{X}$. Для упрощения обозначений будем считать, что $\{X_n : n \geqslant 1\}$ как раз и есть нужная нам подпоследовательность, т.е.

$$\mu(X_n, X_0) \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty. \tag{7}$$

Последовательности $\{X_n : n \geqslant 1\}$ соответствует в пространстве $\mathcal{Y}$ последовательность образов

$$\{Y_n = \mathfrak{J}X_n : n \geqslant 1\}, \quad Y_0 = \mathfrak{J}X_0.$$

Поскольку $\varepsilon_n > 0$ при всех $n \geqslant 1$, то, в соответствии с определением (3), для каждой случайной величины X_n можно подобрать такие случайные величины $X_n^* \in \mathfrak{A}$ и $Y_n^* \in \mathfrak{B}$, что при всех $n \geqslant 1$

$$\mu(X_n, X_n^*) \leqslant 2\varepsilon_n, \quad \nu(Y_n, Y_n^*) \leqslant 2\varepsilon_n. \tag{8}$$

Далее, в силу (7) и (8) имеем

$$\mu(X_0, X_n^*) \leqslant \mu(X_0, X_n) + \mu(X_n, X_n^*) \leqslant$$

$$\leqslant \mu(X_0, X_n) + 2\varepsilon_n \to 0, \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Множество $\mathfrak{A}$ является μ-замкнутым по условию I°, следова -

тельно, $X_0 \in \mathcal{A}$.

Свойство 4° позволяет выделить из последовательности $\{Y_n : n \geq 1\}$ подпоследовательность, сходящуюся к $Y_0 \in \mathcal{Y}$.

Повторяя проведенные выше рассуждения в применении к последовательности $\{Y_n : n \geq 1\}$ получим, что $Y_0 \in \mathcal{B}$. Отсюда следует, на основании чистой задачи, что

$$X_0 \in \mathcal{C}.$$

Далее имеем, согласно (7), что

$$\delta(X_n) = \mu(X_n, C) \leq \mu(X_n, X_0) \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Но это противоречит сделанному предположению.

<u>Теорема 2</u>. Утверждение теоремы I сохранится, если условие 4° заменить условием

4*. Отображение $\mathcal{J}$ является (ν, μ)-непрерывным в каждой точке множества $\mathcal{A}$.

<u>Доказательство</u>. Рассуждения предыдущей теоремы, которыми устанавливается, что $X_0 \in \mathcal{A}$, сохраняются, поскольку они опираются только на условия I°-3°. Рассмотрим точку $Y_0 = \mathcal{J}X_0$. По условию 4* имеем

$$\nu(Y_n, Y_0) = \nu(\mathcal{J}X_n, \mathcal{J}X_0) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

После этого, используя (8), найдем, что

$$\nu(Y_0, Y_n^*) \leq \nu(Y_0, Y_n) + \nu(Y_n, Y_n^*) \leq$$

$$\leq \nu(Y_0, Y_n) + 2\varepsilon_n \to 0, \quad \text{при } n \to \infty$$

И, следовательно, в силу условия 2°, получим

$$Y_0 \in \mathcal{B}.$$

Дальнейший ход рассуждений такой же, как и в теореме I.

<u>Замечание I</u>. Симметричность условий теоремы I по отношению к множествам $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{X}$ и $\mathcal{J}\mathcal{X}$ будет, очевидно, полной, если отображение $\mathcal{J}$ (напомним, что оно понимается в смысле (6)) будет взаимно однозначным. В этом случае критерием (μ, ν)-устойчивости будет не только набор условий I°, 2°, 3°, 4* теоремы 2, но и симметрично образованный набор условий I°, 2°, 3*, 4°, где условие 3* является аналогом условия 4* :

3^*. О т о б р а ж е н и е $\mathcal{J}^{-1}$ я в л я е т с я (μ,ν) - н е п р е р ы в н ы м в к а ж д о й т о ч к е м н о ж е с т в а $\mathcal{B}$.

Замечание 2. Условие (ε,μ)-компактности множества $\mathfrak{X}'$ является расширением понятия μ -компактности и потому условие 3° (аналогично 4°) можно заменять условием μ -компактности множества $\mathfrak{X}'$.

В связи с этим, уместно обратить внимание на то обстоятельство, что условие 3° об (ε,μ)- компактности множества $\mathfrak{X}'$ можно заменить условием

3^{**}. М н о ж е с т в о $\mathcal{A}$ я в л я е т с я (ε,μ) - к о м п а к т н ы м , или же более простым условием μ-компактности этого множества. Разумеется, можно делать аналогичную замену условия 4°.

Возможность такой замены легко обнаружить, просматривая ту часть доказательства теоремы, где устанавливается возможность выделения μ-сходящейся подпоследовательности из последовательности X_n. Понятно, что аналогичное рассуждение можно проводить и в отношении последовательности X_n^*, если опираться при этом на условие 3^{**}.

Определение 5. Пусть μ_1, μ_2 - метрики, заданные в $\mathfrak{X}$. Мы говорим, что метрика μ_2 н е с л а б е е метрики μ_1 и пишем $\mu_1 \leqslant \mu_2$, если для любой последовательности $X_1, X_2, \ldots, \in \mathfrak{X}$

$$\mu_2(X_n, X_0) \to 0 \Rightarrow \mu_1(X_n, X_0) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Если $\mu_1 \leqslant \mu_2$ и $\mu_2 \leqslant \mu_1$, то метрика μ_1 называется метрикой э к в и в а л е н т н о й метрике μ_2, что записывается как $\mu_1 \sim \mu_2$.

Сформулируем несколько фактов, полезных при работе с критериями устойчивости, доказательство которых ввиду их простоты мы опускаем.

Лемма 1. П у с т ь в п р о с т р а н с т в е $\mathfrak{X}$ з а д а н ы м е т р и к и μ_1 и μ_2, п р и ч е м $\mu_1 \leqslant \mu_2$. Е с л и м н о ж е с т в о $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{X}$ μ_2- з а м к н у т о , т о о н о т а к ж е и μ_1 -з а м к н у т о .

Лемма 2. П у с т ь м е т р и к и μ_1, μ_2 з а д а н ы в $\mathfrak{X}$ и м е т р и к и ν_1, ν_2 з а д а н ы в $\mathcal{Y}$, п р и ч е м $\mu_1 \leqslant \mu_2$ и $\nu_1 \geqslant \nu_2$. Е с л и о т о б р а ж е н и е $\mathcal{J}$ п р о с т р а н с т в а $\mathfrak{X}$ в $\mathcal{Y}$ (в с м ы с л е (6)) (μ_1,ν_1) - н е п р е р ы в н о в т о ч к е $X_0 \in \mathfrak{X}$, т о о н о т а к ж е (μ_2,ν_2) - н е п р е р ы в н о в э т о й т о ч к е .

3. Исследование устойчивости нескольких чистых задач.

В этом пункте в качестве иллюстрации возможностей приведенных критериев устойчивости будут разобраны три примера конкретных чистых задач характеризации, взятых из [1]. Все эти примеры связаны со случаями, когда $U=R^n, V=R^m$, в качестве метрик d_U, d_V выбираются обычные евклидовские расстояния и соответствующие им пространства $\mathfrak{X}, \mathcal{Y}$ состоят из случайных векторов, заданных на вероятностном пространстве ($\Omega, \mathcal{O}, P$), где $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{O}$ - система всех борелевских множеств из Ω и P - мера Лебега этих множеств.

В качестве метрик μ и ν в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ в приводимых далее примерах будут использоваться лишь, так называемые, простые метрики, значения которых полностью определяются маргинальными распределениями сравниваемых случайных величин.

При использовании таких метрик мы фактически имеем дело не с пространствами случайных величин $\mathfrak{X}, \mathcal{Y}$, заданных на одном вероятностном пространстве, а с пространствами маргинальных распределений, соответствующих этим величинам.

Обозначим в пространстве $\mathfrak{X}$ (аналогичные обозначения и в пространстве $\mathcal{Y}$) $\mathfrak{X}_I$ - подмножество случайных векторов с независимыми компонентами, $\mathfrak{X}^I$ - подмножество случайных векторов с одинаково распределенными компонентами, $\mathfrak{X}_I^I=\mathfrak{X}_I \cap \mathfrak{X}^I$ и $\mathcal{N}_I^I \subseteq \mathfrak{X}_I^I$ - - множество нормально распределенных векторов с независимыми и одинаково распределенными компонентами.

Условимся далее обозначать π_U, π_V - метрики Леви-Прохорова, определяемые, соответственно, расстояниями d_U и d_V.

<u>Лемма 3</u>. Определенные выше подмножества $\mathfrak{X}_I$, $\mathfrak{X}^I$ и $\mathfrak{X}_I^I$ множества $\mathfrak{X}$ являются μ-замкнутыми по отношению к любой метрике μ, эквивалентной метрике π_U (т.е. реализующей слабую топологию).

Доказательство леммы элементарно и мы его приводить не будем.

Предположим, что мы имеем отображение $J: U \to V$. Если это отображение таково, что для любой случайной величины $X \in \mathfrak{X}$ преобразование $JX \in \mathcal{Y}$, то мы говорим, что это преобразование индуцирует отображение $J: \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$.

<u>Лемма 4</u>. Пусть преобразование $J: U \to V$ индуцирует отображение $J: \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$. Если в каждом шаре $S_R=\{x: |x|=d_U(0,x) < R\}$ пространства U преобразование J непрерывно по отношению к метрикам d_U и

d_V, то каждому $\varepsilon>0$ и каждой случай- величине X (точнее каждому распределению $\mathcal{L}(X)$) можно поставить в соответствие такое $\delta>0$, что для любой случайной величины $X'\in\mathfrak{X}$

$$\pi_U(X,X')<\delta \Longrightarrow \pi_V(\mathfrak{J}X,\mathfrak{J}X')<\varepsilon,$$

т.е. отображение $\mathfrak{J}$ является непрерывным по отношению к метрикам π_U,π_V в каждой точке пространства $\mathfrak{X}$.

Утверждение этой леммы является частным случаем теоремы 3 А работы автора [12].

Пример 1. Характеризация нормального распределения свойст - вом одинакового распределения линейных статистик.

Здесь $U=R^n$, $n\geqslant 2$ и $V=R^2$. Отображение $\mathfrak{J}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ индуцируется матричным преобразованием $\mathfrak{J}:U\to V$, где матрица

$$\mathfrak{J}=\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

подчинена специальным условиям. Описание класса $\mathfrak{S}$ рассматриваемых здесь матриц $\mathfrak{J}$, можно найти в формулировке теоремы 2.4.2 из [1], содержащей как раз ту чистую задачу, устойчивость которой мы будем проверять в этом примере.

Множество $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{X}_I^I$ выделяется следующим дополнительным требованием. Пусть $f_X^*(t)$ - характеристическая функция компо - ненты X_1 вектора X. Тогда для некоторого числа $T>0$

$$a(T)=\inf_X\{\min(|f_X^*(t)|:|t|\leqslant T):X\in\mathfrak{A}\}>0.$$

Следует заметить, что описание множества $\mathfrak{S}$ и описание множества $\mathfrak{A}$ связаны между собой выбором числа T.

Множество $\mathfrak{B}$ совпадает с множеством $\mathfrak{Y}^I$. Чистая задача ($\mathfrak{J}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$), как это показывает упомянутая уже теорема 2.4.2 из [1], связана с характеризацией множества $C=\mathcal{N}_I^I$.

Выберем в пространствах $\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$ метрики $\mu=\pi_U$ и $\nu=\pi_V$. В качестве критерия устойчивости рассматриваемой чистой задачи нам будет удобно использовать критерий теоремы 2, т.е. набор условий (1^0, 2^0, 3^*, 4^0).

Поскольку $\mathfrak{J}$ является матричным преобразованием, то, как легко видеть,

$$d_V(\mathfrak{J}u,\mathfrak{J}u')\leqslant\|\mathfrak{J}\|\,d_U(u,u'),$$

где $\|\mathfrak{J}\|$ - норма оператора $\mathfrak{J}$. Следовательно, на основании леммы 4, мы можем сделать вывод о (ν,μ) - непрерывности отображения $\mathfrak{J}$ в каждой точке пространства $\mathfrak{X}$, т.е. условие 3* выполнено. Из леммы 3 следует выполнение условий 1° и 2° критерия. Поэтому, если в качестве $\mathfrak{X}'$ выбрать какое-либо π_U – компактное множество (другими словами – слабо компактное множество в пространстве распределений случайных величин), то все условия критерия будут выполнены, т.е., чистая задача (μ, ν) – устойчива в $\mathfrak{X}'$.

<u>Пример 2</u>. Характеризация нормального распределения свойством независимости линейной и квазиполиномиальной статистик.

Здесь, как и в предыдущем примере, $U = R^n$, $n \geq 2$ и $V = R^2$. Отображение $\mathfrak{J} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ индуцируется преобразованием $\mathfrak{J} : U \to V$ следующего вида. Если $u \in U$ и $v = (v_1, v_2) \in V$, то

$$v_1 = S_1(u), \quad v_2 = S_2(u),$$

где S_1 – линейная и S_2 – непрерывная квазиполиномиальная статистики, допустимые по всем своим переменным (по поводу определения понятий квазиполиномиальности и допустимости статистик см. [1] гл.4).

Множество $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{X}_I^I$ выделяется дополнительным условием (см. обозначение предыдущего примера):

$$a(T) > 0 \qquad \text{при каждом } T > 0.$$

Роль множества $\mathcal{B}$ играет множество $\mathcal{Y}_I$. Чистая задача$(\mathfrak{J}, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ при таком выборе ее элементов характеризует, как это видно из теоремы 4.4.2 монографии [1], множество $\mathcal{C} = \mathcal{N}_I^I$.

В качестве метрик μ и ν выбираем метрики

$$\mu = \pi_U \qquad \text{и} \qquad \nu = \pi_V .$$

Проверка выполнения условий (1°, 2°, 3*, 4°) критерия устойчивости чистой задачи осуществляется с использованием лемм 3 и 4 дословно так же как и в предыдущем примере.

<u>Пример 3</u>. Характеризация нормального распределения свойством постоянства регрессии одной линейной статистики на другую.

Здесь $U = V = R^2$. Отображение $\mathfrak{J} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ индуцируется матричным преобразованием $\mathfrak{J} : U \to V$

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}, \quad \text{где } \alpha\beta = 1.$$

Обозначим $[\mathfrak{X}]^1$ множество случайных векторов из $\mathfrak{X}$, имеющих конечные математические ожидания (аналогичный смысл имеет $[\mathcal{Y}]^1$). Подмножество случайных векторов, имеющих нулевые математические ожидания, обозначим $[\mathfrak{X}]_0^1$ (соответственно $[\mathcal{Y}]_0^1$).

Роль множества $\mathcal{A}$ здесь будет выполнять множество $[\mathfrak{X}]_0^1$, а в качестве третьего элемента $-\mathcal{B}$ мы выберем подмножество случайных векторов $Y=(Y_1, Y_2)$ из множества $[\mathcal{Y}]_0^1$, подчиненных дополнительным условиям

$$E(Y_1|Y_2)=0 \quad , \quad E(Y_2|Y_1)=0. \tag{9}$$

Как показывает теорема 5.3.2 из [1], чистая задача $(\mathcal{J}, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ с выбранными таким образом элементами, характеризует множество $\mathcal{C}=\mathcal{N}_1^1$.

Определим в $\mathcal{X}$ метрику

$$\mu(X,X')=\hat{\tau}_1(X,X')=\inf \tau_1(X,X'),$$

где

$$\tau_1(X,X')=Ed_U(X,X'),$$

и нижняя грань берется по всевозможным совместным распределениям $\mathcal{L}(X,X')$ с фиксированными маргинальными распределениями $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(X')$. Метрика $\hat{\tau}_1$ по терминологии работ [11, 12] называется минимальной метрикой, соответствующей метрике τ_1.

<u>Лемма 5</u>. М н о ж е с т в о $[\mathcal{X}]^1$ и е г о п о д м н о ж е с т в о $[\mathcal{X}]_0^1$ я в л я ю т с я з а м к н у т ы м и м н о ж е с т в а м и п о о т н о ш е н и ю к м е т р и к е $\hat{\tau}_1$.

<u>Доказательство.</u> Очевидно, имеем для любых $X, X' \in [\mathcal{X}]^1$

$$\tau_1(X,X')=E|X-X'| \geqslant E|X'|-E|X|,$$

где $|X|$ обозначает длину вектора X. Следовательно

$$\hat{\tau}_1(X,X') \geqslant E|X'|-E|X|.$$

Это неравенство, в свою очередь, показывает, что условие $X\in[\mathcal{X}]^1$ и $\hat{\tau}_1(X,X')<\infty$ влекут за собою $X'\in[\mathcal{X}]^1$. Откуда и получается свойство $\hat{\tau}_1$ – замкнутости множества $[\mathcal{X}]^1$. Рассуждение в отношении множества $[\mathcal{X}]_0^1$ аналогично.

<u>Следствие</u> леммы 5: Множество $\mathcal{A}$ является μ - замкнутым, т.е. условие 1^0 критерия устойчивости выполняется.

В пространстве $\mathcal{Y}$ выберем метрику $\gamma=\lambda_0+\lambda_1$, где

$$\lambda_k(Y,Y')=\min\{\max[v_k(Y,Y';T), \tfrac{1}{T}]: T>0\},$$

и величины v_k определяются следующими равенствами с помощью характеристических функций $f_Y(t)$ случайных величин $Y\in[\mathcal{Y}]^1$

$$v_0(Y,Y';T)=\tfrac{1}{2}\max\{|f_Y(t)-f_{Y'}(t)| : |t|\leqslant T\},$$

$$v_1(Y, Y'; T) = \max\{|\operatorname{grad}(f_Y(t) - f_{Y'}(t))| : |t| \leqslant T\}.$$

Условие (9), как легко проверить, эквивалентно следующему условию (t_1, t_2 - любые вещественные числа):

$$EY_1 \exp(it_2Y_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} f_Y(0, t_2) = 0,$$
$$EY_2 \exp(it_1Y_1) = \frac{\partial}{\partial t_2} f_Y(t_1, 0) = 0. \qquad (10)$$

Лемма 6. Множество $[\mathcal{Y}]^1$ и его подмножества $[\mathcal{Y}]^1_0$ и $\mathfrak{B}$ являются замкнутыми множествами по отношению к метрике $\nu = \lambda_0 + \lambda_1$.

Доказательство. Пусть $Y \in [\mathcal{Y}]^1$, $Y' \in \mathcal{Y}$ и расстояние $\lambda_1 = \lambda_1(Y, Y')$ конечно (последнее предположение эквивалентно конечности $\nu(Y, Y')$ так как $\lambda_0 \leqslant 1$). Тогда $Y' \in [\mathcal{Y}]^1$. Действительно, выберем какое-либо положительное $T < 1/\lambda_1$. Имеем

$$v_1(Y, Y'; T) < \lambda_1.$$

Отсюда следует, что для любого $t = (t_1, t_2) \in R^2$ под условием $|t| \leqslant T$

$$\lambda_1 \geqslant |\operatorname{grad}(f_Y(t) - f_{Y'}(t))|. \qquad (11)$$

В частности, при $t = 0$ получаем

$$\lambda_1 \geqslant |EY - EY'| \geqslant |EY'| - |EY|.$$

Откуда, очевидно, следует, что $Y' \in [\mathcal{Y}]^1$.

Аналогично доказывается, что из $Y_n \in [\mathcal{Y}]^1_0$; $n \geqslant 1$, $Y^* \in \mathcal{Y}$ и $\lambda_1(Y_n, Y^*) \to 0$ при $n \to \infty$ следует, что $Y^* \in [\mathcal{Y}]^1_0$.

Предположим теперь, что $Y_n \in \mathfrak{B}$, $Y^* = (Y^*_1, Y^*_2) \in \mathcal{Y}$ и что $\lambda_1(Y_n, Y^*) \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем в неравенстве (11) сначала $t = (0, t_2)$, $|t_2| \leqslant T$, а затем $t = (t_1, 0)$, $|t_1| \leqslant T$. Имеем, принимая во внимание условие (10), выделяющее множество $\mathfrak{B}$ из $[\mathcal{Y}]^1_0$,

$$\lambda_1^2(Y_n, Y^*) \geqslant (EY_1^* \exp(it_2Y_2^*))^2 + (EY_2^* \exp(it_1Y_1^*))^2.$$

Предельный переход при $n \to \infty$ в условиях (10) показывает, что $Y^* \in \mathfrak{B}$. Лемма доказана.

Следовательно, условие 2^0 критерия устойчивости выполнено. Следующий наш шаг будет связан с условием 4^0, точнее мы будем использовать упрощенный вариант этого условия и разыскивать условия, при которых множество $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X}$ является μ - компактным.

Лемма 7. Множество $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X}$ будет $\hat{\tau}_1$ - компактным тогда и только тогда, когда

$$b(s) = \sup\{E|X|I(|X|>s) : X \in \mathfrak{X}'\} \to 0 \qquad (12)$$

при $s \to \infty$.

Хотя лемма 7 является частным случаем теоремы 8 работы автора [11], мы докажем ее, так как в этой работе приводилась только формулировка теоремы.

Достаточность. Нетрудно убедиться, что множество $\mathfrak{X}'$ будет $\hat{\tau}_1$ - компактным, если это множество π_U - компактно и к тому же на этом множестве метрики $\hat{\tau}_1$ и π_U эквивалентны($\hat{\tau}_1 \sim \pi_U$). То, что π_U - компактность множества $\mathfrak{X}'$ является следствием условия (12) становится понятным, если вспомнить как выглядит критерий π_U-компактности (т.е. слабой компактности множества распределений случайных величин из $\mathfrak{X}'$). С другой стороны, условие (12), очевидно, сводит вопрос об эквивалентности метрик $\hat{\tau}_1$ и π_U на множестве $\mathfrak{X}'$ к аналогичному вопросу, но уже на множестве "урезанных" случайных величин из $\mathfrak{X}'$, носитель которых сосредоточен в шаре $K_s = \{u : |u| < s\} \subset U$.

Метрика $\hat{\tau}_1$ является n-мерным аналогом хорошо известной "средней" метрики в случае $U = R^1$:

$$\int |P(X<u) - P(X'<u)| du,$$

и поэтому эквивалентность метрики $\hat{\tau}_1$ и π_U на шарах K_s-факт вполне понятный,(в связи с проведенными рассуждениями см.теоремы 5,6 и лемму 4 из [11]).

Необходимость. Пусть $\mathfrak{X}'$ является μ-компактным множеством. Поскольку $\hat{\tau}_1 \geqslant \pi_U^2$ (см. теорему 5 из [11]), то множество $\mathfrak{X}'$ является также и π_U-компактным. Если условие (12) для него не выполнено, то найдется число $C > 0$, последовательность чисел $N_1 < N_2 < \ldots$ ($N_n \to \infty$ при $n \to \infty$), и последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ $\mathfrak{X}'$ такие, что .

$$E|X_n| I(|X_n| > N_n) \geqslant C > 0 ; \quad n \geqslant 1.$$

Выделим из этой последовательности подпоследовательность, μ - сходящуюся к некоторой случайной величине $X_0 \in \mathfrak{X}$. Ради простоты записи считаем, что $\{X_n\}$, как раз и есть нужная нам подпоследовательность. Поскольку $X_n \in [\mathfrak{X}]^1$ и $\hat{\tau}_1(X_n, X_0) < \infty$ то, как мы уже видели, отсюда следует $X_0 \in [\mathcal{X}]^1$. Имеем далее

$$\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_1(X_n, X_0) \geqslant E|X_n| - E|X_0| =$$

$$= E|X_n| I(|X_n| \leqslant s) + E|X_n| I(|X_n| > s) -$$

$$- E|X_0| I(|X_0| \leqslant s) - E|X_0| I(|X_0| > s).$$

Отсюда находим, что для всех достаточно больших n, для которых $N_n \geqslant s$

$$E|X_0| I(|X_0| > s) + \hat{\tau}_1 +$$

$$+ |E|X_n| I(|X_n| \leqslant s) - E|X_0| I(|X_0| \leqslant s)| \geqslant$$

$$\geqslant E|X_n| I(|X_n| > s) \geqslant c > 0.$$

Для достаточно большого s первое слагаемое не превосходит $c/4$. Фиксируем s и выбираем n столь большими, чтобы и второе и третье слагаемое не превосходили $c/4$ каждое. То, что третье слагаемое стремится к нулю, следует из того хорошо понятного факта, что для случая ограниченных случайных величин $\hat{\tau}_1$ - сходимость и π_U - сходимость эквивалентны. Тем самым, мы приходим в противоречие со сделанным предположением. Лемма доказана.

Следовательно, выбрав множество $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ удовлетворяющее условию (12), мы обеспечим выполнение требования 4^0 в критерии устойчивости.

<u>Следствие</u>. Из утверждения доказанной леммы и леммы 4 работы [11] видно, что метрики $\hat{\tau}_1$ и π_U будут эквивалентны ($\hat{\tau}_1 \sim \pi_U$) на каждом множестве $\mathcal{X}'$, удовлетворяющем условию (12).

Для доказательства устойчивости рассматриваемой чистой задачи можно использовать как критерий, даваемый теоремой 1, т.е. условия (1^0, 2^0, 3^0, 4^0), так и критерий сформулированный в теореме 2, т.е. набор условий (I^0, 2^0, 3^*, 4^0). Различие состоит в проверке третьего условия. Выполнение остальных условий установлено.

Лемма 8. Для любых $Y, Y' \in [\mathcal{Y}]^1$ значения расстояний

$$\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_1(Y, Y'), \quad \lambda_0 = \lambda_0(Y, Y'), \quad \lambda_1 = \lambda_1(Y, Y')$$

связаны следующими неравенствами:

$$\lambda_0^2 \leqslant \hat{\tau}_1,$$

$$\lambda_1^2 \leqslant 25\, \hat{\tau}_1 (N + \hat{\tau}_1),$$

где число N образуется по значению $\hat{\tau}_1$ и распределению вектора Y следующим способом

$$N = \min\{s : E|Y| I(|Y| > s) \leqslant \sqrt{s\hat{\tau}_1}\}.$$

Доказательство. Для любых $Y, Y' \in [\mathcal{Y}]^1$ и любого числа $T > 0$ имеем оценку

$$v_0(Y, Y'; T) \leqslant T E|Y - Y'|.$$

Поскольку левая часть неравенства зависит лишь от маргинальных распределений и характер зависимости между Y и Y' не фиксируется, то из этого неравенства следует, что

$$v_0(Y, Y'; T) \leqslant T\hat{\tau}_1(Y, Y').$$

Дальнейшая минимизация по T получающейся отсюда оценки

$$\lambda_0 \leqslant \max(T\hat{\tau}_1, \tfrac{1}{T})$$

приводит к первой части утверждения леммы. Аналогично можно получить оценку $v_1(Y, Y'; T)$. Именно, для $T > 0$ и числа $N > 0$, выбираемого согласно условия леммы,

$$v_1(Y, Y'; T) \leqslant \sqrt{2}\{E|Y - Y'| + E|Y| \min(2, T|Y - Y'|)\} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\{E|Y - Y'| \cdot (1 + TN) + 2E|Y| I(|Y| > N)\}.$$

Далее, путем минимизации по классу совместных распределений случайных векторов Y, Y', находим

$$v_1(Y, Y'; T) \leqslant \sqrt{2}(1 + TN)\hat{\tau}_1 + 2\sqrt{2}\, E|Y| I(|Y| > N) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}(1 + TN)\hat{\tau}_1 + 2\sqrt{2}\sqrt{\hat{\tau}_1 N}.$$

Откуда для расстояния λ_1 получаем требуемое неравенство

$$\lambda_1 \leqslant max(\vartheta_1, \tfrac{1}{\dagger}) = \sqrt{2}\hat{\tau}_1 + 3\sqrt{2}\sqrt{N\hat{\tau}_1} \leqslant 5\sqrt{\hat{\tau}_1(N+\hat{\tau}_1)} .$$

Укажем на два следствия этой леммы, напомнив, что в разбираемом случае пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ совпадают, так как совпадают пространства U и V.

Следствие 1. Если какое-либо множество $\mathfrak{X}'$ является μ-компактным, то его образ $\mathfrak{J}\mathfrak{X}'$ будет множеством ν-компактным. Действительно, поскольку

$$E|\mathfrak{J}X| I(|\mathfrak{J}X|>s) \leqslant \|\mathfrak{J}\| E|X| I(\|\mathfrak{J}\| |X|>s),$$

то множество $\mathfrak{J}\mathfrak{X}'$, как это видно из условия(12), также является μ-компактным. Покажем, что в пределах каждого μ-компактного множества метрика $\mu \sim \nu$. Из леммы 8 имеем $\lambda_0 \leqslant \hat{\tau}_1$, $\lambda_1 \leqslant \hat{\tau}_1$, т.е. $\nu \leqslant \hat{\tau}_1$. По следствию к лемме 7 имеем $\hat{\tau}_1 \sim \pi_U$. Если теперь учесть, что $\lambda_0 \sim \pi_U$ и $\lambda_0 \leqslant \nu$, то получим, что $\nu \geqslant \pi_U$. Таким образом, в пределах μ-компактного множества, например множества $\mathfrak{J}\mathfrak{X}'$, имеем $\mu \sim \pi_U$ и $\nu \sim \pi_U$. Откуда и следует ν-компактность этого множества. А вместе с этим и выполнение условия 3^0 критерия устойчивости.

Следствие 2. Для любых $X, X' \in [\mathfrak{X}]^1$ имеем

$$\tau_1(\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}X') = E|\mathfrak{J}(X-X')| \leqslant \|\mathfrak{J}\| E|X-X'|.$$

Отсюда, переходя к минимальной метрике $\hat{\tau}_1$, получим

$$\hat{\tau}_1(\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}X') \leqslant \|\mathfrak{J}\| \hat{\tau}_1(X, X').$$

Это неравенство вместе с доказанным свойством $\nu \leqslant \hat{\tau}_1$ приводит к утверждению о $_1(\nu, \mu)$-непрерывности отображения $\mathfrak{J}$ в каждой точке множества $[\mathfrak{X}]^1$. Тем самым устанавливается выполнение условия 3^* критерия устойчивости.

Проверка выполнений условий критерия устойчивости в третьем примере потребовало большего места и больших усилий, чем в первых двух. Это связано прежде всего с тем, что в третьем примере использовались новые метрики, свойства которых пришлось дополнительно выяснять. По сути дела леммы 5-8 содержали нужные нам сведения об используемых метриках $\hat{\tau}_1$ и λ_1, сведения, которые носят универсальный характер и могут использоваться при исследовании устойчивости других чистых задач характеризации.

Литература

I. К а г а н А.М., Л и н н и к Ю.В., Р а о С.Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.,1972.
2. L u k a c s E., L a h a R.G. Applications of characteristic functions. London,1964.
3. L u k a c s E. Stochastic Convergence.New York-London,1975.
4. К р а м е р Г. Случайные величины и распределения вероятностей. М.,1947.
5. С а п о г о в Н.А. Проблема устойчивости для теоремы Крамера - Известия АН СССР,сер.матем.,I5,3,I95I,205-2I8.
6. Х о а н г Х ы у Н ь ы . Об устойчивости некоторых характеристических свойств нормальной совокупности. - Теор.вероятн.и ее примен.,I3,2,I968,308-3I4.
7. Г а б о в и ч Ю.Р. Об устойчивости некоторых характеристических свойств нормального распределения. - Теор.вероятн. и ее примен.,I9,2,I974,38I-389.
8. L u k a c s E. Stability theorems for characterization by constant regression. - Period.Math.Hung.,2,№I-4,1972,III-I28.
9. B e e r S., L u k a c s E. Stability theorems for a characterization of the Poisson distributions. - Теор.вероятн. и ее примен., I9,4,I974,689-699.
IO. М а ч и с Ю.Ю. Оценки в теореме об устойчивости разложений распределения Пуассона. - Теор.вероятн.и ее примен.,I6,2,I97I, 2I8-228.
II. З о л о т а р е в В.М. О непрерывности стохастических последовательностей, порождаемых рекуррентными процедурами. - Теор.вероятн. и ее примен.,20,4,I975,834-847.
I2. З о л о т а р е в В.М. Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений. - Матем.сборник, т. IOI(I43),I976.

The stability phenomenon in characterization of distributions
V.M.Zolotarev

A metric-topological approach to stability problems of characterization of distributions is proposed. General conditions of stability are formulated and their applications are illustrated on certain well known problems of characterization.